

# ANÁLISE NUMÉRICA

## um curso moderno

---

PETER ALBRECHT

Professor de Matemática da PUC/RJ

Colaboração

Prof.<sup>a</sup> Therezinha Costa Ferreira Chaves

LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA S. A.  
EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

511 de Janeiro — GB/1973.  
A341  
Ex.5

# CONTEÚDO

---

---

## CAPÍTULO 0 — PRELIMINARES, 1

---

- 0.1 — Espaços Vetoriais e Métricos, 1
  - 0.2 — Operadores, 5
  - 0.3 — Iteração, 9
- 

## CAPÍTULO 1 — SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES TRANSCENDENTES, 15

---

- 1.1 — Observações Gerais, 15
  - 1.2 — Aceleração da Convergência, 18
  - 1.3 — O Algoritmo de Steffensen, 20
  - 1.4 — O Algoritmo de Newton, 23
  - 1.5 — Método de Newton para Raízes Múltiplas, 24
  - 1.6 — Iteração para Sistemas de Equações, 26
  - 1.7 — Generalização do Método de Newton para Operadores, 28
    - 1.7.1 — Método de Newton para Sistemas Transcendentes, 33
    - 1.7.2 — Inversão Iterativa de uma Matriz, 35
- 

## CAPÍTULO 2 — ZEROS DE POLINÔMIOS, 37

---

- 2.1 — Considerações sobre o Erro, 37
- 2.2 — Algoritmo de Horner, 39
  - 2.2.1 — O Algoritmo Simples, 39
  - 2.2.2 — Extensão do Algoritmo de Horner, 40
  - 2.2.3 — Divisão por um Polinômio do 2.º Grau, 42
  - 2.2.4 — Argumentos Complexos, 43
- 2.3 — Método de Newton para Polinômios com Coeficientes e Raízes Reais, 44
- 2.4 — Método de Bairstow, 48

- 2.5 — O Algoritmo Quocientes-diferenças (Algoritmo  $QD$ ), 51
  - 2.5.1 — Algoritmo de Bernoulli, 51
  - 2.5.2 — O Esquema  $QD$ , 52
  - 2.5.3 — O Algoritmo  $QD$ , 53

---

### **CAPÍTULO 3 — MÉTODOS DIRETOS PARA SISTEMAS LINEARES E INVERSÃO DE MATRIZES, 58**

---

- 3.1 — O Método de Eliminação de Gauss, 58
- 3.2 — Os Métodos Compactos, 61
  - 3.2.1 — O Método de Banachiewicz, 61
  - 3.2.2 — Método Geral de Banachiewicz, 63
  - 3.2.3 — Método de Cholesky para Matrizes Simétricas, 65
- 3.3 — Inversão de Matrizes por Partição, 67
  - 3.3.1 — O "Método Escada", 67
  - 3.3.2 — Partição Geral, 69

---

### **CAPÍTULO 4 — NOÇÕES PRELIMINARES SOBRE MATRIZES, 71**

---

- 4.1 — Autovalores, 71
- 4.2 — Normas de Matrizes, 76
- 4.3 — Erros nas Operações com Matrizes, 79
  - 4.3.1 — Limites para o Erro Relativo, 80
  - 4.3.2 — Arredondamento dos Elementos das Matrizes, 82
- 4.4 — Raio Espectral; Limitações dos Autovalores, 83
- 4.5 — Matrizes Especiais, 87
  - 4.5.1 — Grafos Finitos, 87
  - 4.5.2 — Matrizes Irredutíveis e Fracamente Cíclicas, 89
  - 4.5.3 — Redução Cíclica de um Sistema, 94
  - 4.5.4 — Matrizes Não-Negativas, 95

---

### **CAPÍTULO 5 — MÉTODOS ITERATIVOS PARA SISTEMAS LINEARES, 100**

---

- 5.1 — Três Métodos Iterativos, 100
  - 5.1.1 — Iteração de Jacobi, 101
  - 5.1.2 — Iteração de Gauss-Seidel, 102
  - 5.1.3 — Sobre-Relaxação, 104
- 5.2 — Métodos Bloco-iterativos, 106
  - 5.2.1 — Iteração Bloco de Jacobi, 107
  - 5.2.2 — Iteração Bloco de Gauss-Seidel, 109
  - 5.2.3 — Bloco Sobre-Relaxação, 109
- 5.3 — Convergência dos Métodos Iterativos, 110
- 5.4 — Teoremas de Comparação e Condições Suficientes para Convergência, 113
  - 5.4.1 — Matrizes de Jacobi Não-negativas, 113
  - 5.4.2 — Matrizes de Diagonal Dominante, 116
  - 5.4.3 — Matrizes Hermitianas, 117
- 5.5 — Sobre-relaxação para Sistemas Consistentemente Ordenados, 119
  - 5.5.1 — Relação entre os Autovalores de  $J$  e  $R_\omega$ , 119
  - 5.5.2 — Uma Classe de Matrizes Consistentemente  $(r, q)$  — ordenadas, 121

---

**CAPÍTULO 6 — INTERPOLAÇÃO COM POLINÔMIOS, 129**

---

- 6.1 — Unicidade do Polinômio Interpolante, 129
- 6.2 — Erro da Interpolação de Lagrange, 130
  - 6.2.1 — Fórmula de Erro, 130
  - 6.2.2 — Considerações sobre a Convergência, 132
- 6.3 — Diferenças Finitas e Diferenças Divididas, 136
  - 6.3.1 — Diferenças Progressivas e Regressivas, 136
  - 6.3.2 — Diferenças Divididas, 137
  - 6.3.3 — Relações entre Diferenças Finitas e Divididas, 140
- 6.4 — Fórmula de Interpolação de Newton, 140
  - 6.4.1 — Fórmula de Newton com Diferenças Divididas, 140
  - 6.4.2 — Relação entre Diferenças e Derivadas de uma Função, 143
  - 6.4.3 — Fórmula de Newton para Diferenças Finitas, 144
- 6.5 — O Lema de Aitken, 146
  - 6.5.1 — Algoritmo de Aitken, 147
  - 6.5.2 — Algoritmo de Neville, 149
- 6.6 — Determinação das Raízes de Funções por Interpolação, 150

---

**CAPÍTULO 7 — QUADRATURA NUMÉRICA, 156**

---

- 7.1 — Fórmulas de Newton-Cotes, 157
- 7.2 — Fórmulas Fechadas, 159
- 7.3 — Fórmulas Compostas, 163
  - 7.3.1 — Regra dos Trapézios e Fórmula de Maclaurin, 163
  - 7.3.2 — Fórmula de Simpson para  $m = 2n$  Intervalos, 165
  - 7.3.3 — Uma Fórmula para  $m = 2n + 1$  Intervalos, 166
- 7.4 — Fórmulas com Termos de Correção, 166
- 7.5 — Fórmulas Abertas, 168
- 7.6 — O Erro nas Fórmulas de Newton-Cotes, 168
- 7.7 — Considerações Gerais sobre a Convergência, 174

---

**CAPÍTULO 8 — EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON, 177**

---

- 8.1 — Quadratura Numérica por Extrapolação, 177
  - 8.1.1 — Observações Preliminares, 177
  - 8.1.2 — O Algoritmo de Romberg, 178
  - 8.1.3 — Casos Particulares do Método de Romberg, 180
  - 8.1.4 — Considerações sobre o Erro e a Convergência, 182
- 8.2 — Discussão Geral da Extrapolação de Richardson, 188
  - 8.2.1 — Hipóteses e Exemplos, 188
  - 8.2.2 — Tratamento Geral do Método, 189
  - 8.2.3 — O Algoritmo *A*, 191
  - 8.2.4 — O Algoritmo *B*, 194
- 8.3 — Diferenciação Numérica por Extrapolação, 198
- 8.4 — Integração Numérica de Equações Diferenciais por Extrapolação, 199

---

**CAPÍTULO 9 — MÉTODOS DE PASSO SIMPLES, 202**

---

- 9.1 — Algoritmos com Derivadas, 203
- 9.2 — Métodos de Runge-Kutta, 205
  - 9.2.1 — O Método Geral, 205
  - 9.2.2 — Fórmulas de Runge-Kutta de 2.ª ordem, 206
  - 9.2.3 — Fórmulas de Runge-Kutta de 4.ª ordem, 209
  - 9.2.4 — Fórmulas Mistas, 210
  - 9.2.5 — Esquema para Sistemas de Equações, 211
- 9.3 — Convergência dos Métodos de Passo Simples, 213

---

**CAPÍTULO 10 — MÉTODOS DE PASSO MÚLTIPLO, 216**

---

- 10.1 — Alguns Métodos Clássicos de Passo Múltiplo, 217
  - 10.1.1 — Métodos Explícitos, 217
  - 10.1.2 — Métodos "Preditor-Corretor", 219
- 10.2 — Convergência dos Métodos de Passo Múltiplo, 223
  - 10.2.1 — Convergência e Ordem dos Métodos de Passo Múltiplo, 224
  - 10.2.2 — Consistência e Estabilidade dos Métodos de Passo Múltiplo, 226
  - 10.2.3 — Considerações do Erro num Caso Especial, 229
- 10.3 — Comparação dos Métodos de Integração, 230
  - 10.3.1 — Métodos de Passo Simples, 231
  - 10.3.2 — Métodos de Passo Múltiplo, 231
  - 10.3.3 — Métodos de Extrapolação, 232

---

**APÊNDICE I — LISTA DOS ALGORITMOS, 233****APÊNDICE II — LIVROS RECOMENDADOS, 235**

---

**ÍNDICE ALFABÉTICO, 237**