

PUC

Series: Monographs in Computer Science
and Computer Applications

Nº 11/69

DISCRETISATION ET RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DES ONDES

by

José Roberto Ribeiros dos Santos

Alain Rigal

Michel Bordenave

Computer Science Department - Rio Datacentro

CENTRO TÉCNICO CIENTÍFICO
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente, 209 — ZC-20
Rio de Janeiro — Brasil

Introduction.

Le but de cette étude est la discrétisation et la résolution numérique par la méthode de sur-relaxation de l'équation des ondes:

$$(1) \quad a^2 \Delta u(x,y,z,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,y,z,t) \quad \text{où la fonction } u(x,y,z,t) \text{ est}$$

définie sur le pavé $P: |0,a| \times |0,b| \times |0,c| \times |0,t|$, et soumise aux conditions initiales:

$$(2) \quad u(x,y,z,0) = f_1(x,y,z), \text{ amplitude initiale de l'onde,}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,y,z,0) = f_2(x,y,z), \text{ vitesse initiale de l'onde, et aux conditions aux limites:}$$

tes:

$$u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t)$$

pour (x,y,z) appartenant aux faces du parallélépipède Π :

$$|0,a| \times |0,b| \times |0,c|.$$

Dans une première partie, on propose les équations générales aux différences finies à trois niveaux de temps qui dépendent de deux paramètres seuls θ_1 et θ_2 . Une étude générale a permis de donner les diverses formules - dont certaines sont connues [1] - et les lois d'erreur pour les valeurs intéressantes de θ_1 et θ_2 , en particulier pour $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, ceci pour les cas de une, deux ou trois variables d'espace.

Dans chaque cas, on donne également les formules correspondant au point particulier du calcul du premier niveau de temps.

Dans une deuxième partie, et pour $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, on fait une analyse de la stabilité de la solution numérique en utilisant le critère de stabilité de Von Neumann [2] .

Ensuite, lorsqu'on est en présence de formules aux différences implicites, on propose la méthode itérative de sur-relaxation, pour le cas de deux et trois variables d'espace.

Enfin, dans une quatrième partie, de façon à comparer les différentes approximations et méthodes proposées, on donne un exemple numérique pour lequel la solution analytique est connue.

2. EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

a. Cas d'une variable

On se propose d'obtenir une approximation au second ordre de l'équation(1) par la méthode des différences finies [1].

Pour cela, on discrétisera les intervalles de variation de x et t , en n et p parties égales de longueurs respectives:

$$\Delta x = \frac{a}{n} \quad \Delta t = \frac{T}{p}$$

On cherche donc à approcher d'une façon générale, la solution du problème, en un point d'abscisse $X = i \Delta x$ ($1 \leq i \leq n$) à un instant $t_0 = j \Delta t$ ($1 \leq j \leq n$)

$$t_0 + i \Delta t \quad t_0 + i \Delta t \quad t_0 + i \Delta t$$

U_2, U_0, U_1 sont les valeurs de la fonction aux points $X - \Delta x, X, X + \Delta x$ aux instants $t_0 + i \Delta t, i = -1, 0, +1$ (figure 1)

On développe la fonction $U(x,t)$, solution de (1) en série de Taylor, jusqu'à l'ordre 6, autour du point (X, t_0) .

Toutes les dérivées seront considérées comme prises au point central o , à l'instant t_0 . Pour ne pas alourdir davantage les expressions intermédiaires, on n'a pas écrit dans celles-ci, les termes d'ordre supérieur à 2.

Les expressions (3), (4) et (5) donnent respectivement les approximations de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (X, t)$ aux instants $t_0 - \Delta t$, t_0 , $t_0 + \Delta t$, et (6) celle de

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} (X, t)$$

$$(3) \quad \frac{U_1^{t_0-\Delta t} + U_2^{t_0-\Delta t} - 2 U_0^{t_0-\Delta t}}{\Delta x^2} = U_{x^2} - \Delta t U_{x^2 t} + \left(\frac{\Delta x^2}{12} + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \right) U_{x^4} + 0(\Delta t \Delta x^2 + \Delta t^3).$$

$$(4) \quad \frac{U_1^{t_0} + U_2^{t_0} - 2 U_0^{t_0}}{\Delta x^2} = U_{x^2} + \frac{\Delta x^2}{12} U_{x^4} + 0(\Delta x^4)$$

$$(5) \quad \frac{U_1^{t_0+\Delta t} + U_2^{t_0+\Delta t} - 2 U_0^{t_0+\Delta t}}{\Delta x^2} = U_{x^2} + \Delta t U_{x^2 t} + \left(\frac{\Delta x^2}{12} + a^2 \frac{\Delta t^2}{2} \right) U_{x^4} + 0(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta t^3)$$

$$(6) \frac{U_o^{t_o+\Delta t} + U_o^{t_o-\Delta t} - 2U_o^{t_o}}{a^2 \Delta t^2} = \frac{U_{x^2}}{a^2} + \frac{\Delta t^2}{12a^2} U_{t^4} = U_{x^2} + \frac{a^2 \Delta t^2}{12} U_{x^4} + o(\Delta t^4)$$

On identifie (6) à une combinaison lineaire de (3), (4), et (5) dépendant de deux paramètres θ_1 et θ_2 ; on obtient ainsi:

$$(7) \frac{\theta_1}{\Delta x^2} \left[U_1^{t_o-\Delta t} + U_2^{t_o-\Delta t} - 2 U_o^{t_o-\Delta t} \right] + \frac{\theta_2}{\Delta x^2} \left[U_1^{t_o+\Delta t} + U_2^{t_o+\Delta t} - 2 U_o^{t_o+\Delta t} \right] +$$

$$+ \frac{(1-\theta_1-\theta_2)}{\Delta x^2} \left[U_1^{t_o} + U_2^{t_o} - 2 U_o^{t_o} \right] - \frac{1}{a^2 \Delta t^2} \left[U_o^{t_o+\Delta t} + U_o^{t_o-\Delta t} - 2 U_o^{t_o} \right] =$$

$= \varepsilon_1(\Delta t, \Delta x)$ où $\varepsilon_1(\Delta t, \Delta x)$ est un polynome en $\Delta t, \Delta x$ donné par:

$$(8) \varepsilon_1(\Delta t, \Delta x) = (\theta_2 - \theta_1) \Delta t U_{x^2 t} + \left(\frac{\Delta x^2}{12} + a^2 \frac{\Delta t^2}{2} (\theta_1 + \theta_2) - a^2 \frac{\Delta t^2}{12} \right) U_{x^4} +$$

$$+ (\theta_2 - \theta_1) \left[\frac{\Delta t \Delta x^2}{12} + \frac{\Delta t^3 a^2}{6} \right] U_{x^4 t} + \left[\frac{\Delta x^4}{360} + \frac{\Delta x^2 \Delta t^2 a^2}{24} (\theta_1 + \theta_2) +$$

$$+ \frac{a^4 \Delta t^4}{24} (\theta_1 + \theta_2) - \frac{a^4 \Delta t^4}{360} \right] U_{x^6}$$

en passant aux valeurs approchées, on peut écrire la formule aux différences
(9) déduite de (7).

$$(9) v_0^{t_0+\Delta t} (1 + 2\lambda \theta_2) = \lambda \theta_1 (v_1^{t_0-\Delta t} + v_2^{t_0-\Delta t}) + \lambda \theta_2 (v_1^{t_0+\Delta t} + v_2^{t_0+\Delta t}) + \lambda (1 - \theta_1 - \theta_2)$$

$$(v_1^{t_0} + v_2^{t_0}) - (1 + 2\lambda \theta_1) v_0^{t_0-\Delta t} + 2 |1 - \lambda(1 - \theta_1 - \theta_2)| v_0^{t_0}$$

Pour calculer le premier niveau de temps : $t_0 = 0$, la formule (9) ne peut être appliquée, on écrit donc une formule permettant de le calculer, pour cela il faut remplacer (6) par le développement de la dérivée première par rapport au temps, qui est connue à l'instant initial. On remplace donc (3) par:

$$(10) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(U_{2t}^{t_0} + U_{1t}^{t_0} - 2U_{0t}^{t_0} \right) = \Delta t U_{x^2 t} + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t U_{x^4 t} + O(\Delta x^5)$$

et (6) par:

$$(11) \frac{2U_0^{t_0+\Delta t} - 2U_0^{t_0} - 2\Delta t U_{0t}^{t_0}}{a^2 \Delta t^2} = \frac{1}{a^2} U_{t^2} + \frac{\Delta t}{3a^2} U_{t^3} + \frac{\Delta t^2}{12a^2} U_{t^4} + \frac{\Delta t^3}{60a^2} U_{t^5} + \frac{\Delta t^4}{360a^2}$$

$$U_{t^6} + O(\Delta t^5)$$

On effectue alors une combinaison linéaire de (4), (5), (10), (11) avec des coefficients σ_1 et σ_2 .

$$(12) \frac{\sigma_1}{\Delta x^2} \left(U_2^{t_0+\Delta t} + U_1^{t_0+\Delta t} - 2U_0^{t_0+\Delta t} \right) + \frac{(1-\sigma_1)}{\Delta x^2} \left(U_2^{t_0} + U_1^{t_0} - 2U_0^{t_0} \right) + \frac{\Delta t \sigma_2}{\Delta x^2} \left(U_2^{t_0} + U_1^{t_0} - 2U_0^{t_0} \right) - \frac{1}{a^2 \Delta t^2} \left[2U_0^{t_0+\Delta t} - 2U_0^{t_0} - 2\Delta t U_{0t}^{t_0} \right] = \varepsilon_1'(\Delta t, \Delta x) \text{ avec } \varepsilon_1'(\Delta t, \Delta x)$$

donné par

$$(13) \varepsilon_1'(\Delta t, \Delta x) = U_{x,t} \Delta t (\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{3}) + \frac{U_{x^4}}{12} \left[\Delta x^2 + a^2 \Delta t^2 (6 \sigma_1 - 1) \right] + \frac{U_{x^4 t}}{60} \left[10 a^2 \Delta t^3 \sigma_1 - a^2 \Delta t^3 + 5 \Delta x^2 \Delta t (\sigma_1 + \sigma_2) \right] + U_{x^6} \left[\Delta x^4 + 15 a^2 \Delta x^2 \Delta t^2 \sigma_1 + 15 a^4 \Delta t^4 \sigma_1 - a^4 \Delta t^4 \right]$$

ce qui conduit à la formule aux différences finies pour calculer le premier niveau:

$$(14) 2(1 + \lambda \sigma_1) V_0^{t_0+\Delta t} = \lambda \sigma_2 (V_1^{t_0+\Delta t} + V_2^{t_0+\Delta t}) + (1 - \sigma_1) \lambda (V_1^{t_0} + V_2^{t_0}) + 2 \left[\lambda (\sigma_1 - 1) + 1 \right] V_0^{t_0} + \lambda \sigma_2 \Delta t \left[V_{1t}^{t_0} + V_{2t}^{t_0} \right] + 2 \Delta t (1 - \lambda \sigma_1) V_{0t}^{t_0}$$

b. Cas de Deux et trois variables d'espace

Pour obtenir les polynômes d'approximation sous une forme simple, on a pu regrouper donc le cas d'une variable, les dérivées vées d'ordre supérieur, car on a:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots \quad \text{ce qui permettra l'obtention d'approximations d'ordre supérieur à 2.}$$

Dans le cas de 2 et 3 variables, si on approche le Laplacien au second ordre, les polynômes $\varepsilon(\Delta t, \Delta x)$ ne pourront s'écrire simplement, car on aura:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \neq \Delta^2 U = \frac{\partial^4 U}{\partial t^4}$$
 d'où peu de possibilités d'approxima -

tions d'ordre supérieur: c'est pourquoi on a été conduit à approcher à chaque niveau de temps, le Laplacien au quatrième ordre [3].

On a pour cela défini dans le domaine de propagation P un réseau à mailles cubiques - canées dans le plan - de pas Δx , et on a divisé l'intervalle $|0, T|$ en p parties égales. A chaque niveau de temps, on aura besoin de 8 ou 18 points selon que l'on est à 2 ou 3 variables (Figure 2).

Fig. 2

On va développer les calculs, dans le cas de 3 variables.

L'approximation au quatrième ordre du Laplacien à 3 variables s'écrit:

$$15) \quad 2 \sum_{i=1}^6 U_i + \sum_{i=7}^{18} U_i - 24U_0 = 6 \Delta x^2 [\bar{\Delta U}]_0^{t_0} + \frac{\Delta x^2}{12} [\Delta^2 \bar{U}]_0^{t_0}$$

ceci est l'approximation à chaque niveau de temps: à t_0 fixé pour les niveaux $t_0 + \Delta t$, $t_0 - \Delta t$, t_0 on a 3 équations du type (15), on développe donc maintenant les dérivées d'espace aux instants $t_0 + \Delta t$ et $t_0 - \Delta t$ par rapport à t , autour de t_0 :

$$(U_{x^2})_0^{t_0+\Delta t} = (U_{x^2})_0^{t_0} + k(U_{x^2t})_0^{t_0} + \frac{k^2}{2} (U_{x^2t^2})_0^{t_0} + 0(\Delta t^3)$$

et de même pour $(U_{xy})_0^{t_0+\Delta t}$ et $(U_{y^2})_0^{t_0+\Delta t}$

$$(U_{x^2})_0^{t_0-\Delta t} = (U_{x^2})_0^{t_0} - k(U_{x^2t})_0^{t_0} + \frac{k^2}{2} (U_{x^2t^2})_0^{t_0} + 0(\Delta t^3)$$

et de même pour $(U_{xy})_0^{t_0-\Delta t}$ et $(U_{y^2})_0^{t_0-\Delta t}$

On obtient alors les développements approchant le Laplacien aux 3 niveaux de temps autour du point (x, y, z, t_0)

$$(16) \quad \frac{1}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0+\Delta t} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0+\Delta t} - 24U_0^{t_0+\Delta t} \right] = |\Delta U|_0^{t_0} + \Delta t \left[U_{x^2t} + U_{y^2t} + U_{z^2t} \right]_0^{t_0} \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[U_{x^2t^2} + U_{y^2t^2} + U_{z^2t^2} \right]_0^{t_0} + \frac{\Delta x^2}{12} [\Delta^2 \bar{U}]_0^{t_0} + 0(\Delta t^3 + \Delta x^4)$$

$$(17) \frac{1}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0} - 24 U_0^{t_0} \right] = \left[U_{x^2} + U_{y^2} + U_{z^2} \right]_0^{t_0} + \frac{\Delta x^2}{12} (\Delta^2 U)_0^{t_0} + 0(\Delta x^4)$$

$$(18) \frac{1}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0 - \Delta t} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0 - \Delta t} - 24 U_0^{t_0 - \Delta t} \right] = [\Delta U]_0^{t_0} - \Delta t \left[U_{x^2} + U_{y^2} + U_{z^2} \right]_0^{t_0}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \left(U_{x^2} + U_{y^2} + U_{z^2} \right)_0^{t_0} + \frac{\Delta x^2}{12} [\Delta^2 U]_0^{t_0} + 0(\Delta t^3 + \Delta x^4).$$

On ajoute l'expression de la dérivée seconde de U par rapport à t :

$$(19) \frac{1}{\Delta t^2 a^2} \left[U_0^{t_0 + \Delta t} + U_0^{t_0 - \Delta t} - 2U_0^{t_0} \right] = \frac{1}{a^2} U_{t^2} + \frac{\Delta t^2}{12a^2} U_{t^4} + 0(\Delta t^4)$$

On effectue une combinaison linéaire de (16), (17), (18) avec les coefficients $\theta_1(1-\theta_1-\theta_2)\theta_2$ et on identifie à (19), U étant solution de l'équation (1):

$$(20) \frac{\theta_1}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0 + \Delta t} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0 + \Delta t} - 24 U_0^{t_0 + \Delta t} \right] + \frac{(1-\theta_1-\theta_2)}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0} - 24 U_0^{t_0} \right] + \frac{\theta_2}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0 - \Delta t} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0 - \Delta t} - 24 U_0^{t_0 - \Delta t} \right] - \frac{1}{\Delta t^2 a^2} \left[U_0^{t_0 + \Delta t} + U_0^{t_0 - \Delta t} - 2U_0^{t_0} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[U_o^{t-\Delta t} - 2U_o^t \right] = \varepsilon_3(\Delta t, \Delta x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3(\Delta t, \Delta x) = \Delta t(\theta_1 - \theta_2) \left[\frac{\partial}{\partial t}(\Delta U) \right]_o^t + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta t^2(\theta_1 + \theta_2) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta U \right]_o^t + \Delta x^2 \left[\Delta^2 U \right]_o^t - \frac{\Delta t^2}{a^2} \left| U_t^4 \right|_o^t + \\
 & \frac{1}{6} \Delta t^3(\theta_1 - \theta_2) \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3}(\Delta u) \right]_o^t + \Delta x^2 \Delta t(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta^2 u \right]_o^t + \frac{1}{360} \left[\Delta x^4 \left(U_{x^6} + 5U_{x^4 y^2} + 5U_{x^2 y^4} \right. \right. \\
 & \left. \left. + U_{z^6} + 5U_{x^2 z^4} + 5U_{y^2 z^4} + U_{y^6} + 5U_{x^4 z^2} + 5U_{y^2 z^2} \right) + 15 \Delta x^2 \Delta t^2(\theta_1 + \theta_2) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta^2 u) \right]_o^t + \\
 & + 15 \Delta t^4(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \Delta u \right)_o^t - \frac{1}{a^2} \Delta t^4 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial t^6} \right)_o^t
 \end{aligned}$$

En passant aux valeurs approchées, on obtient la formule aux différences finies suivantes:

$$\begin{aligned}
 (22) \quad (6 + 24 \lambda \theta_1) v_o^{t+\Delta t} & = \lambda \theta_1 \left[2 \sum_{i=1}^6 v_i^{t+\Delta t} + \sum_{i=7}^{18} v_i^{t+\Delta t} \right] + \lambda \theta_2 \left[2 \sum_{i=1}^6 v_i^{t-\Delta t} + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=7}^{18} v_i^{t-\Delta t} \right] - (6+24 \lambda \theta_2) v_o^{t-\Delta t} + \lambda (1-\theta_1-\theta_2) \left[2 \sum_{i=1}^6 v_i^t + \sum_{i=7}^{18} v_i^t \right] \\
 & + \left[12 - 24\lambda (1-\theta_1-\theta_2) \right] v_o^t
 \end{aligned}$$

Comme on a procédé dans le cas d'une variable, pour calculer le premier niveau de temps, il faut remplacer (18) et (19) par (23) et (24).

$$(23) \quad \frac{\Delta t}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0} - 24U_o^{t_0} \right] = \Delta t \left[U_{x^2 t} + U_{y^2 t} + U_{z^2 t} \right]^{t_0} + \frac{\Delta t \Delta x^2}{12} \left[U_{x^4 t} + U_{y^4 t} + U_{z^4 t} \right]^{t_0} + 0 (\Delta t, \Delta x^4)$$

$$(24) \quad 2U_o^{t_0+\Delta t} - 2U_o^{t_0} - 2\Delta t U_o^{t_0} = \frac{1}{a^2} \left[U_{t^2} \right]_o^{t_0} + \frac{\Delta t}{3a^2} \left[U_{t^3} \right]_o^{t_0} + \frac{\Delta t^2}{12a^2} \left[U_{t^4} \right]_o^{t_0} + 0(\Delta t^3)$$

On combine donc (16), (17), (23), (24), il vient:

$$(25) \quad \frac{\sigma_1}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0+\Delta t} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0+\Delta t} - 24U_o^{t_0+\Delta t} \right] + \frac{(1-\sigma_1)}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0} - 24U_o^{t_0} \right] + \frac{\sigma_2 \Delta t}{6\Delta x^2} \left[2 \sum_{i=1}^6 U_i^{t_0} + \sum_{i=7}^{18} U_i^{t_0} - 24U_o^{t_0} \right] - \frac{2}{\Delta t^2 a^2} \left[U_o^{t_0+\Delta t} - U_o^{t_0} - \Delta t U_o^{t_0} \right] = \varepsilon'_3 (\Delta t, \Delta x)$$

avec

$$(26) \quad \varepsilon'(\Delta t, \Delta x) = \left[\frac{U_{x^2} + U_{y^2} + U_{z^2}}{3} \right]_o^{t_o} [\Delta t(\sigma_1 + \sigma_2 - 1/3)] + \left[\frac{(\Delta^2 u)}{24} \right]_o^{t_o} [2 \Delta x^2 + 12 a^2 \Delta t^2 \sigma_1 - 2 a^2 \Delta t^2] + O(\Delta t^3 + \Delta x^4).$$

D'où l'équation aux différences finies pour calculer le premier niveau de temps

$$(27) \quad \begin{aligned} V_o^{t_o+\Delta t} (12 + 24 \lambda \sigma_1) &= \lambda \sigma_1 \left(2 \sum_{i=1}^6 V_i^{t_o+\Delta t} + \sum_{i=7}^{18} V_i^{t_o+\Delta t} \right) + \lambda(1-\sigma_1) \left(2 \sum_{i=1}^6 V_i^{t_o} + \sum_{i=7}^{18} V_i^{t_o} \right) \\ &+ \left[12 - 24 \lambda(1-\sigma_1) \right] V_o^{t_o} + \Delta t \lambda \sigma_2 \left(2 \sum_{i=1}^6 V_{it}^{t_o} + \sum_{i=7}^{18} V_{it}^{t_o} \right) + \\ &\Delta t \left(12 - 24 \lambda \sigma_2 \right) V_{ot}^{t_o} \end{aligned}$$

Dans le cas de deux variables d'espace, tout ceci est encore valable, l'approximation du Laplacien utilisée s'écrit alors, à un instant t_o :

$$(28) \quad 4 \sum_{i=1}^4 U_i^{t_o} + \sum_{i=5}^8 U_i^{t_o} - 20 U_o^{t_o} = 6 \Delta x^2 \left[\frac{U_{x^2} + U_{y^2}}{2} \right]_o^{t_o} + \frac{\Delta x^4}{2} [\Delta^2 U]_o^{t_o} + O(\Delta x^6)$$

On aboutit alors à l'équation aux différences finies générale:

$$(29) \quad \begin{aligned} (6 + 20 \lambda \theta_1) V_o^{t_o+\Delta t} &= \lambda \theta_1 \left(4 \sum_{i=1}^4 V_i^{t_o+\Delta t} + \sum_{i=5}^8 V_i^{t_o+\Delta t} \right) + \lambda \theta_2 \left(4 \sum_{i=1}^4 V_i^{t_o-\Delta t} + \sum_{i=5}^8 V_i^{t_o-\Delta t} \right) \\ &- (6 + 20 \lambda \theta_2) V_o^{t_o-\Delta t} + \lambda(1-\theta_1-\theta_2) \left(2 \sum_{i=1}^6 V_i^{t_o} + \sum_{i=5}^8 V_i^{t_o} \right) + [12 - 20 \lambda(1-\theta_1-\theta_2)] V_o^{t_o} \end{aligned}$$

et pour le premier niveau:

$$(30) \quad v_o^{t_o+\Delta t} (12 + 20\lambda\sigma_1) = \lambda\sigma_1 \left[4 \sum_{i=1}^4 v_i^{t_o+\Delta t} + \sum_{i=5}^8 v_i^{t_o+\Delta t} \right] + \lambda(1-\sigma_1) \left[4 \sum_{i=1}^4 v_i^{t_o} + \sum_{i=5}^8 v_i^{t_o} \right]$$

$$+ [12-20\lambda(1-\sigma_1)] v_o^{t_o} + \Delta t \lambda\sigma_2 \left[4 \sum_{i=1}^4 v_i^{t_o} + \sum_{i=5}^8 v_i^{t_o} \right] + \Delta t [12-20\lambda\sigma_2] v_o^{t_o}$$

Les expressions de ϵ_2 et ϵ_2' polynomes d'approximation correspondants sont exactement les mêmes que ϵ_3 et ϵ_3' .

3. ORDRE DE L'APPROXIMATION

a. Formules générales.

Suivant les différentes valeurs de θ_1 et θ_2 , on va étudier les variations de $\xi(\Delta t, \Delta x)$ et de la forme des équations aux différences finies.

Considérons le cas le plus général où $\theta_1 \neq \theta_2$, les résultats sont consignés dans le tableau I, en précisant quelle forme prend l'équation aux différences (Figure 3) dans le cas du problème à une dimension.

	θ_1	θ_2	Ordre de l'approximation	Type de l'équation aux différences
a	>0	0	$0 \mid \Delta t + \Delta x^2 \mid$	Explicite à 7 points
b	1	0	$0 \mid \Delta t + \Delta x^2 \mid$	Explicite à 5 points
c	0	>0	$0 \mid \Delta t + \Delta x^2 \mid$	Implicite à 7 points
d	0	1	$0 \mid \Delta t + \Delta x^2 \mid$	Implicite à 5 points
e	$\theta_1 + \theta_2 = \theta = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)$		$0 \mid \Delta t + \Delta x^4 \mid$	Implicite à 9 points

TABLEAU I

Remarquons que a) et c) sont des approximations du type e) pour $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

Pour les cas d'une variable d'espace, les schémas mnémotechniques correspondant à ces diverses approximations sont les suivants:

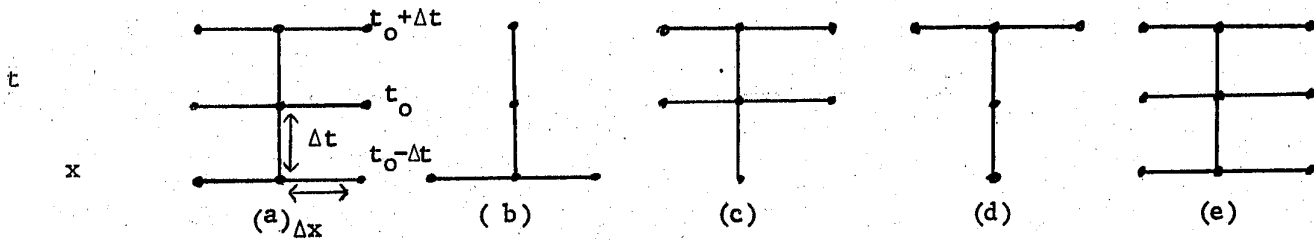


Figure 3

les coefficients des dérivées étant les mêmes dans $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ jusqu'à l'ordre 4, tout ceci est vrai à 2 et 3 dimensions, les schémas de calcul étant alors représentés par des plans ou des cubes au lieu de lignes, comme sur la Figure 3.

Les expressions obtenues pour les polynômes, $\epsilon(\Delta t, \Delta x)$ sont beaucoup plus simples pour $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, on écrit alors

$$(31) \quad \epsilon(\Delta t, \Delta x) = \left[\frac{\Delta x^2}{12} + \Delta t^2 a^2 \theta - \frac{\Delta t^2 a^2}{12} \right] \Delta^2 U + \left(\frac{\Delta x^2}{12} \Delta t^2 a^2 + a^4 \frac{\Delta t^4}{12} \right) \theta - \left. - a^4 \frac{\Delta t^4}{360} \right\} (\Delta^3 u)_o + \frac{\Delta x^4}{360} \left[\Delta^3 u + 2 \partial_{xy}^4 [\Delta u] + 2 \partial_{xz}^4 [\Delta u] + 2 \partial_{yz}^4 [\Delta u] \right]$$

On dresse alors un tableau des approximations obtenues pour les valeurs intéressantes de θ (n'étant valable que pour une variable)

	θ	Ordre de l'approximation	Type de l'équation aux différences
a	0	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	Explicite à 5 points (Forsythe)
b	1/2	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	Implicite à 9 points (O'brien)
c	1/12	$O(\Delta t^4 + \Delta x^2)$	Implicite à 9 points
d	-1/12 λ	$O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$	Implicite à 9 points
e	1/4	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	Implicite à 9 points (Ritchmyer)
f	$\frac{1}{12}(1 - \frac{1}{\lambda})$	$O(\Delta t^4 + \Delta x^4)$	Implicite à 9 points
g	$\theta_{opt} = 0$ $\lambda = 1$	$O(\Delta t^6 + \Delta x^6)$ 1 var. $O(\Delta t^6 + \Delta x^4)$ 2 et 3 var.	Explicite à 5 points

TABLEAU II

Les schémas mnémotechniques correspondants, pour le cas d'une variable d'espace sont donnés par la Figure 4.

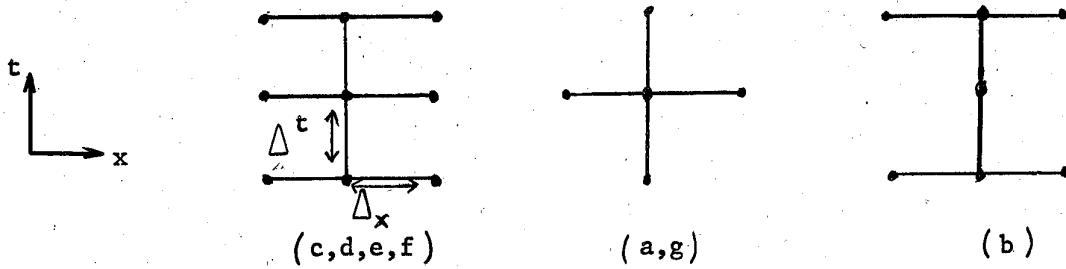


Figure 4

Pour $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, les formules aux différences finies (9), (22), (29) vont s'écrire

$$(32) \quad V_o^{t_o+\Delta t} (1 + 2\lambda\theta) = \lambda\theta \left[V_1^{t_o-\Delta t} + V_2^{t_o-\Delta t} + V_1^{t_o+\Delta t} + V_2^{t_o+\Delta t} \right] + \lambda(1-2\theta) \left[V_1^{t_o} + V_2^{t_o} \right] - (1 + 2\lambda\theta) V_o^{t_o-\Delta t} + 2 [1 - \lambda(1-2\theta)] V_o^{t_o}$$

$$(33) \quad (6 + 24\lambda\theta) V_o^{t_o+\Delta t} = \lambda\theta \left[2 \sum_{i=1}^6 (V_i^{t_o+\Delta t} + V_i^{t_o-\Delta t}) + \sum_{i=7}^{18} (V_i^{t_o+\Delta t} + V_i^{t_o-\Delta t}) \right] - [6+24\lambda\theta] V_o^{t_o-\Delta t} + \lambda(1-2\theta) \left[2 \sum_{i=1}^6 V_i^{t_o} + \sum_{i=7}^{18} V_i^{t_o} \right] + [12 - 24\lambda(1-2\theta)] V_o^{t_o}$$

$$(34) \quad (6 + 20\lambda\theta) V_o^{t_o+\Delta t} = \lambda\theta \left[4 \sum_{i=1}^4 (V_i^{t_o+\Delta t} + V_i^{t_o-\Delta t}) + \sum_{i=5}^8 (V_i^{t_o+\Delta t} + V_i^{t_o-\Delta t}) \right] - [6 + 24\lambda\theta] V_o^{t_o-\Delta t} + \lambda(1-2\theta) \left[4 \sum_{i=1}^4 V_i^{t_o} + \sum_{i=5}^8 V_i^{t_o} \right] + [12-20\lambda(1-2\theta)] V_o^{t_o}$$

b- Premier Niveau de Temps

On peut faire une étude analogue avec $\epsilon'(\Delta t, \Delta x)$ pour les formules permettant de calculer le premier niveau de temps, on obtient le Tableau III donnant les principales approximations pour le calcul du premier niveau en fonction de σ_1 et σ_2 .

	σ_1	σ_2	Ordre de l'approximation	Type d'equation aux différences
(a)	> 0	> 0	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	Implicite à 6 points
(b)	> 0 et $\sigma_1 + \sigma_2 = 1/3$	> 0	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	-----
(c)	$\frac{1}{6} - \frac{1}{6\lambda}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6\lambda}$	$O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$	-----
(d)	0	0	$O(\Delta t + \Delta x^2)$	Explicite à 4 points
(e)	0	1/3	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$	-----

TABLEAU III

Si $\lambda = 1$, l'approximation (e) devient alors en $O(\Delta t^3 + \Delta x^6)$ et la Figure 5 donne les schémas mnémotechniques dans le cas de une variable.

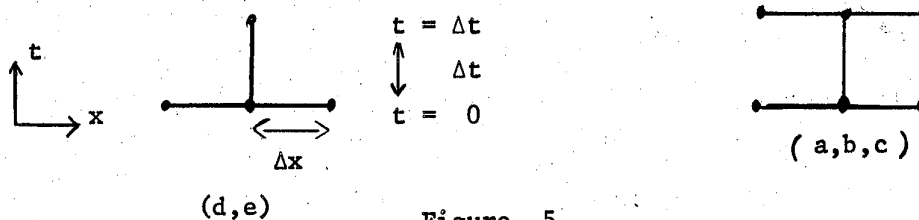


Figure 5

$$(37) \quad C = \begin{vmatrix} 2[1-\lambda(1-2\theta)] & & \lambda(1-2\theta) \\ \lambda(1-2\theta) & 2|1-\lambda(1-2\theta)| & \lambda(1-2\theta) \\ & \lambda(1-2\theta) & 2[1-\lambda(1-2\theta)] \end{vmatrix}$$

avec $K_2 = -D V_0 + CV_1 + b_2$

$$K_3 = -DV_1 + b_3$$

⋮

$$K_i = b_i \quad i = \overline{4,p}$$

b_i étant un vecteur donné par les conditions aux limites. On voit à partir de (14) que le système linéaire auquel on est arrivé est réductible, c'est-à-dire qu'on peut calculer le groupe de points appartenant au deuxième niveau de temps à partir des 2 premiers supposés connus, et recommencer l'opération jusqu'à la dernière ligne p. Pour chaque groupe de points on est ramené à un système linéaire de la forme:

$$(38) \quad DV_i = CV_{i-1} - DV_{i-2} + b_i \quad i = \overline{2,p}$$

Dans le cas de problèmes à deux et trois variables d'espace, le vecteur V_i est constitué par tous les points d'un rectangle ou d'un parallépipède d'un instant $j \Delta t$.

les matrices D et C s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} D &= 6I + \lambda \theta A \\ C &= 12I - \lambda(1-2\theta) A \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} I \text{ matrice unité} \\ A \text{ matrice d'iteration obtenue} \end{array}$$

dans l'approximation du Laplacien au quatrième ordre.

5. STABILITE DE LA SOLUTION NUMERIQUE

Dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles de type parabolique ou hyperbolique deux problèmes se posent quand la maille par rapport au temps varie:

- a la convergence de la solution numérique
- b la stabilité du processus numérique

c'est à dire la propagation des erreurs (usuellement d'arrondi) commises pendant le déroulement du calcul.

En réalité, ces deux problèmes sont étroitement liés puisqu'on peut montrer [2] qu'une condition suffisante pour que la solution soit convergente est qu'elle soit stable. Donc, la stabilité du processus numérique étant établie, la convergence est automatiquement acquise. Pour cela, on considère le système linéaire (2.36)

$$D V_{n+1} = C V_n - D V_{n-1} + b_{n+1} \quad (n > 1)$$

où les matrices D et C sont données par (36) et (37) respectivement. D'après les

expressions de D et C, on voit aisément que les matrices D et C ont une base com mune de vecteurs propres, ce qui permet l'application du critère de stabilité de Von Neumann énoncé ci-dessous:

Si les racines ρ de l'équation:

$$(39) \quad \lambda_D^{(i)} \rho^2 - \lambda_C^{(i)} \rho + \lambda_D^{(i)} = 0 \quad i = \overline{1, N}$$

vérifient la condition:

$$(40) \quad |\rho| < 1$$

les équations aux différences finies (32), (34), (33), conduisent à une solu - tion numérique stable et par conséquent convergente. Dans l'expression (39), $\lambda_D^{(i)}$ et $\lambda_C^{(i)}$ sont les valeurs propres des matrices D et C, qui corres -

pondent à un même vecteur propre commun aux deux matrices.

A partir de l'équation (39) et des valeurs propres des matrices D et C, on obti ent alors les conditions de stabilité pour une, deux et trois variables, soit / respectivement:

$$(41) \quad \lambda(1-4\theta) K \leq 1$$

$$(42) \quad \lambda(1-4\theta) K \leq 24$$

$$(43) \quad \lambda(1-4\theta) K \leq 24$$

avec dans chaque cas:

$$K = \sin^2 \frac{i\pi}{2(N+1)} \leq 1 \quad i = \overline{1, N}$$

$$K = 20 - 8 \left(\cos p \frac{\pi}{m} + \cos q \frac{\pi}{n} \right) - 4 \cos p \frac{\pi}{m} \cos q \frac{\pi}{n} \leq 32 \quad p = \overline{1,m}, \quad q = \overline{1,n}$$

$$K = 24 - 4 \left(\cos p \frac{\pi}{\ell} + \cos q \frac{\pi}{m} + \cos r \frac{\pi}{n} + \cos p \frac{\pi}{e} \cos q \frac{\pi}{m} + \cos p \frac{\pi}{\ell} \cos r \frac{\pi}{n} + \cos q \frac{\pi}{m} \right.$$

$$\left. \cos r \frac{\pi}{n} \right) \leq 32$$

$$p = \overline{1,\ell}$$

$$q = \overline{1,m}$$

$$r = \overline{1,n}$$

Pour les trois cas traités, si:

$$\theta \geq \frac{1}{4}$$

la solution sera toujours stable quelque soit λ choisi. Pour $\theta < \frac{1}{4}$, la solution numérique sera stable si λ satisfait les conditions respectives:

$$(44) \quad \lambda \leq \frac{1}{1-4\theta}$$

$$(45) \quad \lambda \leq \frac{3}{4(1-4\theta)}$$

$$(46) \quad \lambda \leq \frac{2}{4(1-4\theta)}$$

On peut donc dresser un tableau des valeurs intéressantes du paramètre θ avec les conditions de stabilité.

θ	Loi d'erreur	Conditions de stabilité			Observations
		1 variable	2 variables	3 variables	
0	$O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$	$\lambda \leq 1$	$\lambda \leq 3/4$	$\lambda \leq 3/4$	Methode explicite
1/4	$O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$	$\forall \lambda$	$\forall \lambda$	$\forall \lambda$	Methode implicite
1/2	$O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$	$\forall \lambda$	$\forall \lambda$	$\forall \lambda$	Methode implicite
$-1/12\lambda$	$O(\Delta x^4 + \Delta t^2)$	$\lambda \leq 2/3$	$\lambda \leq 5/12$	$\lambda \leq 5/12$	Methode implicite
1/12	$O(\Delta x^2 + \Delta t^4)$	$\lambda \leq 3/2$	$\lambda \leq 9/8$	$\lambda \leq 9/8$	Methode implicite
$\frac{1}{12} (1 - \frac{1}{\lambda})$	$O(\Delta x^4 + \Delta t^4)$	$\lambda \leq 1$	$\lambda \leq 5/8$	$\lambda \leq 5/8$	Methode implicite

TABLEAU IV

RESOLUTION NUMERIQUE

Soit le système linéaire auquel on arrive en discretisant l'équation (1) qu'on peut mettre sous la forme

$$D V_{n+1} = F_{n+1} \quad n \geq 0 \quad (47)$$

où

$$F_{n+1} = C V_n - D V_{n-1} + b_{n+1}$$

les matrices D et C sont données dans la partie 3.

a. Problème à 1 variable d'espace

Dans ce cas, la matrice D de (47) est tridiagonale et à diagonale dominante, on peut donc résoudre le système linéaire (47) par la méthode de réduction de Gauss. Cet algorithme équivaut à triangulariser la matrice D. Comme la matrice D est une matrice de Stieltjes, l'algorithme de calcul est stable par rapport aux erreurs d'arrondi [4].

b. Problème à 2 et 3 variables d'espace.

Dans ce problème on utilisera la méthode itérative de relaxation, et pour des valeurs appropriées de la maille on pourra employer la surrelaxation. Dans le cas de 2 variables d'espace, l'équation (33) aux différences finies peut être écrite sous la forme:

où

$$C V_0 = 4 \sum_{i=1}^4 V_i + \sum_{i=5}^8 V_i + C_0$$

$$C = \frac{6+2C\lambda\theta}{\lambda\theta}, \quad \lambda = a^2 \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \right]^2$$

et C_0 est une combinaison linéaire des valeurs obtenues aux deux niveaux de temps antécédents.

L'équation aux valeurs propres pour la méthode de surrelaxation est donnée par

$$C V_0 = \epsilon \{4(V_3+V_4) + V_7+V_8\} + \{4(V_1+V_2) + V_5+V_6\} \quad (48)$$

$$\text{avec } \epsilon = \frac{w-1}{w} \quad (49)$$

On développe la fonction V en série de Taylor jusqu'en h^2 autour du point 0 et on porte dans l'expression (48):

$$\frac{3h^2}{2} (\epsilon + 1) \Delta V = h(\epsilon - 1) \{2 V_{x_0} + V_{y_0}\} + \left\{ \frac{C}{2} \epsilon - 5 \epsilon - 5 \right\} V_0 \quad (50)$$

On cherche des solutions de (50) du type:

$$V(x,y) = X(x,y) \exp \left(\frac{\sigma x + T y}{2h} \right) \quad (51)$$

où

$$X(x,y) = \sin \left(p \frac{\pi x}{a} \right) \cdot \sin \left(\frac{q \pi y}{b} \right) \quad p = \overline{1, (m-1)} \quad \text{et} \quad q = \overline{1, (n-1)}$$

En portant (51) dans (50) il vient:

$$\begin{aligned} \frac{3h^2}{2} (\epsilon + 1) \left\{ \Delta X + \frac{\sigma}{h} X_x + \frac{T}{h} X_y + \frac{\sigma^2 + T^2}{4h^2} X \right\} &= h(\xi - 1) (2X_x + 3X_y + \left(\frac{\sigma}{h} + \frac{3}{2} \frac{T}{h} \right) X) \\ + \left\{ \frac{C}{2} \epsilon - 5 \epsilon - 5 \right\} X & \end{aligned}$$

On choisit σ et T de manière à annuler les termes en X_x et X_y , ce qui donne:

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad T = 2 \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad \text{donc} \quad T = \frac{3}{2} \sigma \quad (52)$$

$$\text{d'où} \quad \xi = \frac{4 + 3\sigma}{4 - 3\sigma}$$

il reste alors

$$\frac{12h^2}{4-3\sigma} \left\{ \Delta X + \frac{13\sigma^2}{16h^2} X \right\} = \frac{39\sigma^2}{2(4-3\sigma)} X + \left\{ \frac{C}{2} \frac{6\sigma + W(4-3\sigma)}{4-3\sigma} - \frac{40}{4-3\sigma} \right\} X \quad (53)$$

d'où

$$12h^2 \Delta X = \left\{ \frac{39\sigma^2}{2} + \frac{C}{2W} (6\sigma + W(4-3\sigma)) - 40 - \frac{39W^2}{4} \right\} X \quad (54)$$

on a de plus $\Delta X = -\epsilon X$, ϵ : valeurs propres du Laplacien. et il vient

$$-12h^2 \epsilon = \frac{39\sigma^2}{2} + \frac{C}{2W} \{6\sigma + W(4-3\sigma)\} - 40 - \frac{39W^2}{4} \quad (55)$$

$$\frac{39\sigma^2}{4} + \left(\frac{3C}{W} - \frac{3C}{2} \right) \sigma + (12h^2 \epsilon + 2C - 40) = 0, \text{ équation qui a pour solu}$$

tions en σ

$$\sigma = \frac{1}{39} \left\{ -3C \left(\frac{2-W}{W} \right) \pm \sqrt{\left[3C \left(\frac{2-W}{W} \right) \right]^2 - 312(6h^2 \epsilon + C - 20)} \right\} \quad (56)$$

on choisit W de manière à annuler le radical:

$$W = \frac{6C}{\sqrt{312} \sqrt{6h^2 \epsilon + C - 20 + 3C}}$$

Pour calculer les valeurs propres de la matrice de Gauss-Seidel on procède de façon identique avec $\zeta = \xi = \eta$ dans (48). On obtient ainsi:

$$\eta = \frac{10}{C-10} - 3h^2 \epsilon \frac{C}{(10-C)^2} \quad (57)$$

On pourra ainsi obtenir une formule donnant W en fonction de η_M , rayon spectral de la matrice de Gauss-Seidel:

$$W = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{104}{3C^3} [C^2 - 200 - 2(10-C)^2 \eta_M]}} \quad (58)$$

Dans le cas de 3 variables, un calcul semblable à celui-ci nous conduirait aux résultats suivants:

$$\eta = \frac{12}{C-12} - 3 \frac{C}{(12-C)^2} \quad \text{où} \quad C = \frac{6+24\lambda \theta}{\lambda \theta}$$

$$W = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{112}{3C^3} [C^2 - 288 - 2(12-C)^2 \eta_M]}}$$

7. APPLICATION NUMERIQUE

On a choisi comme exemple d'application des méthodes déjà exposées, le problème [5] de la propagation au cours du temps des vibrations d'une membrane carrée dont les caractéristiques physiques sont données ci-après (en M.K.S.):

ℓ - longueur du côté = 0,2 m.

σ - densité de la membrane dont l'épaisseur est négligeable par rapport aux autres dimensions = 10kg/m².

t - tension à laquelle est soumise la membrane sur les côtés = 1000 Newton/m de longueur

On en déduit la vitesse caractéristique de l'onde dans le milieu considéré:

$$a = \sqrt{\frac{t}{\sigma}} = 10\text{m/s}$$

Ceci étant précisé, on traitera donc le problème à deux dimensions de l'espace suivant:

a Conditions aux limites: la membrane est fixée sur les bords, autrement dit $U(x,y,t) = 0$ pour (x,y) appartenant aux bords.

b Conditions initiales: l'aspect initial de la membrane sera

$$U(x,y,0) = 10xy (0.2-x) (0.2-y)$$

ce qui donne une déformation centrale d'amplitude 10^{-3} m, la vitesse initiale

$\frac{\partial}{\partial t} U(x,y,0)$ étant nulle.

On étudiera l'évolution du phénomène vibratoire dans le temps $t_0 = \frac{\ell\sqrt{2}}{a} \approx 3 \times 10^{-2}$

seconde ce qui correspond à la période du mode statique fondamental de vibration.

Dans ces conditions, la solution analytique $U(x,y,t)$ de l'équation (1) se présente comme la décomposition infinie sur les modes statiques:

$$(59) \quad U(x,y,t) = \frac{160 \ell^4}{\pi^6} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi x}{\ell} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{\ell}}{(2m+1)^3 (2n+1)^3} X$$

$$\cos \frac{\pi a t}{\ell} \sqrt{(2m+1)^2 + (2n+1)^2}.$$

La symétrie du domaine, des conditions aux limites et des conditions initiales par rapport au point

$$x = \frac{\ell}{2}, y = \frac{\ell}{2} \quad \text{a permis de limiter la résolution numérique}$$

au 1/8 du domaine carré considéré. Les calculs ont été effectués en double précision avec un test d'arrêt relatif de 10^{-14} sur l'IBM 7044.

Pour $\theta = \frac{1}{2}$, la formule aux différences finies donne un processus numérique toujours stable. Dans ce cas, on a employé la méthode de sur-relaxation, et ayant fixé la maille, on a fait varier le paramètre d'accélération W pour pouvoir vérifier que le paramètre W_{opt} calculé par (58) est bien optimal.

Les résultats sont présentés dans la figure 6.

On trouvera ensuite (tableaux V,VI,VII,VIII) les résultats obtenus pour différentes valeurs de θ , avec des commentaires relatifs à la stabilité et la convergence des méthodes considérées. La valeur observée est dans tous les cas celle du point $x = 0.04\text{m}$, $y = 0.02\text{ m}$ (coordonnées prises à partir du centre de la membrane)

$$\theta = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = 2.25$$

$$T = 0.9 \times 10^{-2}\text{s}$$

N	5	10	20	∞
P	10	20	40	∞
Valeur ($\times 10^{-3}$)	- 0.0251 166	- 0.312 884	- 0.339 246	- 0.346 487
Erreur ($\times 10^{-3}$)	- 0.095 331	0.033 613	0.007 251	X

TABLEAU V

$\theta = 0$

$\lambda = 0.5625$

$T = 1.5 \times 10^{-2} \text{ s}$

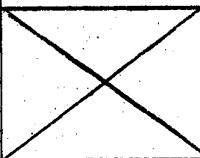
N	5	10	20	∞
P	20	40	80	∞
Valeur ($\times 10^{-3}$)	- 0.813 856	- 0.815 501	- 0.816 162	- 0.815 882
Erreur ($\times 10^{-3}$)	- 0.002 026	0.000 381	0.000 280	

TABLEAU VI

$\theta = 0$

$\lambda = 1$

$T = 0.6 \times 10^{-2} \text{ Seg}$

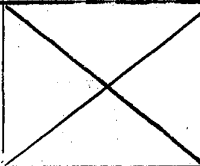
N	5	10	20	∞
P	15	30	60	∞
Valeur ($\times 10^{-3}$)	0.201 599	0.201 599	0.201 600	0.201 602
Erreur ($\times 10^{-3}$)	0.000 003	0.000 003	0.000 002	

TABLEAU VII

$$\theta = \frac{1}{12} \left[1 - \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$\lambda = 2.25$$

$$T = 0.6 \times 10^{-2}$$

N	5	10	20	∞
P	10	20	40	∞
Valeur ($\times 10^{-3}$)	0.199 908	0.201 944	0.201 998	0.201.602
Erreur ($\times 10^{-3}$)	0.001 694	0.000 342	0.000 396	X

TABLEAU VIII

On constate bien ici le grand avantage des méthodes utilisant $\theta = \frac{1}{12} \left[1 - \frac{1}{\lambda} \right]$ (Tableau VII et VIII) du point de vue de la précision, mais elles sont malheureusement limitées par leur instabilité. Par contre la méthode implicite pour $\theta = \frac{1}{2}$ qui est toujours stable est celle qui donne une précision / moindre. Il en est de même pour la méthode explicite avec $\lambda = 0.5625 < 0.75$. Les résultats sont donnés avec six chiffres significatifs seulement, vu la longueur (voir conclusion) du calcul analytique.

On peut en conclusion formuler la remarque suivante: le net avantage de la méthode analytique, dont la convergence est très lente. Par exemple, pour calculer la valeur de la fonction U en un point quelconque avec une précision de 9 chiffres, on a besoin de 20 minutes de calcul, en travaillant en double précision.

BIBLIOGRAPHIE

1. O' Brien, Hyman, Kaplan: A study of the numerical solution of partial differential equations. J. Math. Phys. 29 (1951)
2. Douglas J. On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differential / equations. J. Soc. Indust. appl. Math. 4 (1956)
3. E. Durand, Electrostatique, tome II . Problème généraux - Conducteurs Masson - (1964)
4. R. S. Varga Matrix Iterative Analysis - Prentice Hall (1962)
5. Morse and Ingard. Theoretical Acoustics . Int. Series in Pure and / Applied Physics. M. Graw Hill (1968)