

PUC

Série: Monografias em Ciência da Computação
Nº 6/77

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS PARA RESOLUÇÃO
DE PROBLEMAS DE CONTOURNO BIDIMENSIONAIS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

por

Vitoriano Ruas

Departamento de Informática

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Av. Marquês de São Vicente 225 — ZC 19

Rio de Janeiro — Brasil

B C — FUC

DOAÇÃO

Série: Monografias em Ciência da Computação
Nº 6/77

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS PARA RESOLUÇÃO
DE PROBLEMAS DE CONTORNO BIDIMENSIONAIS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS*

por

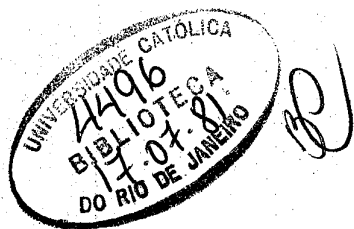
Vitoriano Ruas

Editor da Série: Michael F. Challis

Julho de 1977

* Trabalho parcialmente patrocinado pela FINEP.

VC 14889-6



PUC
515.62
R894g

Para obter cópia dos trabalhos escreva para:

Rosane Teles Lins Castilho
Chefe; Setor de Documentação
Departamento de Informática
Rua Marquês de São Vicente, 209 - GÁVEA
20.000 - Rio de Janeiro - RJ - BRASIL

RESUMO:

Um processo de triangulação automática de domínios, curvos ou poligonais definidos pela equação ou por pontos da fronteira é apresentado. Adequado ao emprego na resolução pelo método dos elementos finitos de equações diferenciais parciais, torna possível o aumento imediato da precisão do processo por simples variação no dado de um parâmetro inteiro positivo p que define o grau de refinamento da discretização. Prova-se que, se o domínio satisfaz a uma condição pouco restritiva na prática, a triangulação é regular no sentido seguinte:

$\exists c > 0$ constante independente de p tal que

$$\frac{\rho}{h} \geq c \quad \forall h, \rho$$

onde h é o maior e ρ o menor lado de um triângulo da partição. Com isso fica garantida a convergência da solução numérica para a solução exata da equação diferencial, quando a malha se torna arbitrariamente fina, se os elementos finitos são escolhidos adequadamente. Enfim, são fornecidos procedimentos para a numeração dos triângulos gerados, bem como de cálculo das coordenadas dos seus vértices, dado seu número de ordem.

PALAVRAS-CHAVE: Domínios curvos, Domínios estrelados, Elementos Finitos, Convergência, Partição regular, Triangulação automática, Numeração automática.

ABSTRACT

A method for automatic generation of triangulations of curved or polygonal two-dimensional domains, to be used when solving partial differential equations with finite elements is introduced. Refinement of the mesh is simply obtained by increasing the value of a positive integer parameter p . We prove that, for starshaped domains whose boundaries do not have cusps, the triangulation is regular in the following sense: there exists a strictly positive constant c , independent of p , such that:

$$\frac{\rho}{h} \geq c \quad \forall h, \rho$$

where h is the largest and ρ the smallest side of a triangle of the mesh. So, according to standard results, if the finite elements are suitably chosen, convergence to the exact solution is provided as they become arbitrarily small. In addition, procedures for automatic numbering and calculation of the coordinates of the vertices of the triangles are given.

KEY-WORDS- Curved domains, Starshaped domains, Finite Elements Convergence, Regular mesh, Automatic triangulation Automatic numbering.

S U M Á R I O

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE PARTIÇÃO	3
3 - CONDIÇÕES DE REGULARIDADE DA PARTIÇÃO	6
4 - PROCEDIMENTOS PARA CÁLCULO AUTOMÁTICO.....	16
5 - OBSERVAÇÕES COMPLEMENTARES	20

1 - INTRODUÇÃO

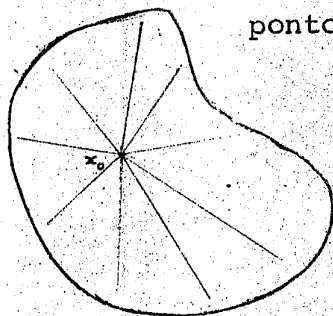
Na resolução numérica de equações diferenciais parciais com condições de contorno, definidas sobre domínios curvos ou irregulares, o emprego do método dos elementos finitos se torna ainda mais indicado do que em casos em que já é comprovadamente mais eficiente do que outros métodos. Isso provém essencialmente da sua flexibilidade para ajustar-se ao domínio em questão e às correspondentes condições de contorno. Em particular, no caso de duas dimensões, o uso de elementos triangulares viabiliza esse ajustamento de modo bastante simples. Entretanto, em geral, é preciso definir empiricamente a partição do domínio em triângulos, ou seja, a triangulação. Isto significa que todos os dados da discretização, como as coordenadas dos vértices dos triângulos e a respectiva numeração, devem ser fornecidos, quando da execução de um programa de resolução por elementos finitos. Representa inconveniente ainda maior do que isso o fato seguinte: se se deseja aumentar a precisão do processo com um refinamento da malha, é preciso interromper o processamento para refazer a partição e reintroduzir todos os dados acima mencionados. Parece-nos pois interessante instituir processos com o intuito de gerar automaticamente partições, para os quais se forneceria apenas, além da definição do domínio pela equação da fronteira ou por pontos, um indicador do grau de refinamento que se deseja para a malha de discretização.

Observa-se que um processo de tal natureza tem ainda a vantagem de se prestar para o estudo experimental da convergência do método dos elementos finitos.

Apresentamos neste trabalho uma solução para esse problema que se aplica ao caso em que o domínio bidimensional é estrelado, situação esta que ocorre efetivamente em uma grande gama de aplicações.

Neste ponto julgamos oportuno dar esclarecimentos sobre essas condições de aplicabilidade do método.

Definição 1: Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^2 de fronteira Γ . Diz-se que Ω é estrelado se existir um ponto $x_0, x_0 \in \Omega$ tal que todo segmento de reta que una x_0 a qualquer ponto de Ω fique inteiramente contido em Ω [1].



O conjunto de tais pontos será denominado o núcleo convexo de Ω pois pode-se provar que será sempre convexo. Será denotado por \mathcal{N} e claramente temos $\mathcal{N} \subset \Omega$.

Em resumo se $\mathcal{N} \neq \emptyset$ o processo de geração da triangulação é realizável. Aliás, podemos adiantar que, a grosso modo, o processo funcionará tão melhor quanto mais regular for o domínio Ω no que diz respeito à configuração de sua fronteira Γ .

Com a definição do núcleo convexo podemos quantificar essa regularidade, por exemplo, através do quociente:

$$\frac{m(\mathcal{N})}{m(\Omega)}$$

onde $m(A)$ representa a medida de Borel-Lebesgue de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$.

Por exemplo, se Ω é convexo verifica-se sem dificuldades que $\mathcal{N} = \Omega$. Nesse caso o processo é certamente bem indicado.

Para domínios não convexos com concavidades não muito pronunciadas como o da figura 2, o processo já não funcionará tão bem, como veremos mais adiante, sendo contudo ainda aceitável.

Já o domínio não convexo da figura 3 tem seu núcleo convexo vazio. Para esse o processo não pode ser aplicado.

Outros casos de não aplicabilidade são os da figura 4 e 5, respectivamente de domínios furados e não conexos.

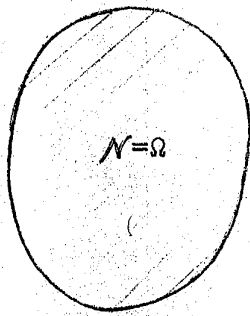


FIGURA 1
DOMÍNIO CONVEXO:
BOM $N=Omega$

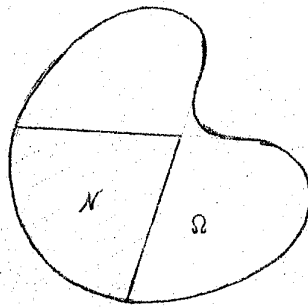


FIGURA 2
DOMÍNIO COM CONCAVIDADE:
ACEITÁVEL. $N \subset Omega, N \neq \emptyset$

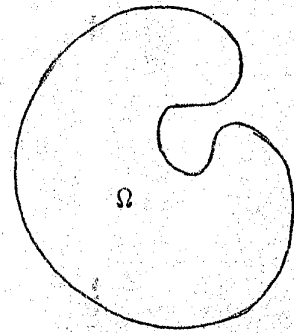


FIGURA 3
DOMÍNIO COM CONCAVIDADE:
EXCLUÍDO $N = \emptyset$

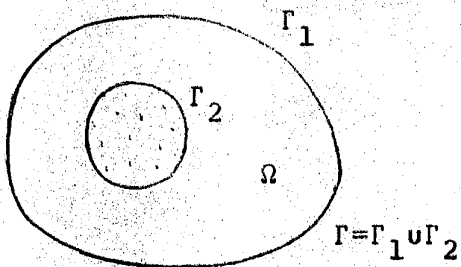


FIGURA 4
DOMÍNIO FURADO
EXCLUÍDO $N = \emptyset$

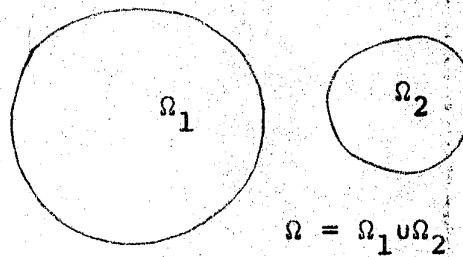


FIGURA 5
DOMÍNIO NÃO CONEXO
EXCLUÍDO $N = \emptyset$

Passemos agora à definição da partição.

2 - APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE PARTIÇÃO

Seja $Omega$ um domínio limitado de R^2 de núcleo convexo N não vazio. Podemos então supor inicialmente que Γ seja dada por uma equação em coordenadas polares,

$$(1) \quad \rho = f(\theta)$$

cuja origem é convenientemente escolhida em N .

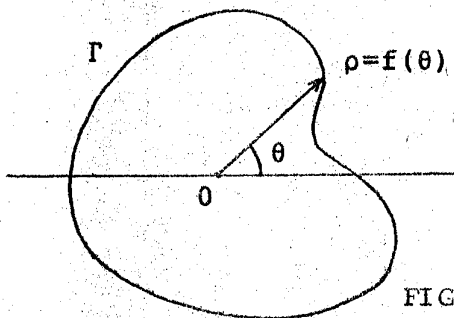


FIGURA 6

Em seguida arbitramos certo ângulo β divisor exato de 2π , isto é:

$$\beta = \frac{2\pi}{n} \text{ onde } n \text{ é inteiro, } n \geq 3.$$

Definição 2: Dado um parâmetro inteiro positivo p , definimos a triangulação pelos pontos: $P_{00} = (0,0)$ e

$$P_{m\ell} = (\rho_{m\ell}, \theta_{m\ell})$$

onde:

$$\theta_{m\ell} = \frac{m\beta}{\ell} \quad m = 1, 2, \dots, n\ell$$

$$\rho_{m\ell} = \frac{\ell f(\theta_{m\ell})}{p} \quad \ell = 1, 2, \dots, p$$

A título de ilustração, se $\beta = \frac{\pi}{4}$ obtemos triangulações do tipo:

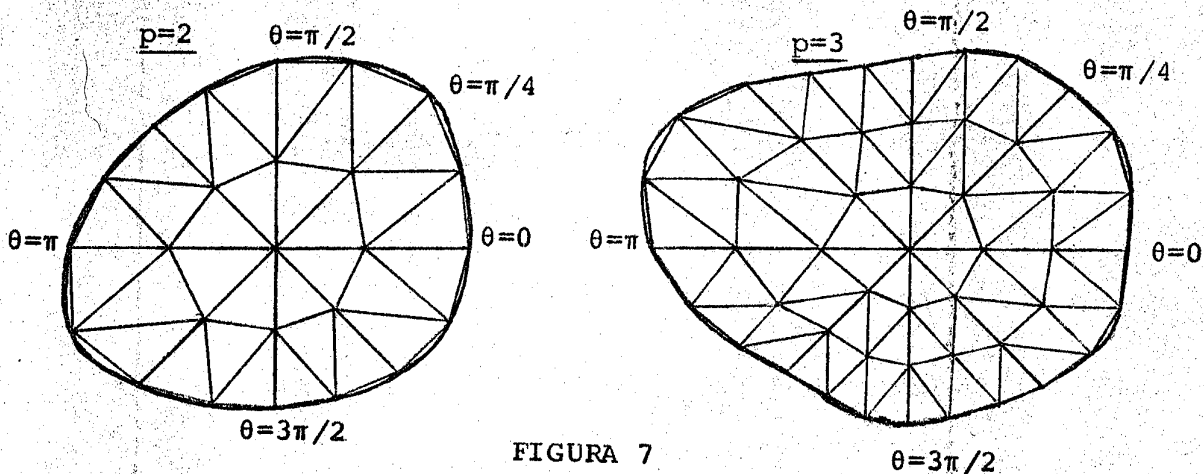


FIGURA 7

Note-se que o processo com esse valor de β ($n=8$) é o análogo da triangulação de um quadrado dada na FIGURA 8, apesar de não a produzir exatamente.

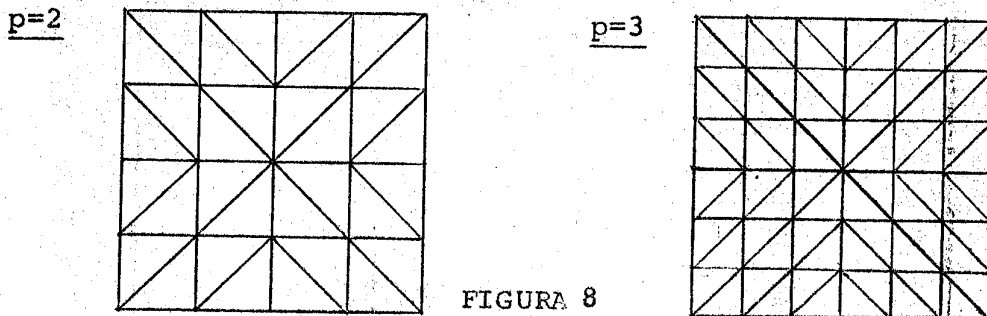


FIGURA 8

Em resumo, o método se baseia em reduções homotéticas do domínio na razão ℓ/p , onde $\ell=1, 2, \dots, p$, sendo cada uma das p fronteiras reduzidas, divididas em $n\ell$ segmentos curvos pe-

los raios vetores de inclinações múltiplas de β/l .

Pelo que se pode concluir da definição da partição, esta fica inteiramente definida pelos parâmetros inteiros p e n . No entanto é o primeiro deles que estabelece o grau de refinamento da malha triangular.

Observa-se ainda que, por esse processo, a fronteira é sucessivamente aproximada por polígonos que tendem a coincidir com a mesma à medida em que p cresce. Com respeito a esse fato porém, salientamos que, em muitos casos de cálculo com elementos finitos, essa aproximação não introduz nenhum erro adicional significativo [3]. Em todo o caso, se necessário, pode-se sempre apelar para os elementos isoparamétricos.

Finalmente observamos que podemos ainda aplicar o processo no caso freqüente em que a fronteira Γ é dada por certo número finito de pontos. De fato, tudo o que temos que fazer é simular a equação de Γ por interpolação. Por exemplo, no caso da figura 9, usando-se interpolação linear, numerando-se os pontos, dados em coordenadas cartesianas $P_i = (x_i, y_i)$, e escolhendo-se P_1 tal que $y_1 = 0$ e $x_1 > 0$, temos:

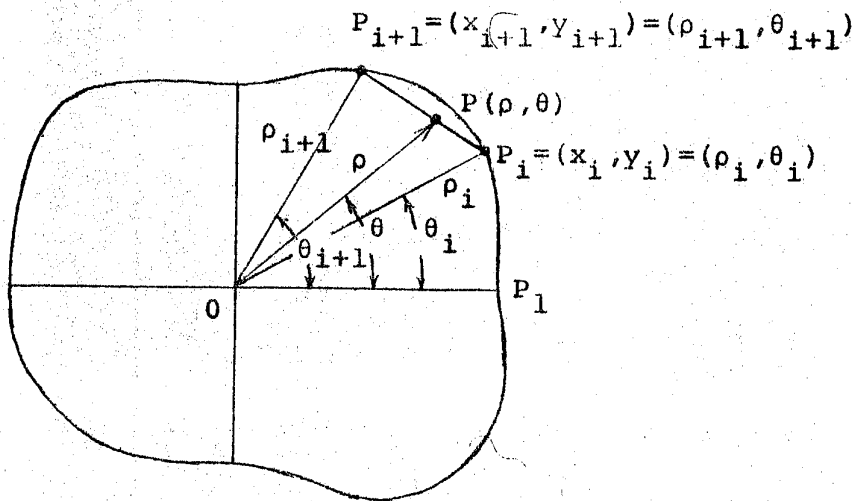


FIGURA 9

Se $\theta_i < \theta \leq \theta_{i+1}$, então $\rho(\theta) = \overline{OP}$, sendo P o ponto de interseção da reta $y = \text{tg}\theta x$ com o segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$.

Sõ que nesse caso o refinamento excessivo da malha não convêm, uma vez que a partir de certo ponto não se pode mais esperar nenhum aumento de precisão. Isso porque passaremos a ter uma aproximação de Γ relativamente mã.

3 - CONDIÇÕES DE REGULARIDADE DA PARTIÇÃO

O que se espera de um método de discretização de equações diferenciais é que a seqüência de soluções aproximadas convirja para a solução exa quando a malha de discretização se torna tão fina quanto se queira.

No caso do método dos elementos finitos os resultados de convergência conhecidos são os seguintes [2]

Representando-se por e_p o erro da solução aproximada calculada com uma certa partição P e expresso numa norma adequada temos:

$$e_p \leq C \frac{h_p^k}{\rho_p^m}, \text{ onde:}$$

— h_p e ρ_p são tais que $\frac{h_p}{\rho_p} = \max_{T \in P} \left\{ \frac{h(T)}{\rho(T)} \right\}$ sendo $h(T)$ e $\rho(T)$ os diâmetros dos círculos circunscrito e inscrito a um elemento T da dada partição P, respectivamente.

— C é uma constante positiva independente de P.

— k e m são reais positivos $k > m$.

Por conseguinte, se utilizamos uma família \mathcal{P} de partições P para a qual exista uma constante c estritamente positiva tal que:

$$(2) \quad \boxed{c \leq \frac{\rho_p}{h_p}} \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

a convergência do processo estará garantida pois, nesse caso temos:

$e_p \leq C h_p^{k-m}$ onde $C = \frac{c}{c^m}$, constante independente de P, o que dá:

$$\lim_{h_p \rightarrow 0} e_p = 0 \quad \text{como desejado.}$$

Definição 3: Se a condição (2) é satisfeita, diz-se que a família \mathcal{P} de partições P é regular.

Para triângulos, a regularidade de partições pode ser equivalentemente expressa por: $\exists c > 0$ tal que:

$$(3) \quad \boxed{c \leq \frac{\ell_P}{L_P}} \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

onde

$$\frac{\ell_P}{L_P} = \max_{T \in P} \left\{ \frac{\ell(T)}{L(T)} \right\}$$

sendo $L(T)$ e $\ell(T)$ respectivamente o maior e o menor dos lados de um triângulo T da partição P .

Com isso, para o processo que introduzimos surgem imediatamente as questões: Seria possível satisfazer a condição (3)? Em caso afirmativo, para que tipos de domínio ela seria satisfeita?

Para obtermos resposta satisfatória à primeira questão basta estudar o que ocorre no caso de um círculo de raio R .

Nesse caso $f(\theta) = R \quad \forall \theta$ e temos:

Teorema 1: A família de triangulações construídas segundo a Definição 2 é regular no sentido da Definição 3, se $f(\theta) = R$.

Demonstração: Tomamos cada caso dentre os dois possíveis para a posição de um triângulo:

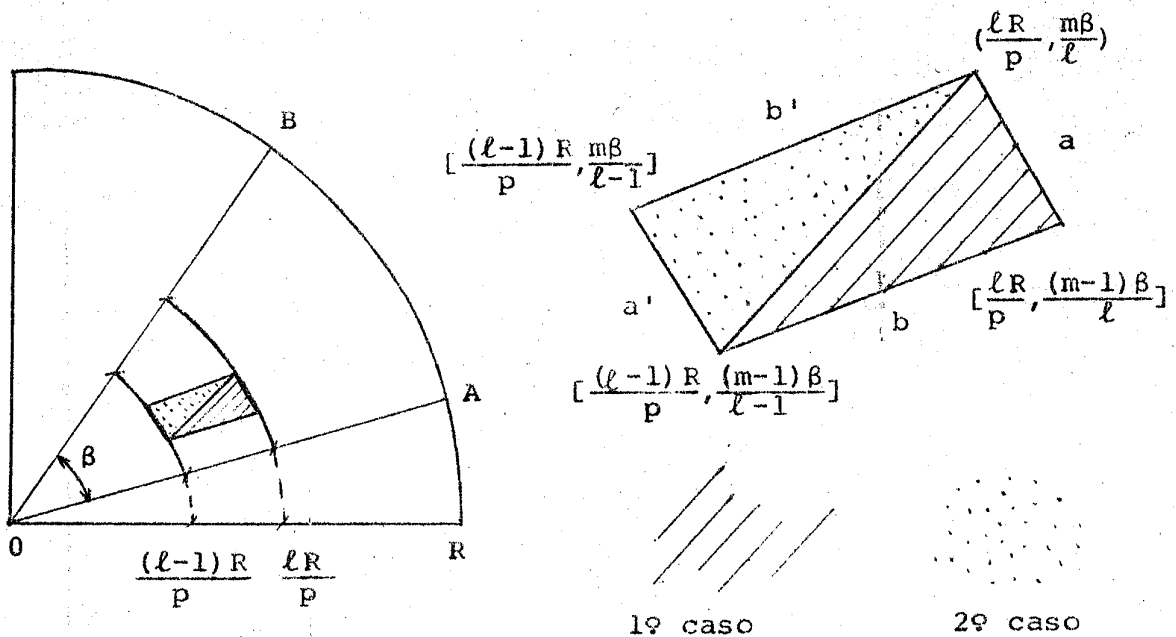


FIGURA 10

Seja o 1º caso:

Considerando a simetria de AB com relação à sua bissetriz, basta estudar os quocientes $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$.

Seja então:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{l^2 [\cos \frac{m\beta}{l} - \cos \frac{(m-1)\beta}{l}]^2 + l^2 [\sin \frac{m\beta}{l} - \sin \frac{(m-1)\beta}{l}]^2}{[l \cos \frac{(m-1)\beta}{l} - (l-1) \cos \frac{(m-1)\beta}{l}]^2 + [l \sin \frac{(m-1)\beta}{l} - (l-1) \sin \frac{(m-1)\beta}{l}]^2}$$

o que dá, após as devidas simplificações:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2l^2 (1 - \cos \frac{\beta}{l})}{2l^2 - 2 + 1 - 2l(l-1) \cos \frac{(m-1)\beta}{l(l-1)}}$$

Como $m \leq l$ temos:

$$\frac{a^2}{b^2} \geq \frac{2l^2 (1 - \cos \frac{\beta}{l})}{2l^2 - 2l + 1 - 2l(l-1) \cos \frac{\beta}{l}} \geq \frac{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2l}}{4l(l-1) \sin^2 \frac{\beta}{2l} + 1}, \text{ ou}$$

$$\frac{a^2}{b^2} \geq \frac{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2l}}{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2l} + 1}$$

Façamos agora $x = \frac{\beta}{2l}$. Temos $0 < x \leq \frac{\beta}{2} \quad \forall l$

$$\text{e } \frac{a^2}{b^2} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta^2} \frac{x^2}{\sin^2 x}}$$

Como $\frac{x}{\sin x}$ é crescente para $x \geq 0$ temos enfim

$$\frac{a^2}{b^2} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta^2} \frac{\beta^2/4}{\sin^2 \beta/2}} \Rightarrow (4) \quad \boxed{\frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4 \sin^2 \beta/2}}}}$$

Por outro lado, como $0 \leq \cos x \leq 1$ se $x \geq 0$ vem

$$\frac{b^2}{a^2} \geq \frac{2l^2 - 2l + 1 - 2l(l-1)}{2l^2(1 - \cos \frac{\beta}{l})} = \frac{1}{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2l}} = \frac{1}{\beta^2 \frac{\sin^2 x}{x^2}}$$

Enfim como $\frac{\sin x}{x} \leq 1 \forall x$ temos:

$$(5) \quad \boxed{\frac{b}{a} \geq \frac{1}{\beta}}$$

Vejamos agora o 2º caso:

De novo basta minorar os quocientes $\frac{a'}{b'}$ e $\frac{b'}{a'}$.

Com desenvolvimentos análogos aos do 1º caso, chega-se a:

$$\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 = \frac{(l-1)^2 (2 - 2\cos \frac{\beta}{l-1})}{l^2 + (l-1) - 2l(l-1) \cos \frac{m\beta}{(l-1)l}}$$

Como neste caso temos $m < l$, vem com $m=l-1$:

$$\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 \geq \frac{2(l-1)^2 (1 - \cos \frac{\beta}{l-1})}{1 + 2l(l-1) [1 - \cos \frac{\beta}{l-1}]} = \frac{4(l-1)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2(l-1)}}{1 + 4l(l-1) \sin^2 \frac{\beta}{2(l-1)}}$$

e com $x = \frac{\beta}{2(l-1)}$ temos:

$$\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 \geq \frac{\frac{\beta^2}{x^2} \sin^2 x}{1 + (\frac{\beta^2}{x^2} + 2\frac{\beta}{x}) \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{2x}{\beta} + \frac{x^2}{\beta^2 \sin^2 x}}$$

Como $0 < x \leq \frac{\beta}{2}$ vem, como no 1º caso:

$$\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 \geq \frac{1}{2 + \frac{1}{4\sin^2 \beta/2}} \Rightarrow (6)$$

$$\boxed{\frac{a'}{b'} \geq \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{4\sin^2 \beta/2}}}}$$

Por outro lado

$$\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 = \frac{l^2 + (l-1)l - 2l(l-1) \cos \frac{m\beta}{(l-1)l}}{2(l-1)^2 (1 - \cos \frac{\beta}{l-1})} \geq \frac{l}{4(l-1)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2(l-1)}}$$

Como $l \geq 2$ e procedendo-se como no 1º caso, chega-se a:

$$(7) \quad \boxed{\frac{b'}{a'} \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta}}$$

O teorema está então provado com

$$(8) \quad \boxed{c = \min \left[\frac{1}{\beta}, \frac{2 \operatorname{sen} \beta/2}{\sqrt{8 \operatorname{sen}^2 \beta/2 + 1}} \right]}$$

uma vez que (4), (5), (6) e (7) são independentes de p . c.q.d.

Obs.: Se $n > 4$ ou $\beta < \frac{\pi}{2}$ temos:

$$(9) \quad \boxed{c = \frac{2 \operatorname{sen} \beta/2}{\sqrt{8 \operatorname{sen}^2 \beta/2 + 1}}}$$

Voltamo-nos agora para o problema da partição de um domínio Ω qualquer de núcleo convexo não vazio cuja fronteira é dada pela equação $\rho = f(\theta)$. Vamos em particular obter condições suficientes para que a família de partições seja regular no sentido da Definição 3.

Vamos supor inicialmente que $f \in C^1(I_j)$ sendo:

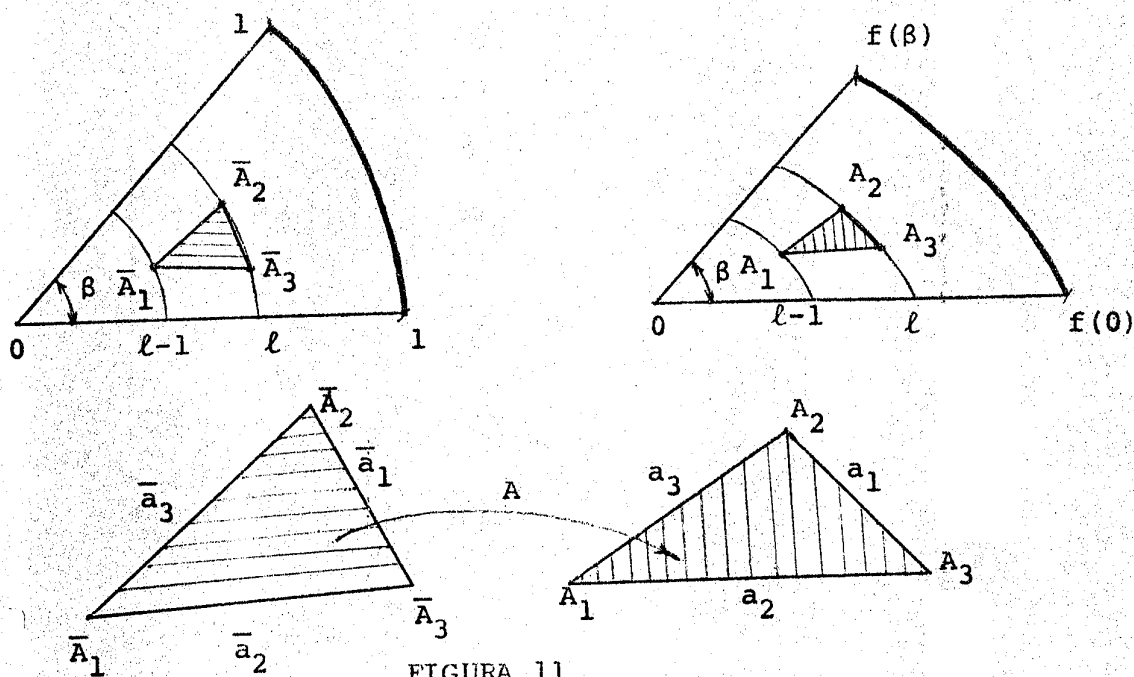
$$(10) \quad \boxed{I_j = \left[\frac{(j-1)\beta}{2}, \frac{j\beta}{2} \right] \quad j=1, 2, \dots, 2n.}$$

Teorema 2 Se a função f da equação (1) satisfaz para a origem e o valor de n escolhidos a relação:

$$(11) \quad \boxed{\gamma = \min_{1 \leq j \leq 2n} \left\{ \min_{\theta \in I_j} f(\theta) - \beta \max_{\theta \in I_j} |f'(\theta)| \right\} > 0}$$

então a triangulação da Definição 2 é regular.

Demonstração: Observamos inicialmente que existe uma aplicação Λ que leva um triângulo gerado para um círculo de referência de raio unitário, ao triângulo homólogo gerado para Ω .



Por construção, a triangulação é tal que os argumentos θ correspondentes a vértices homólogos são iguais. Vamos pois majorar e minorar convenientemente os quocientes entre lados homólogos com:

$$m_i \leq \frac{a_i}{\bar{a}_i} \leq M_i \quad i = 1, 2, 3, \quad m_i, M_i$$

independentes da partição escolhida. Dessa forma, esses resultados levados em (8) nos darão para o domínio em questão:

$$(12) \quad c = \min \left[\frac{1}{\beta}, \frac{2 \operatorname{sen} \beta/2}{\sqrt{8 \operatorname{sen}^2 \beta/2 + 1}} \right] \frac{\min \{m_i\}_{1 \leq i \leq 3}}{\max \{M_i\}_{1 \leq i \leq 3}}$$

desde que $m_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Sem perda da generalidade, vamos nos limitar ao primeiro setor, i.e., $0 \leq \theta \leq \beta$.

Consideremos agora triângulos com um vértice na origem e um lado igual a a_i ou \bar{a}_i e denotemos:

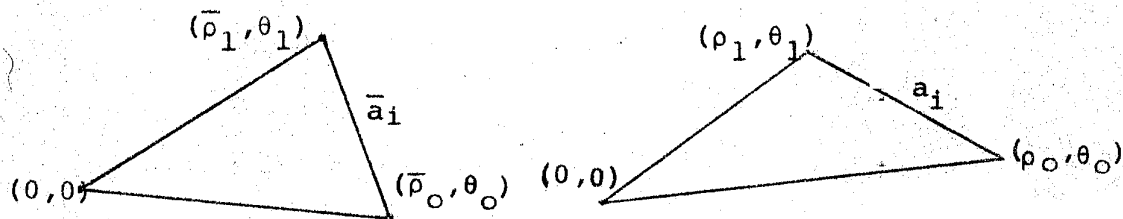


FIGURA 12

onde

$$(13) \quad \rho_s = \bar{\rho}_s f(\theta_s) \quad s=0,1.$$

já que o raio do círculo de referência é igual a 1.

Com isso temos:

$$(14) \quad \left(\frac{a_i}{\bar{a}_i}\right)^2 = \frac{\rho_1^2 + \rho_0^2 - 2\rho_1\rho_0 \cos(\theta_1 - \theta_0)}{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_0 - 2\bar{\rho}_1\bar{\rho}_0 \cos(\theta_1 - \theta_0)}$$

Consideremos agora valores diferentes de i :

$i=1$ Neste caso $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_1$. Logo de (13), (14) vem:

$$\left(\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right)^2 = \frac{f^2(\theta_1) + f^2(\theta_0) - 2f(\theta_1)f(\theta_0)\cos(\theta_1 - \theta_0)}{2 - 2\cos(\theta_1 - \theta_0)}$$

Com a minoração, considerado que $0 \leq \cos(\theta_1 - \theta_0) \leq 1$ temos:

$$\left(\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right)^2 \geq \min [f^2(\theta_1), f^2(\theta_0)] \quad \text{ou seja}$$

$$(15) \quad m_1 = \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} f(\theta)$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right)^2 = \frac{f^2(\theta_1) + f^2(\theta_0) - 2f(\theta_1)f(\theta_0)}{2 - 2\cos(\theta_1 - \theta_0)} + f(\theta_1)f(\theta_0)$$

Minoramos agora o denominador considerando que $|\theta_1 - \theta_0| \leq \beta \leq \frac{2\pi}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2[1 - \cos(\theta_1 - \theta_0)]} &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)^4} \leq \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \frac{12}{12 - (\theta_1 - \theta_0)^2} \leq \\ &\leq \frac{12}{12 - \beta^2} \frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \end{aligned}$$

Logo:

$$\left(\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right)^2 \leq \frac{12}{12-\beta^2} \left[\frac{f(\theta_1) - f(\theta_0)}{\theta_1 - \theta_0} \right]^2 + f(\theta_1)f(\theta_0), \text{ donde}$$

$$\left(\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right)^2 \leq \frac{12}{12-\beta^2} |f'(\theta_\xi)|^2 + f(\theta_1)f(\theta_0) \text{ onde } \theta_\xi = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)\xi, 0 \leq \xi \leq 1.$$

o que dá finalmente

$$(16) \quad M_1 = \sqrt{\frac{12}{12-\beta^2} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f'(\theta)|^2 + \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(\theta)|^2}$$

Seja agora $i=2$:

$$\text{Neste caso } \theta_0 = \frac{m\beta}{\ell-1} \text{ e } \theta_1 = \frac{m\beta}{\ell} \quad \begin{matrix} m=0, 1, \dots, \ell-1 \\ \ell=2, 3, \dots, p \end{matrix}$$

Consideremos em primeiro lugar dois casos particulares;

a) $\ell=1$. Neste caso $\rho_0=0$ e $\left(\frac{a_2}{\bar{a}_2}\right)^2 = \frac{\rho_1^{-2} f^2(\theta_1)}{\rho_1^{-2}} \Rightarrow$

$$(17) \quad M_2 = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(\theta)| \quad \text{e} \quad (18) \quad m_2 = \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(\theta)|$$

b) $\ell > 1$ mas $m=0$. Então $\theta_1 = \theta_0 = 0$ e $\left(\frac{a_2}{\bar{a}_2}\right)^2 = f^2(0)$ e obtemos novamente (17) e (18).

Com isso podemos supor $\ell > 1$ e $m > 0$.

Neste caso

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\ell-1}{p} \text{ e } \bar{\rho}_1 = \frac{\ell}{p}$$

Definindo-se $\mu = \frac{\ell-1}{\ell} = \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}_1}$ vem de (13), (14):

$$\left(\frac{a_2}{\bar{a}_2}\right)^2 = \frac{f^2(\theta_1) + \mu^2 f^2(\theta_0) - 2\mu \cos(\theta_1 - \theta_0) f(\theta_1) f(\theta_0)}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos(\theta_1 - \theta_0)}$$

Calculemos M_2 . Após transformações simples temos:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = f^2(\theta_1) + \frac{[f(\theta_0) - f(\theta_1)]\{\mu^2[f(\theta_0) + f(\theta_1)] - 2\mu \cos(\theta_1 - \theta_0) f(\theta_1)\}}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos(\theta_1 - \theta_0)}$$

Como no caso $i=1$, fazemos $f(\theta_0) = f(\theta_1) + (\theta_0 - \theta_1)f'(\theta_\xi)$, e seja

$$\alpha = \theta_0 - \theta_1 = \frac{m\beta}{\ell(\ell-1)}. \text{ Temos:}$$

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = f^2(\theta_1) + \frac{\alpha f'(\theta_\xi)[2\mu^2 f(\theta_1) - 2\mu \cos \alpha f(\theta_1) + \alpha \mu^2 f'(\theta_\xi)]}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \alpha}$$

Majorando vem:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \leq f^2(\theta_1) + \alpha |f'(\theta_\xi)| \left[\frac{\alpha \mu^2 |f'(\theta_\xi)|}{(1-\mu)^2} + \frac{|2\mu \cos \alpha - 2\mu^2| f(\theta_1)}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \alpha} \right]$$

Porém verifica-se que:

$$0 < \frac{2\mu \cos \alpha - 2\mu^2}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \alpha} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - 1 \quad \forall \ell \geq 2, 0 < \alpha < \pi$$

Com nova majoração vem então:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \leq f^2(\theta_1) + \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} |f'(\theta_\xi)| \left[f(\theta_1) + \left[\frac{\alpha \mu f'(\theta_\xi)}{1-\mu} \right]^2 \right]$$

Considerando que $\alpha = \frac{m\beta}{\ell(\ell-1)} \leq \frac{\beta}{\ell} \leq \frac{\beta}{2}$, e $\mu < 1$ vem:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \leq f^2(\theta_1) + \frac{\beta}{2 \operatorname{sen} \beta/2} |f'(\theta_\xi)| \left[f(\theta_1) + |\beta f'(\theta_\xi)|^2 \right]$$

Enfim com: $\frac{\beta}{2 \operatorname{sen} \beta/2} f(\theta_1) |f'(\theta_\xi)| \leq \frac{\beta^2}{8 \operatorname{sen}^2 \beta/2} |f'(\theta_\xi)|^2 + \frac{1}{2} f^2(\theta_1)$, vem:

$$(19) \quad M_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(\theta)|^2 + \beta^2 \frac{8 \operatorname{sen}^2 \beta/2 + 1}{8 \operatorname{sen}^2 \beta/2} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f'(\theta)|^2}$$

Observa-se que tal valor de M_2 pode ser também usado nos dois casos estudados previamente, (17), (18).

Calculemos agora m_2 . Temos:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \geq \frac{[f(\theta_1) - \mu f(\theta_0)]^2}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos(\theta_1 - \theta_0)}$$

Porém, como $|\theta_1 - \theta_0| \leq 2\pi/3$,

$$\cos(\theta_1 - \theta_0) \geq 1 - \frac{(\theta_1 - \theta_0)^2}{2} = 1 - \frac{m^2 \beta^2}{2l^2(l-1)^2} \geq 1 - \frac{\beta^2}{2l^2}$$

Logo

$$\left(\frac{a_2}{\bar{a}_2}\right)^2 \geq \frac{[f(\theta_1) - \mu f(\theta_0)]^2}{(1-\mu)^2 + \frac{\mu\beta^2}{l^2}} = \frac{\{-l[f(\theta_0) - f(\theta_1)] + f(\theta_0)\}^2}{1 + \frac{(l-1)\beta^2}{l}}$$

Mas

$$f(\theta_0) - l[f(\theta_0) - f(\theta_1)] = f(\theta_0) - l(\theta_0 - \theta_1)f'(\theta_\xi) = f(\theta_0) - \frac{m\beta}{l-1} f'(\theta_\xi)$$

Suponhamos agora que $f(\theta_0) \geq \beta \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f'(\theta)|$.

Desse modo, como $m \leq l-1$ e para $l > 1$, $|\theta_1 - \theta_0| \leq \frac{\beta}{2}$, podemos tomar:

$$(20) \quad \boxed{m_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\beta^2}}}$$

desde que γ , dado por (11), seja positivo.

Para completar a prova observamos enfim que, a menos de modificações simples, os desenvolvimentos para $i=3$ são inteiramente idênticos aos de $i=2$ e obtemos:

$$(21) \quad \boxed{m_3 = m_2} \quad \text{e} \quad \boxed{M_3 = M_2} \quad \text{c. q. d.}$$

Como vemos, a única condição imposta para que a triangulação seja regular, é que tenhamos γ dado por (11) estritamente positivo. Como para uma origem escolhida é sempre possível escolher n de forma que

$$\beta \leq \frac{\min f(\theta)}{\max |f'(\theta)|}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

essa condição estará automaticamente satisfeita, desde que $f'(\theta)$ seja limitada.

Ora, tal não ocorreria somente no caso extremo em

que o domínio tem cúspides como no caso da figura 13.

Porém é esse um caso patológico em que qualquer outro método de discretização esbarraria em dificuldades semelhantes para convergir.

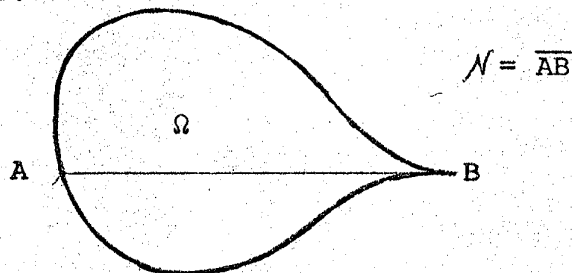


FIGURA 13: DOMÍNIOS COM CÚSPIDES EXCLUIDOS MESMO COM $\mathcal{N} \neq \emptyset$

É importante observar, entretanto que mesmo excluindo este último caso, não convém tomar valores de β muito pequenos pois assim o erro do método de discretização poderá aumentar demasiadamente.

Vamos concluir este parágrafo observando que o valor da constante c da minoração (3) pode agora ser calculado com base em (11), (12), (15), (16), (19), (20) e (21), se desejado.

4 - PROCEDIMENTOS PARA CÁLCULO AUTOMÁTICO

Como o processo aqui apresentado visa, entre outras coisas, a automatização, tanto quanto possível, do cálculo com elementos finitos, apresentamos procedimentos de cálculo automático de dados essenciais para o processamento.

Como se sabe a resolução de um problema por elementos finitos pode ser levada a efeito, em última análise, conhecidos os dados que definem precisamente os elementos. No nosso caso são as coordenadas dos 3 vértices do triângulo os dados normalmente utilizados. Instituímos pois um processo de numeração dos triângulos tal que, dado o número de um deles podemos calcular imediatamente suas coordenadas.

O processo de numeração é, entretanto, limitado ao caso em que $n=8$, ou seja $\beta=\frac{\pi}{4}$, pois, como já mencionamos, podemos assim estabelecer uma correspondência entre a nossa partição e a de um quadrado de referência da forma da figura 14, onde ilustramos o caso $p=2$.

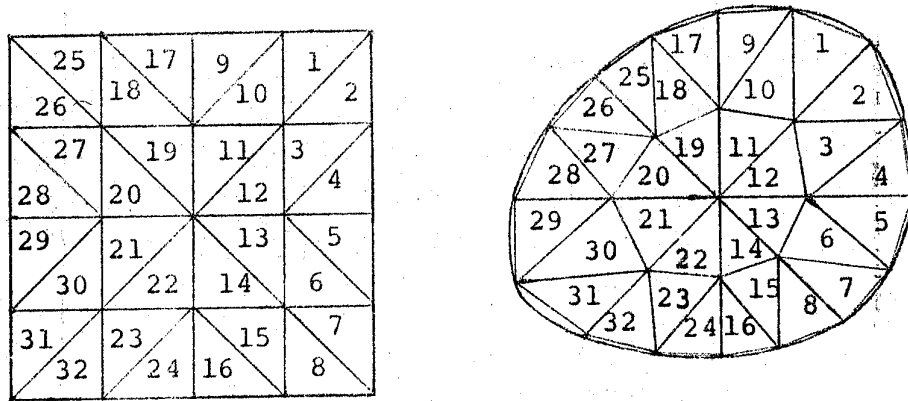


FIGURA 14:

Observamos que essa numeração induz de modo natural a dos graus de liberdade da partição segundo um critério considerado recomendável para se obter uma certa minimização da largura máxima de banda da matriz resultante da discretização do problema [4]: que essa numeração percorra sempre em um sentido fixo carreiras, contendo cada uma um número aproximadamente igual de elementos, ficando a grosso modo paralelas umas às outras.

Comisso se consegue de forma ideal no caso do quadrado, deve-se procurar empregar o mesmo princípio para domínios quaisquer estabelecendo uma correspondência entre as duas triangulações. Para maiores detalhes sobre o assunto ver [3] e [4] onde são fornecidas larguras máximas de banda em função de p , para alguns tipos de elementos finitos.

Damos a seguir rotinas FORTRAN que servem para o cálculo das coordenadas de um triângulo dado seu número de ordem e o valor de p , com $\beta = \pi/4$. Supomos no entanto que o domínio tem dois eixos de simetria perpendiculares. Neste caso, se os dados da equação diferencial possuem as mesmas propriedades de simetria, podemos trabalhar em um só quadrante, o que reduz sensivelmente o volume de cálculo.

A numeração dos triângulos é agora da forma ilustrada abaixo para $p=2$.

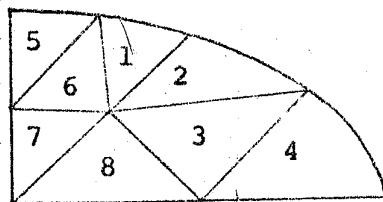


FIGURA 15

Observamos no entanto que o usuário não terá dificuldades para alterar as rotinas no caso não simétrico ou de um só eixo de simetria. O mesmo se pode dizer da elaboração de uma rotina de geração automática da matriz inteira correspondente à numeração dos graus de liberdade a serem calculados para um certo tipo de elemento finito escolhido [4].

O seguinte procedimento se aplica ao caso em que a equação da fronteira é dada por pontos guardados nos vetores Z1 e Z2. Se a fronteira for dada por uma equação $p=f(\theta)$ deve-se substituir convenientemente a FUNCTION.

```
1 SUBROUTINE TRANS  
COMMON Z1(20),Z2(20),ANG(20),N  
DO 1 I=1,N  
ANG(I)=ATAN(Z2(I)/Z1(I))  
1 CONTINUE  
RETURN  
END
```

```
2 FUNCTION F(TETA)  
COMMON Z1(20),Z2(20),ANG(20),N  
DO 3 I=1,N  
IF (TETA-ANG(I)) 5,4,3  
3 CONTINUE  
K=I  
L=N  
GOTO 8  
4 F=SQRT(Z1(I)**2+Z2(I)**2)  
RETURN  
5 K=I  
L=I-1  
8 Z1G=(Z1(K)*Z2(L)-Z2(K)*Z1(L))/(TETA*(Z1(K)-Z1(L))-Z2(K)+Z2(L))  
Z2G=(Z1(K)*Z2(L)-Z2(K)*Z1(L))/(Z1(K)-Z1(L)-1./TETA*(Z2(K)-Z2(L)))  
F=SQRT(Z1G**2+Z2G**2)  
RETURN  
END
```



```
0001 SUBROUTINE COORD(IT,X,Y,H,P)
0002 COMMON Z1(20),Z2(20),ANG(20),N
0003 DIMENSION X(3),Y(3)
0004 INTEGER P
0005 IC=(IT-1)/(2*P)+1
0006 IQ=2
0007 IR=-(IC-1)*2*P+IT
0008 IR=2*P-IR+1
0009 IF ((IR/2)*2 .NE .IR) IQ=1
0010 IR=(IR+1)/2
0011 TETA=ATAN(1.)
0012 IO=IR
0013 IF (IR.GT.IC) IO=IC
0014 IO=P-IO+1
0015 IF (IO.EQ.1) GOTO 9
0016 A1=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR)/FLOAT(IO-1))
0017 GOTO 10
0018 9 A1=TETA
0019 10 R1=F(A1)*FLOAT(IO-1)*H
0020 IF (IR-IC) 3,4,5
0021 3 IF (IQ.EQ.1) GOTO 6
0022 A2=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR-1)/FLOAT(IC-1))
0023 A3=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR)/FLOAT(IO))
0024 R2=F(A2)*FLOAT(IO-1)*H
0025 R3=F(A3)*FLOAT(IO)*H
0026 GOTO 7
0027 6 A2=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR)/FLOAT(IO))
0028 A3=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR+1)/FLOAT(IO))
0029 R2=F(A2)*FLOAT(IO)*H
0030 R3=F(A3)*FLOAT(IO)*H
0031 GOTO 7
0032 4 ALFA=TETA/FLOAT(IO)
0033 IF (IQ.EQ.1) GOTO 8
0034 A2=TETA-ALFA
0035 A3=TETA
0036 R2=F(A2)*FLOAT(IO)*H
0037 R3=F(A3)*FLOAT(IO)*H
0038 GOTO 7
0039 8 A2=TETA
0040 A3=TETA+ALFA
0041 R2=F(A2)*FLOAT(IO)*H
0042 R3=F(A3)*FLOAT(IO)*H
0043 GOTO 7
0044 5 IF (IQ.EQ.1) GOTO 11
0045 A2=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR-1)/FLOAT(IO))
0046 A3=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR)/FLOAT(IO))
0047 R2=F(A2)*FLOAT(IO)*H
0048 R3=F(A3)*FLOAT(IO)*H
0049 GOTO 7
0050 11 A2=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR)/FLOAT(IO))
0051 A3=TETA*(1.+FLOAT(IC-IR+1)/FLOAT(IO-1))
0052 R2=F(A2)*FLOAT(IO)*H
0053 R3=F(A3)*FLOAT(IO-1)*H
0054 7 X(1)=R1*COS(A1)
0055 Y(1)=R1*SIN(A1)
0056 X(2)=R2*COS(A2)
0057 Y(2)=R2*SIN(A2)
0058 X(3)=R3*COS(A3)
0059 Y(3)=R3*SIN(A3)
0060 RETURN
0061 END
```

5 - OBSERVAÇÕES COMPLEMENTARES

Julgamos oportuno finalizar com alguns comentários sobre o processo de triangulação aqui apresentado.

1º) Consideremos inicialmente a escolha da origem de coordenadas. Como sabemos esta deve pertencer ao núcleo convexo do domínio. No entanto, deve existir uma localização ótima no sentido de maximizar o valor de c dado por (12).

Não acreditamos entretanto ser tarefa compensadora instituir e utilizar algoritmos para a procura desse ótimo. Sugerimos pois um processo algo rudimentar mas que, cremos, deverá resolver satisfatoriamente o problema da escolha da origem, caso não se deseje pura e simplesmente arbitrã-la empiricamente. Poder-se-á tomar no núcleo convexo um conjunto de pontos $\{O_i\}_{i=1, \dots, m'}$ por exemplo, os nós de uma malha retangular. Escolhemos, como origem aquele que tornar máxima a expressão de c . Como esta é bastante complexa podemos discretizã-la usando o seguinte processo: Escolhemos pontos $\{P_j\}_{j=1, 2, \dots, N}$ estrategicamente localizados sobre Γ .

Calculamos as distâncias $\overline{O_i P_j}$, $O_i = (u_i, v_i)$, $P_j = (x_j, y_j)$:

$$f(\theta_i^j) = \sqrt{(x_j - u_i)^2 + (y_j - v_i)^2} \quad \text{e as derivadas aproximadas}$$

$$f'(\theta_i^j) = \frac{f(\theta_i^{j+1}) - f(\theta_i^j)}{2\overline{P_j P_{j+1}}} = \frac{f^2(\theta_i^{j+1}) - f^2(\theta_i^j)}{2\overline{P_j P_{j+1}} [f(\theta_i^{j+1}) + f(\theta_i^j)]}$$

onde $\overline{P_j P_{j+1}} = \sqrt{(x_j - x_{j+1})^2 + (y_j - y_{j+1})^2}$ e $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, N$

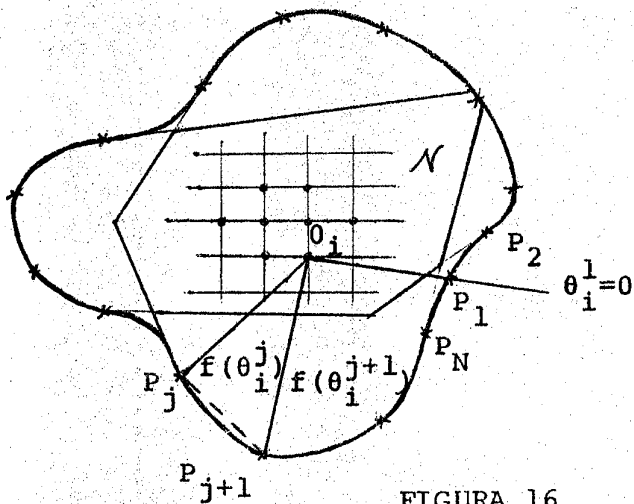
Procuramos agora o máximo sobre i , $1 \leq i \leq m$, da expressão, correspondente ao caso $\beta \leq \pi/4$, o qual deverá ser positivo:

$$\min f(\theta_i^j) - \beta \max |f'(\theta_i^j)|$$

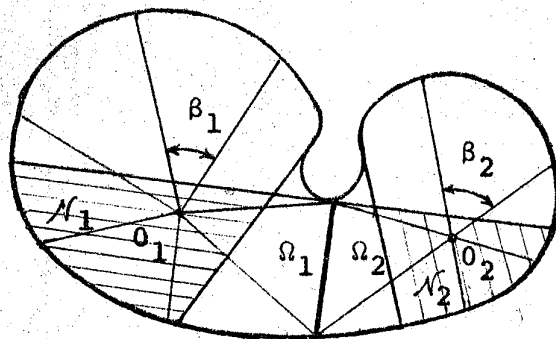
$$\left[\frac{3}{2} \max f(\theta_i^j)^2 + \beta^2 \frac{8 \sin^2 \beta / 2 + 1}{8 \sin^2 \beta / 2} \max |f'(\theta_i^j)|^2 \right]^{1/2}$$

onde os mínimos e máximos são tomados sobre $1 \leq j \leq N$.

A idéia está ilustrada na figura abaixo:



29) Gostaríamos ainda de sugerir procedimentos para o caso em que se tenha domínios não estrelados. Nesse caso se é possível dividir-se o domínio em subdomínios estrelados, estes poderiam ser discretizados com base numa variante do processo de triangulação automática. Um caso típico é ilustrado na figura 17. Tomamos duas origens, uma para cada subdomínio Ω_1, Ω_2 , de forma que sobre $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$, subentendamos setores de ângulos $\beta_i = \frac{2\pi}{n_i}$, n_i inteiro, $i=1,2$ respectivamente.



Exceto para esses dois setores o processo funciona normalmente. No entanto para que a condição de coincidência de lados de elementos vizinhos seja satisfeita não é possível usar o processo baseado na divisão do ângulo de setor mas sim na divisão do segmento comum aos dois subdomínios. Teríamos assim para

estes a partição como ilustrado abaixo:

p=4 :

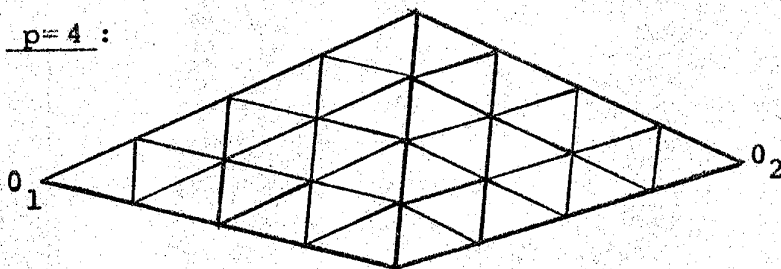


FIGURA 18

É claro que agora o processo de numeração automática dos elementos e graus de liberdade se torna sensivelmente mais complexo.

REFERÊNCIAS

1. HU, S-T. Differentiable Manifolds. San Francisco, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1969.
2. ODEN, & REDDY, . An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. New York, John Wiley & Sons, 1976.
3. RUAS, V. Some Results on the Curved Plate Bending Problem Solved with Non-Conforming Finite Elements. Calcolo (Itália, a sair)
4. RUAS, V. Sur l'Application de quelques Eléments Finis Non-Conformes à la Resolution des Problèmes de la Flexion et des Vibrations des Plaques Minces. Paris, Université Pierre et Marie Curie, 1976. Thèse.