INTRODUÇÃO AOS
PROBLEMAS VARIACIONAIS

Vitoriano Ruas

INF/002 MAI/79

edipuc

Pontifícia Universidade Católica – RJ
Divisão de Intercâmbio e Edições

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de manifestar nossa gratidão ao Prof. Marcos Silveira por haver lido os originais e contribuido com preciosas sugestões para o aprimoramento deste texto.

Nosso reconhecimento também aos colegas Carlos Tomei e Tatuo Nakanishi pela amável colaboração na execução deste trabalho.

Somos também muito gratos ao Prof. Carlos José P. de Lucena por haver possibilitado a impressão do nosso manuscrito.

Enfim às Sr$^{\underline{tas}}$ Vanda Regina Lagame da Silva e Antonia Oka nossos melhores agradecimentos pelo paciente trabalho de datilografia.

Rio de Janeiro, 3 de setembro de 1977.

PREFÁCIO

A crescente utilização de técnicas fundamentadas em Análise Funcional para modelar problemas surgidos das mais diferentes áreas tecnico-científicas, incluindo notadamente equações diferenciais e o controle ótimo de sistemas, vem despertando particular interesse de especialistas por esse ramo da Matemática que se convenciona considerar como teórico.

Nesse quadro, os métodos variacionais tem aumentado apreciavelmente de importância na última década, com a introdução de poderosas técnicas de resolução numérica dos chamados problemas variacionais.

Este texto pretende servir, em especial, aos interesses do usuário que, conhecendo apenas conceitos básicos da Análise Funcional como o de espaços vetoriais normados, convergência, operadores e duais, intencionam adquirir noções essenciais para o manuseio apropriado dos métodos variacionais.

Tratando-se de um texto introdutório, procuramos simplificar ao máximo os aspectos matemáticos do assunto. Para tanto, nos restringimos ao estudo de métodos variacionais num contexto que nos parece ser o mais simples possível: o das equações diferenciais ordinárias com condições de contorno ou, simplesmente, o dos problemas de contorno unidimensionais. Assim, a ferramenta básica de Análise Funcional para o tratamento adequado desses métodos se resume aos espaços de funções de valores reais definidas sobre intervalos da reta. Ao estudo desses espaços, dedicamos pois a maior parte do texto.

A organização dos assuntos obedece a certo encadeamento lógico de interdependência levando enfim à formulação variacional de problemas de contorno. Assim, iniciamos apresentando aspectos fundamentais da Integração de Lebesgue na reta. Passamos em seguida ao estudo das relações integração-derivação com o qual procuramos conduzir naturalmente à noção de função generalizada ou de distribuição, num terceiro capítulo. No quarto capítulo apresentamos os espaços de Sobolev, usualmente os espaços de funções admissíveis em modelos matemáticos associados a problemas de contorno. Estes últimos são enfim tratados no último capítulo.

Apesar de nos limitarmos ao caso unidimensional, cremos fornecer ao leitor material suficiente para a compreensão sem grandes dificuldades adicionais do que ocorre em problemas de contorno multidimensionais, isto é, quando o problema envolve derivadas parciais. A nosso ver, nesse nível tudo pode ser encarado como uma generalização do caso de equações diferenciais ordinárias, embora reconheçamos ser esta nem sempre trivial. Por outro lado, esperamos ter contribuido para eliminar obstáculos que poderiam ser encontrados pelos iniciantes no assunto - especialmente os de formação matemática limitada-para a compreensão de material bibliográfico versando sobre métodos variacionais, em virtude de termos procurado utilizar uma linguagem que se tornou comum entre os que se dedicam ao seu desenvolvimento e aplicação.

O autor

CONTEÚDO

CAPÍTULO I - INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE E ESPAÇOS L^p.

Grande parte dos espaços de funções interessantes para o tratamento analítico e numérico de equações diferenciais são definidos a partir de propriedades de integração. Por esse motivo iniciamos nosso estudo apresentando os fundamentos da Teoria da Integração em uma dimensão.

I.1 - Conjuntos Nulos

O conceito de conjunto nulo, fundamental para a construção da integral de Lebesgue, tem muito a ver com o conceito de enumerabilidade de conjuntos que apesar de supormos conhecido, julgamos conveniente formalizar segundo a:

Definição 1: Diz-se que um conjunto S é enumerável se é possível dispor seus elementos sob a forma de uma seqüência $\{s_n\}$ indexada pelo conjunto $\mathbb{N}$ dos inteiros positivos.

Nesse caso dizemos que $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ é uma numeração de S e que enumeramos o conjunto S.

Proposição 1: A união (finita ou não) de uma seqüência de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração: Sejam $S_1, S_2, S_3, \ldots,$ conjuntos enumeráveis

Isso quer dizer que:

$$\begin{array}{ll}
S_1 \text{ consiste dos elementos} & s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, \ldots, s_{1n}, \ldots \\
S_2 \text{ consiste dos elementos} & s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, \ldots, s_{2n}, \ldots \\
S_3 \text{ consiste dos elementos} & s_{31}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, \ldots, s_{3n}, \ldots \\
S_4 \text{ consiste dos elementos} & s_{41}, s_{42}, s_{43}, s_{44}, \ldots, s_{4n}, \ldots \\
\vdots &
\end{array}$$

Podemos pois enumerar os elementos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ seguindo a diagonal do arranjo acima, com a repetição eventual de elementos comuns a dois ou mais conjuntos:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
s_{11}, & s_{12}, & s_{21}, & s_{13}, & s_{22}, & s_{31}, & s_{14}, & s_{23}, & s_{32}, & s_{41}, & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots
\end{array}$$

ou seja, $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável. c.q.d

Como conseqüência temos que o conjunto Q dos racionais é enumerável.

Para nos convencermos disso, basta definirmos uma seqüência $\{S_n\}$ de conjuntos onde S_n é o conjunto dos racionais positivos de denominador n (incluindo 0). Pela Proposição 1, $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é enumerável. Definindo-se analogamente S'_n conjunto dos racionais negativos de denominador n vem que $\bigcup_{n=1}^{\infty} S'_n$ é enumerável. Logo como o conjunto Q dos racionais é $(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} S'_n)$, Q é enumerável.

<u>Teorema 1</u>: Os números reais não são enumeráveis

<u>Demonstração</u>: Provemos que os reais de (0,1) não são enumeráveis. Suponhamos que conseguimos enumerar os reais de (0,1) numa seqüência $\{s_n\}$. Sabemos que cada real s_n tem uma única representação decimal ilimitada (*)

$$s_n = 0,a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots \qquad 0 \le a_{ni} \le 9 \quad \forall i$$

Vamos construir um real

$$s = 0,b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n \ldots \qquad 0 \le b_i \le 9$$

que não está na numeração escolhendo as b_i segundo a lei:

$$\text{se} \quad a_{ii} \neq 1 \quad b_i = 1,$$

$$\text{se} \quad a_{ii} = 1 \quad b_i = 2$$

O real s assim construído difere de qualquer s_n. Logo a numeração é impossível.

<u>Definição 1</u>: Medida de um intervalo limitado I de $\mathbb{R}$ definido por duas extremidades <u>a</u> e <u>b</u>, $b \ge a$, é a diferença b-a. Representâmo-la por m(I).

Como consequência, se $I=(a,b)$, $I'=(a,b]$, $I''=[a,b)$ e $I''=[a,b]$ temos $m(I) = m(I') = m(I'') = m(I'') = b-a$.

Agora, dada uma seqüência $\{I_n\}$ de intervalos limitados disjuntos ou não, podemos calcular sua <u>medida total</u> dada por:

$$m(\bigcup_n I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$$ supondo-se que tal <u>série converge</u>.

(*) Se o real é "exato" como 1/25 usamos a representação 0,03999... em vez de 0,04, evitando a ambigüidade.

Definição 2: Um conjunto S de pontos de $\mathbb{R}$ é dito coberto por uma seqüência de intervalos limitados $\{I_n\}$ se cada ponto de S ficar situado em pelo menos um intervalo I_n, ou seja: $S\subset\bigcup_n I_n$.

Definição 3: Um conjunto S de pontos de $\mathbb{R}$ é dito um conjunto nulo(**) se pode ser coberto por seqüências de intervalos cuja medida total pode ser feita arbitrariamente pequena.

Proposição 2: Qualquer conjunto enumerável de $\mathbb{R}$ é nulo.
Demonstração: Seja S enumerável; Seus elementos podem ser expressos como termos de certa seqüência $\{s_n\}$.

Agora, para $\varepsilon>0$ arbitrário, associamos a cada termo dessa seqüência o intervalo $I_n=(s_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},s_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$; assim temos $S\subset\bigcup_n I_n$.

A medida total desses intervalos é:
$\varepsilon(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots)=\varepsilon$ e está provado. c.q.d.

Proposição 3: A união de uma seqüência $N_1,N_2,N_3,\ldots$ de conjuntos nulos de $\mathbb{R}$ é outro conjunto nulo.
Demonstração: Pode ser feita como exercício, usando-se artifício semelhante ao da demonstração da Propos. 1, cobrindo N_i por seqüências de intervalos de medida total convenientemente escolhida.

Neste ponto é conveniente esclarecer que, se por um lado todo conjunto enumerável é nulo, nem todo conjunto nulo é enumerável!

Como exemplo clássico desse fato temos o célebre conjunto de Cantor definido como o limite da seqüência de conjuntos de pontos $\{S_n\}$ de $[0,1]$ assim definida:

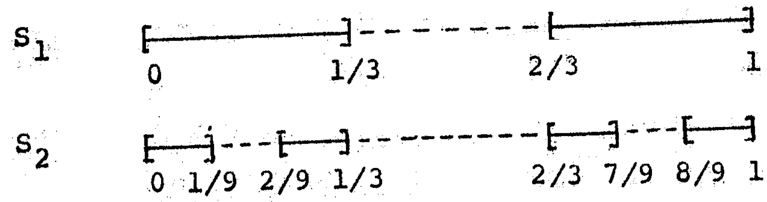
S_1 é obtido de $[0,1]$ subtraído de seu termo central $(1/3,2/3)$
S_2 é obtido de S_1 subtraído dos dois terços centrais de suas duas partes desconectadas.

⋮

S_n é obtido de S_{n-1} subtraído dos terços centrais de suas 2^n partes desconectadas.

(**) Não confundir com espaço nulo! Um conjunto nulo é freqüentemente dito também um conjunto de medida nula.

Ilustração:



Obviamente $S_n \subset S_{n-1}$ $n=2,3,\ldots$

Por outro lado, S_n é a união de intervalos limitados cuja medida total é $(\frac{2}{3})^n$. Portanto o conjunto de Cantor está incluído em S_n $\forall n$ e podemos fazer sua medida total arbitrariamente pequena.

O interessante é que se pode provar, usando representação ternária dos reais de $[0,1]$ que o conjunto de Cantor não é enumerável!

Vejamos:

Na representação ternária dos reais os algarismos utilizados são 0,1 e 2. O leitor familiarizado com representações dos reais diferentes da decimal não terá dificuldades em constatar que os elementos do conjunto de Cantor são os números de representação ternária da forma,

$$0,a_1a_2a_3a_4\ldots$$

onde $a_i = 0$ ou 2 $i = 1,2,3,\ldots$

(Convencionamos $\frac{1}{3} = 0,0222\ldots$; $\frac{2}{3} = 0,2$; $1 = 0,222\ldots$; $\frac{1}{9} = 0,00222\ldots$ etc.)

Para provar a não enumerabilidade desse conjunto usamos artifício idêntico ao do Teorema 1:

Supondo-se que tenha sido possível enumerar o conjunto de Cantor numa seqüência $\{s_n\}$, construimos um elemento s desse mesmo conjunto, $s=0,b_1b_2b_3b_4\ldots$ com:

$$b_n=2 \quad \text{se} \quad a_{nn}=0$$

$$b_n=0 \quad \text{se} \quad a_{nn}=2$$

sendo a_{nn} o n-ésimo algarismo de s_n.

Vemos que $s \neq s_n$ $\forall n$, o que prova que qualquer enumeração do conjunto de Cantor é impossível.

I.2 - Funções Degrau

Definição 4: Seja S um conjunto qualquer de pontos de $\mathbb{R}$. Função característica de S, denotada χ_S é a função que assume o valor 1 em todos os pontos de S e 0 nos demais pontos de $\mathbb{R}$.

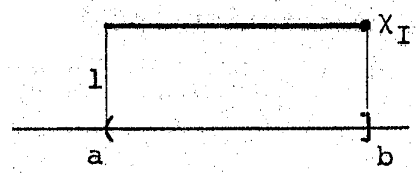
$$\chi_S(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in S\\ 0 & \text{se } x\notin S\end{cases}$$

Nossa primeira definição de integral de Lebesgue será dada para funções características de intervalos limitados I.

A integral de χ_I será simplesmente

$\int\chi_I=m(I)$ ou seja a área do retângulo como ilustrado abaixo:

$I=(a,b]$



Uma propriedade que desejamos para a integral de Lebesgue é que ela seja linear. Nesse caso é preciso aplicá-la a uma classe de funções que constitua um espaço vetorial, o que não ocorre com o conjunto de funções características.

Definição 5: Uma função degrau é uma função ϕ da forma

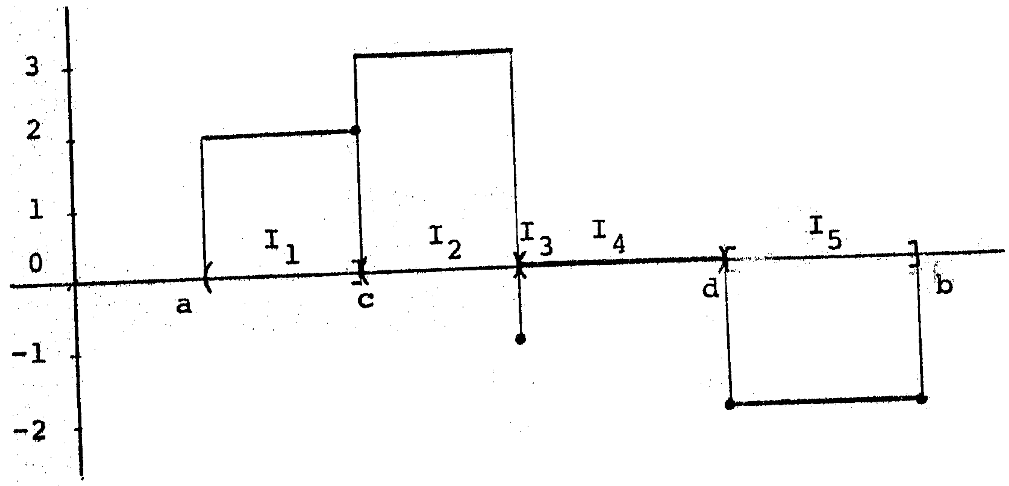
$$\phi=c_1\chi_{I_1}+c_2\chi_{I_2}+\ldots+c_k\chi_{I_k} \qquad (k<\infty)$$

onde $I_1,I_2,\ldots,I_k$ são intervalos limitados (incluindo os reduzidos a um ponto), não necessàriamente disjuntos, e $c_1,c_2,\ldots,c_k$ são números reais.

Exercício 1: Verificar que o conjunto de funções degrau é um espaço vetorial com adição e a multiplicação escalar definidas da forma usual para funções.

Na figura abaixo temos a ilustração de uma função degrau definida sobre um intervalo $(a,b]$:

Exemplo 1: Convenção: • na extremidade do "degrau" significa que a função assume o valor correspondente nesse ponto.



Pode-se ver que a representação de uma função degrau como combinação linear de funções características de intervalos limitados não é única. Na função da figura, por exemplo, podemos ter:

$$\phi = 2\chi_{I_1}+3\chi_{I_2}-\chi_{I_3}-2\chi_{I_5}$$

Porém temos também:

$$\phi = 2\chi_{I_1\cup I_2}+\chi_{I_2\cup I_3}-2\chi_{I_3\cup I_5}$$

entre uma infinidade de outras possíveis representações.

Pode-se provar que para qualquer função degrau

$$\phi=\sum_{i=1}^{2\nu-1}\alpha_i\,\chi_{\mathcal{J}_i}$$

onde ν é certo inteiro positivo, α_i são números reais e os $\mathcal{J}_i$ são intervalos limitados disjuntos. A chave da prova é o fato de que os intervalos I_j têm sempre certo número ν de extremidades distintas que dividem o menor intervalo limitado que contém $\bigcup_{j=1}^{k} I_j$ em $2\nu-1$ intervalos limitados, sendo ν desses, reduzidos a essas mesmas extremidades e os restantes $\nu-1$ intervalos limitados abertos. Na ilustração dada acima, teríamos:

$$\phi=2\chi_{\mathring{I}_1}+2\chi_{[c,c]}+3\chi_{I_2}-\chi_{I_3}+0\chi_{I_4}-2\chi_{[d,d]}-2\chi_{\mathring{I}_5}-2\chi_{[b,b]}$$

com $\nu=5$ e $\mathring{I}$ representando o maior intervalo aberto contido em I.

Agora podemos definir a integral de Lebesgue de uma função degrau:

$$\int\phi = \sum_{i=1}^{k} c_i\, m(I_i)$$

valor esse que se verifica ser o mesmo, para qualquer outra representação de ϕ como combinação linear de funções características de intervalos limitados, usando uma variante do artifício das extremidades distintas dos intervalos.

Exercício 2: Provar que a integral assim definida é linear, isto é:

$$\int \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 = \alpha_1\int\phi_1 + \alpha_2\int\phi_2 \qquad \forall \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Frequentemente, vamo-nos interessar por funções definidas sobre um intervalo limitado I de extremidades $\underline{a}$ e $\underline{b}$ $(b \geq a)$. O conjunto de funções degrau definidas sobre I é também um espaço vetorial que denotaremos D(I).

Proposição 4: Se $\phi \geq \psi$ então $\int\phi \geq \int\psi$

onde $f \geq g$ significa que $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $\phi \geq 0$ e seja

$$\phi = \alpha_1 \chi_{\mathcal{J}_1} + \alpha_2\chi_{\mathcal{J}_2} + \ldots + \alpha_{2\nu-1}\chi_{\mathcal{J}_{2\nu-1}}$$

a representação única de ϕ como combinação linear de funções características de intervalos abertos e de intervalos reduzidos a pontos, disjuntos.

De acordo com nossa suposição, $\alpha_i \geq 0 \quad i=1,2,\ldots,2\nu-1$

Logo $\int\phi = \sum_{i=1}^{2\nu-1} \alpha_i m(\mathcal{J}_i) \geq 0$

Agora para qualquer ϕ temos $\phi-\psi \geq 0$ por hipótese donde:

$\int\phi-\psi \geq 0$, o que, pela linearidade dá o resultado desejado. c.q.d.

I.3 - Construção da integral de Lebesgue

Embora tratar o caso geral não implica em maiores dificuldades, vamo-nos limitar ao caso de integrais ao longo de um intervalo limitado I. Como veremos, à classe de funções para os quais vamos definir a integral de Lebesgue, não será imposta nenhuma condição de ser limitada como se faz para a integral de Riemann.

Evidentemente as funções de D(I) pertencem a tal classe; esta será, aliás, obtida, por extensão de D(I), via inclusão de limites de seqüências de funções degrau num certo sentido que precisaremos a seguir.

O que importa é que para $\{\phi_n\}$ seqüência de D(I) que tende para tal limite vamos supor apenas que $\{\int\phi_n\}$ converge.

Aqui I poderá ser eventualmente substituido por todo $\mathbb{R}$. Adotaremos pois a convenção que, se ϕ_n é definida apenas sobre I denotamos a integral $\int_I \phi_n$.

Enfim, para funções f que podem ser expressas como esse limite de tais seqüências definiremos a integral simplesmente por:

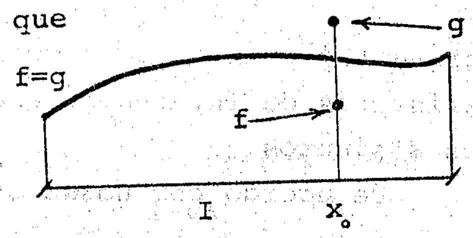
$$\boxed{\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n}$$

Definição 6: Uma propriedade $\mathcal{P}$ que vale para todos os pontos de $\mathbb{R}$ (ou de um intervalo I) exceto eventualmente para pontos de um conjunto nulo é dita valer quase em toda parte. Abrevia-se: $\mathcal{P}$ vale q.t.p.

Exemplo 2: Igualdade q.t.p.: Duas funções f e g são iguais q.t.p se o conjunto dos pontos x tais que

$f(x) \neq g(x)$

constituem conjunto nulo



Exemplo 3: Continuidade q.t.p.: A função tgx é contínua q.t.p em $[0,\pi]$.

Idem para a função de Heaviside H_c assim definida:

$$H_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{se } x < c \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$$

Exemplo 4: A função $\chi_{[1/2,1]}$ é diferenciável continuamente q.t.p em $[0,1]$.

Exemplo 5: A função de Dirichlet definida por

$$D:[0,1] \to \mathbb{R} \qquad D(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } t \text{ é irracional} \end{cases}$$
$$t \mapsto D(t)$$

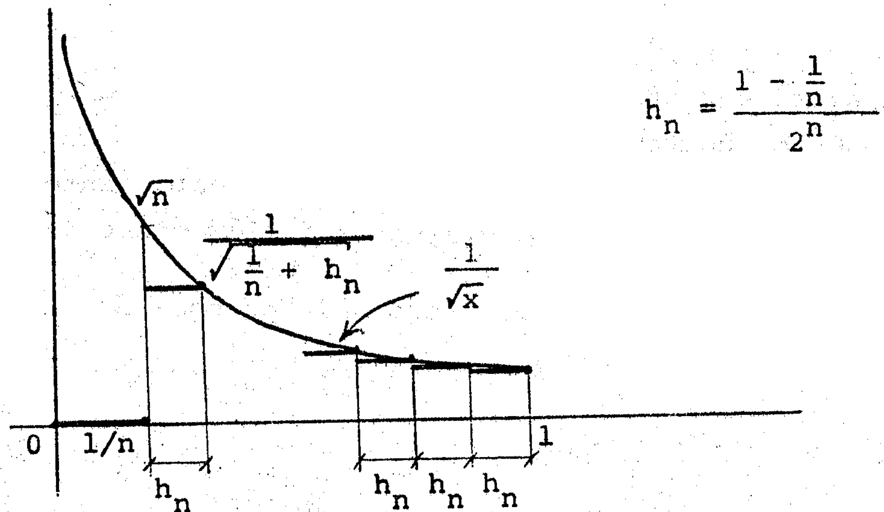
é nula q.t.p. Tente desenhar seu gráfico!

Exercício 3: A função de Dirichlet não é contínua q.t.p. Por que?

Exemplo 6: Convergência q.t.p: A seqüência de funções degrau definida por:

$$\phi_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0\le x\le \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+ih_n}} & \text{se} \quad \frac{1}{n}+(i-1)h_n < x \le \frac{1}{n}+ih_n\ ,\ i=1,2,\ldots,2^n. \end{cases}$$

converge para $\frac{1}{\sqrt{x}}$ q.t.p. em $[0,1]$.



Vamos verificar que $\forall n$, se $x>\frac{1}{n}$, $\phi_n(x)$ converge para $\frac{1}{\sqrt{x}}$ o que provará a convergência q.t.p. pois assim, como o conjunto de pontos de $[0,1]$ onde a convergência não é provada tem medida total arbitrariamente pequena.

De fato temos:

$$\forall x, x>\frac{1}{n}:\ \left|\phi_n(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \le \sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+h_n}} = \sqrt{n}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{2^n}}}\right]$$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} \ge 1-\frac{u}{2}$ se $u<1$ temos $\forall x,\ x>\frac{1}{n}$:

$\left|\phi_n(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{\sqrt{n}(n-1)}{2^{n+1}}$. Agora $\forall \varepsilon>0$ basta escolher

$N(\varepsilon)$ tal que $\frac{\sqrt{N}(N-1)}{2^{N+1}} < \varepsilon$ e temos $\forall n>N(\varepsilon)$ $\left|\phi_n(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}\right|\le\varepsilon$

desde que x não pertença a um intervalo de medida total arbitrariamente pequena.

Teorema 2: Se $\{\phi_n\}$ é uma seqüência crescente de funções de $D(I)$ para o qual $\{\int_I \phi_n\}$ converge, então $\{\phi_n\}$ converge q.t.p (ou ainda $\{\phi_n'(x)\}$ converge para quase todo x).

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\phi_n \geq 0$ pois senão podemos considerar a seqüência $\{\phi_n^1\}$ com $\phi_n^1 = \phi_n - \phi \geq 0$. $\{\int_I \phi_n^1\}$ converge pois $\int_I \phi_n^1 = \int_I \phi_n - \int_I \phi_1$ e $\{\int_I \phi_n\}$ converge.

Com issso então, a convergência de $\{\int_I \phi_n\}$ implica na e xistência de uma constante K tal que

$$\int_I \phi_n \leq K \quad \forall n \ , K > 0.$$

Seja agora $\varepsilon > 0$ arbitrariamente escolhido. Seja S_n^ε o conjunto de todos os pontos x para os quais $\phi_n(x) \geq \frac{K}{\varepsilon}$

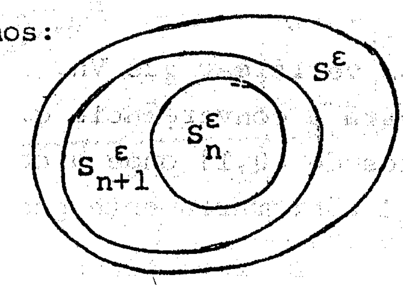
Como ϕ_n é função degrau, pode ser certamente expressa como a união finita de intervalos disjuntos. Além disso,

$\frac{K}{\varepsilon} \chi_{S_n^\varepsilon} \leq \phi_n$ por construção. Logo pela proposição 4

$\frac{K}{\varepsilon} m(S_n^\varepsilon) \leq \int \phi_n$ donde $m(S_n^\varepsilon) \leq \varepsilon$ já que $\int \phi_n \leq K$

Agora como $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ então $S_n^\varepsilon \subset S_{n+1}^\varepsilon$.

Seja $S^\varepsilon = \bigcup_n S_n^\varepsilon$. Esquematicamente temos:



pois S^ε tem que conter todos os pontos x para os quais $\{\phi_n(x)\}$ não converge: Para um tal x, de fato, $\exists$ $N(\varepsilon)$ tal que $\phi_N(x) \geq \frac{K}{\varepsilon}$ donde $x \in S_N^\varepsilon$, se $x \in S^\varepsilon$.

Para completar a prova, basta mostrar que S^ε é a união de intervalos cuja medida total não é maior do que ε. Isso é, porém, conseqüência de:

$S^\varepsilon = \bigcup_n R_n^\varepsilon$ onde $R_1^\varepsilon = S_n^\varepsilon - S_{n-1}^\varepsilon$, $n=2,3,\ldots$, sendo a união disjunta. Devemos portanto ter:

$S_n^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n R_i^\varepsilon$ donde $m(\bigcup_{i=1}^n R_i^\varepsilon) < \varepsilon$ $\forall n$ o que dá o resultado desejado c.q.d

Podemos agora definir a integral de funções f limite q.t.p. num intervalo I (ou em todo $\mathbb{R}$) de sequências crescentes de funções degrau $\{\phi_n\}$ tais que $\{\int_I \phi_n\}$ converge:

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n$$

Vamos denotar o conjunto de tais funções $\mathcal{L}^C(I)$.

Deve ficar claro então que toda função g igual a f exceto eventualmente nos pontos x para os quais $\{\phi_n(x)\}$ não converge, terá a mesma integral.

Deduz-se igualmente desse fato que se f=0 q.t.p então $\int_I f=0$. Outro resultado importante que pode ser deduzido a partir de nossas definições é que se $f\geq 0$ q.t.p e $\int_I f=0$ então f=0 q.t.p.

<u>Exercício 4:</u> Provar que se $f\in\mathcal{L}^c(I)$, $f\geq 0$ q.t.p. e $\int_I f=0$ então f=0 q.t.p.

Uma função de $\mathcal{L}^c(I)$ pode ser dada por um limite q.t.p. de outra(s) seqüência(s) crescente(s) $\{\psi_n\}$ tal(is) que $\{\int_I\psi_n\}$ converge(m). No entanto, pode-se provar o

<u>Lema 1</u>: Se $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ convergem q.t.p. crescentemente para funções f e g respectivamente, com $f\geq g$ q.t.p, então, desde que existam os limites temos:

$$\lim_{n\to\infty}\int_I\psi_n \leq \lim_{n\to\infty}\int_I\phi_n$$

Para a demonstração, ver por exemplo, [18],pg. 36.

Assim, tomando-se g=f q.t.p temos o resultado:

$\lim_{n\to\infty}\int_I\psi_n = \lim_{n\to\infty}\int_I\phi_n$ pois a desigualdade do Lema 1 vale nos dois sentidos.

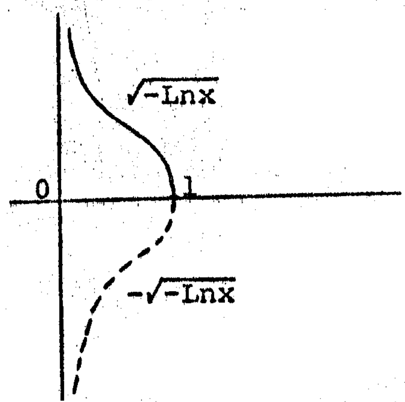
Para verificar que a integral de funções de $\mathcal{L}^c(I)$ tem propriedades de linearidade, seria preciso tomar escalares α_1 e α_2 positivos, senão não teríamos certeza de que

$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2\in\mathcal{L}^c(I)$ se $f_1, f_2\in\mathcal{L}^c(I)$

De fato, se $\alpha_1,\alpha_2\geq 0$, então $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2$ é limite q.t.p. da seqüência crescente $\{\alpha_1\phi_n^1+\alpha_2\phi_n^2\}$ onde $\{\phi_n^1\}$ e $\{\phi_n^2\}$ são seqüências crescentes que convergem q.t.p. a f_1 e f_2 respectivamente. Mas se α_1 ou $\alpha_2\leq 0$ não podemos afirmar a mesma coisa.

O problema é que $\mathcal{L}^c(I)$ não é um espaço vetorial. Assim, por exemplo se desejamos calcular a integral de $\sqrt{-\operatorname{Lnx}}$ para I=[0,1] que é igual à conhecida integral: $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

da distribuição de probabilidades, podemos fazê-lo por intermédio de seqüências crescentes de funções degrau. Seria o mesmo possível para $-\sqrt{-Lnx}$? Verifica-se facilmente que não.



Precisamos pois definir um espaço vetorial que contenha $\mathcal{L}^c(I)$, e procuraremos o menor deles. Esse espaço que será denotado $\mathcal{L}^1(I)$ é obtido com a simples introdução de diferenças de funções $\mathcal{L}^c(I)$: Se $g,h\in\mathcal{L}^c(I)$

$$f=g-h \in \mathcal{L}^1(I)$$

A integral de f é definida da maneira mais óbvia possível, isto é:

$$\int_I f = \int_I g - \int_I h$$

Aqui também existe um problema de consistência como no caso de definição de funções degrau, pois a representação de f como diferença de funções de $\mathcal{L}^c(I)$ não é única. No entanto poderá ser provado o seguinte como

__Exercício 5__: Se $g_1,h_1,g_2,h_2\in\mathcal{L}^c(I)$ tais que $g_1-h_1=g_2-h_2$ então

$$\int_I g_1-h_1 = \int_I g_2-h_2.$$

Chegamos enfim à definição da __integral de Lebesgue__:

Para toda função $f\in\mathcal{L}^1(I)$ definimos

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_I\phi_n - \int_I\psi_n$ onde $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ convergem crescentemente q.t.p. em I para g e h respectivamente e f=g-h.

O espaço $\mathcal{L}^1(I)$ que parece de definição tão complicada pode ser simplesmente apresentado como o espaço das funções Lebesgue-integráveis em I, isto é, para as quais $\int_I f$ existe. Como nesse caso $\int_I f$ é finita $\mathcal{L}^1(I)$ é ainda mais comumente apresentado como o espaço de funções tais que $\int_I f < \infty$

onde com o símbolo de integral fica subentendida a definição toda da integral de Lebesgue.

Como veremos as funções de $\mathcal{L}^1(I)$ na verdade se revelam ser velhas conhecidas numa grande gama de casos práticos e aplicações.

Enfim, para funções de $\mathcal{L}^1(I)$ a integral é linear o que se pode verificar fazendo-se as diversas hipóteses quanto aos sinais dos escalares α_1 e α_2.

Vejamos ainda alguns resultados importantes que podem ser provados como exercícios usando o Lema 1:

<u>Proposição 5</u>: Se $f \in \mathcal{L}^1(I)$ e $f \geq 0$ então $\int_I f \geq 0$.

<u>Proposição 6</u>: Se $f \in \mathcal{L}^1(I)$ então $|f| \in \mathcal{L}^1(I)$ (Supondo $f=g-h$ $g,h \in \mathcal{L}^C(I)$, na demonstração provar e usar a relação: $|f| = \max\{g,h\} - \min\{g,h\}$).

<u>Obs</u>: Como consequência $\int_{[0,\pi]} tgx$ não é zero pois tal integral não $\exists$!

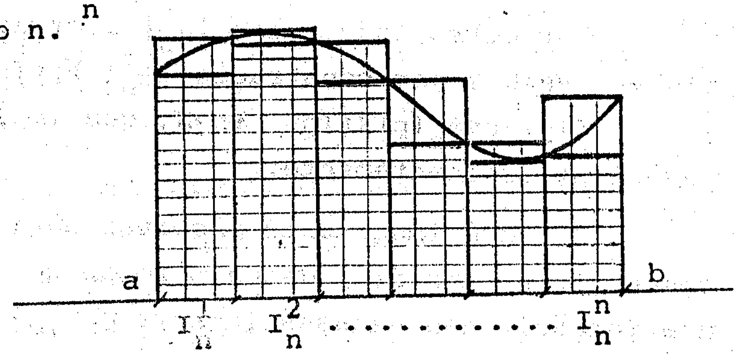
I.4 - Relações com a integral de Riemann

Um primeiro ponto que convém esclarecer para que situemos melhor nosso espaço $\mathcal{L}^1(I)$ é que as funções Riemann-integráveis são todas Lebesgue-integráveis. Para que possamos melhor entender esse aspecto relembramos a definição da integral de Riemann de uma função f sobre um intervalo I.

Para partições arbitrárias do intervalo limitado I de extremidades a e b em intervalos disjuntos $\{I_n^i\}_{i=1}^n$ construimos a soma inferior e a soma superior das áreas dos retângulos de mesma base igual a $m(I_n^i)$ e alturas respectivamente iguais a $\underline{f}_n^i = \inf_{x \in I_n^i} f(x)$ e $\overline{f}_n^i = \sup_{x \in I_n^i} f(x)$ supondo-se que tais valores sejam finitos para todo n.

Soma inferior:

Soma superior:



Então se a integral de Riemann inferior:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underline{f}_n^i \, m(I_n^i)$$

e a integral de Riemann Superior:

$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{f}_n^i m(I_n^i)$, existirem e forem iguais, f é dita integrável na sentido de Riemann.

Observa-se da definição acima que se f é Riemann-integrável f deve ser <u>limitada</u>.

Vejamos agora alguns tipos especiais de funções que são de $\mathcal{L}^1(I)$ antes de concluirmos nossa assertiva do início deste parágrafo.

Em primeiro lugar, se $f\in \overset{\circ}{C}[a,b]$ então $f\in\mathcal{L}^1[a,b]$ (ou $\mathcal{L}^1(I)$, I de extremidades a e b).

De fato, partindo-se sucessivamente o intervalo $[a,b]$ em 2^n subintervalos de igual medida, por exemplo, de tipo $[\,,)$ e $[\,,]$ o último, podemos construir uma seqüência crescente $\{\phi_n\}$ de funções degrau onde $\phi_n(x)$ sobre cada intervalo da partição assume o menor valor de f(x) (inf) sobre o mesmo.

$\{\int_{[a,b]}\phi_n\}$ converge pois $\int_{[a,b]}\phi_n \le (b-a)\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$ e $\{\int_{[a,b]}\phi_n\}$ é seqüência crescente. Além disso pode-se provar que $\{\phi_n(x)\}$ converge para f(x) para todo x, sem grandes dificuldades.

Senão vejamos: Se f(x) é contínua em $p\in[a,b]$, $\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0$ tal que $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$ desde que $|x-p|<\delta$.

$\forall\varepsilon>0$ e certo p, escolhamos N de modo que $\frac{b-a}{2^N} < \delta$

Como p está contido a fortiori em um dos 2^N intervalos de ϕ_N, para qualquer x desse intervalo temos; $|x-p|<\delta$ donde:

$f(p)-\varepsilon < f(x) < f(p)+\varepsilon$ e pela definição de ϕ_N com ínfimos:

$f(p)-\varepsilon \le \phi_N(p) \le f(p)$

Por outro lado, como $\{\phi_n\}$ é crescente temos $\phi_n(p)\ge\phi_N(p)\ge f(p)-\varepsilon$ $\forall n>N$ e por construção $\phi_n(p)\le f(p)$ $\forall n>N$, ou seja

$f(p)-\varepsilon\le\phi_n(p)\le f(p)$ $\forall n>N$, que implica que $\{\phi_n(p)\}$ converge para f(p) crescentemente.

O que é importante observar aqui é que na verdade $\{\phi_n(p)\}$ convergiria para f(p) desde p fosse um ponto de continuidade de uma função f não necessàriamente $\overset{\circ}{C}[a,b]$. Portanto, com a mesma construção, $\{\phi_n\}$ convergiria q.t.p para uma função f desde que ela seja contínua q.t.p.

Voltando a nossa análise, se $f \in C^0[a,b]$ temos pois:

$$\int_{(a,b)} f = \lim_{n\to\infty} \int_{(a,b)} \phi_n \quad \text{e } f \in \mathcal{L}^1[a,b] \text{ por defini}$$

Podemos estender o processo e o resultado a funções f somente limitadas, isto é, para as quais $\exists$ K>0 tal que

$$-K \le f(x) \le K \quad \forall x \in [a,b]$$

pois nesse caso podemos substituir os valores mínimos de f(x) nos subintervalos das partições por inf f(x) que são finitos. Nesse caso, entretanto só podemos garantir que, a seqüência $\{\phi_n\}$ convergirá necessariamente para f q.t.p. se os pontos de des - continuidade de f formarem um conjunto nulo, de acordo com a observação acima (pense no processo com a funçãode Dirichlet). Então de forma idêntica à do caso anterior

$\{\int_{[a,b]}\phi_n\}$ converge pois $\int_{[a,b]}\phi_n \le K(b-a)$ $\forall n$ e $\{\int_{[a,b]}\phi_n\}$ é crescente.

Logo $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[a,b]}\phi = \int_{[a,b]} f$ se os pontos de descontinuidade de f formam conjunto nulo.

Enfim, como em qualquer dos dois casos - f é também limitada, podemos construir uma seqüência crescente $\{-\psi_n\}$ de funções degrau baseada no mesmo princípio da bisseção sucessiva de subintervalos de [a,b] e tomando valores ínfimos de -f nesses subintervalos. Novamente temos:

$$\{\int_{[a,b]} - \psi_n\} \text{ converge e } \{-\psi_n\} \text{ converge para } -f \text{ q.t.p.}$$

se os pontos de descontinuidade de f formarem conjunto nulo.

Como $\{\psi_n\}$ é seqüência <u>decrescente</u> que converge q.t.p em I para f também, o resultado é que construimos as somas superior e inferior que tendem para o mesmo limite que é $\int_{[a,b]} f$. Com isso podemos concluir o teorema:

<u>Teorema 4:</u> Se f é limitada num intervalo [a,b] e os pontos de descontinuidade de f formam um conjunto nulo, então $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$.

O que postula esse teorema está perfeitamente de acordo com a condição que se verifica necessária e suficiente para que uma função f seja Riemann-integrável num intervalo $[a,b]$ (ver por exemplo [18], pag. 53)

"f é função limitada e descontínua no máximo num conjunto nulo de pontos".

A conclusão de tudo isso é que para tais funções tudo que é conhecido valer para a integral de Riemann vale também para a integral de Lebesgue uma vez que elas coincidem. Em particular no que diz respeito ao <u>Teorema fundamental do Cálculo Integral</u> e a <u>primitivas</u>.

I.5 - Teoremas de Convergência

Vejamos algumas propriedades de seqüências convergentes q.t.p. de funções de $\mathcal{L}^1(I)$ o que, entre outras coisas, nos permitirá estudar mais tarde espaços normados de funções definidas a partir de suas propriedades de integração.

A primeira dessas propriedades é o:

<u>Teorema 5</u> (Teorema da Convergência Monótona)

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência monótona (crescente ou decrescente) de funções de $\mathcal{L}^1(I)$ tal que,

$$\exists\ K > 0 \quad \text{tal que} \quad \left|\int_I f_n\right| \leq K,\ \forall n$$

Então $\{f_n\}$ converge q.t.p. para uma função f,

$$f \in \mathcal{L}^1(I) \quad e \quad \int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$$

Provemos o teorema inicialmente para seqüências só crescentes de $\mathcal{L}^e(I)$ que convergirão q.t.p. para uma função de $\mathcal{L}^e(I)$.

<u>Prova</u>:

Como $f_n \in \mathcal{L}^e(I)$, $\forall n$, devemos ter seqüências crescentes $\{\phi_n^i\}$ de funções degrau que convergem q.t.p. para f_n, $n=1,2,3,\ldots$ e tais que

$$\lim_{i\to\infty} \int_I \phi_n^i = \int_I f_n \quad \text{para cada } n.$$

Seja agora $\phi_n = \max\limits_{1\leq i,j\leq m} \{\phi_j^i\}$

Verifica-se sem dificuldades que $\phi_m \in b(I)$ e que

$$\phi_m \leq \phi_{m+1} \quad \forall m.$$

Além disso, devemos ter também $\phi_m \le f_m$ q.t.p por construção, pois para cada m,

$$f_m(x) \ge f_j(x) \ge \phi_j^i(x)$$

para quase todo x, i qualquer e $j \le m$.

Por conseguinte $\int_I \phi_m \le K$, $\forall m$, e como $\{\int_I \phi_m\}$ é crescente deve convergir, por um axioma de convergência em $\mathbb{R}$.

Logo pelo Teorema 2, $\{\phi_m\}$ converge q.t.p. para uma função de $\mathcal{L}^c(I)$ e

$$\lim_{m\to\infty} \int \phi_m = \int_I f$$

Só fica faltando provar que $\int_I f_n \to \int_I f$ e que $f_n \to f$ q.t.p.

Para tanto lembramos em primeiro lugar que $\phi_n^m \le \phi_m$ para $n \le m$ e passando ao limite em m, mantendo-se n fixo:

$$f_n \le f \quad \text{q.t.p. para cada n.}$$

Como $\phi_n \le f_n$ $\forall_n$, $\phi_n \to f$ q.t.p. e $\int_I \phi_n \to \int_I f$, temos o resultado desejado.

Para provarmos o teorema no caso geral precisamos do

Lema 2

Seja $f \in \mathcal{L}^1(I)$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, g, h \in \mathcal{L}^c(I)$ tais que $f = g - h$, $h \ge 0$ e $\int_I h < \varepsilon$.

Demonstração:

Como $f \in \mathcal{L}^1(I)$, $\exists\, g_1, h_1 \in \mathcal{L}^c(I)$ tais que $f = g_1 - h_1$. Portanto há uma seqüência $\{\psi_n\}$ de funções degrau que converge crescentemente para h_1 q.t.p. Além disso $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ tal que,

$$\int_I h_1 - \int_I \psi_N < \varepsilon$$

Definindo-se $h_2 = h_1 - \psi_N$ temos:

$$h_2 \ge 0 \quad \text{q.t.p.}, \quad h_2 \in \mathcal{L}^c(I) \quad \text{e} \quad 0 \le \int_I h_2 < \varepsilon$$

Por outro lado $g_2 = g_1 - \psi_N \in \mathcal{L}^c(I)$ e $f = g_2 - h_2$

O lema fica provado tomando-se $h(x) = \begin{cases} h_2(x) & \text{se } h_2(x) \ge 0 \\ 0 & \text{se } h_2(x) \le 0 \end{cases}$ e $g = f + h$

onde $g = g_2$ e $h = h_2$ q.t.p.

Demonstração do Teorema da Convergência Monótona

Podemos, sem perda da generalidade, supor que $\{f_n\}$ é crescente. Seja agora $d_1=f_1$, $d_n=f_n-f_{n-1}$ ou seja, $f_n=d_1+d_2+\ldots+d_n$ com $d_n\geq 0$ para $n>1$.

Aplicando o Lema 2 à função d_n com $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$ para cada $n\geq 1$ devemos encontrar duas funções $g_n, h_n \in \mathcal{L}^c(I)$ tais que $d_n=g_n-h_n$, $h_n\geq 0$,

$$\phi \leq \int_I h_n < 1/2^n$$

e por conseguinte, $g_n\geq 0$ para $n>1$

Agora seja $G_n=\sum_{i=1}^{n} g_i$ e $H_n=\sum_{i=1}^{n} h_i$

donde $f_n=G_n-H_n$ e como se constata, $\forall n$, $G_n, H_n \in \mathcal{L}^c(I)$. Além disso, $\{G_n\}$ e $\{H_n\}$ são crescentes a partir de $n=2$ e

$$\int_I H_n < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n} < 1, \quad \forall n$$

donde se conclui que:

$$\int_I G_n \leq K+1, \quad \forall n$$

Aplicamos agora a primeira parte do teorema à $\{G_n\}$ e $\{H_n\}$ crescentes que devem convergir q.t.p. para duas funções g e h de $\mathcal{L}^c(I)$ respectivamente,

com $\lim_{n\to\infty} \int_I G_n = \int_I g$ e $\lim_{n\to\infty} \int_I H_n = \int_I h$

Portanto $\{f_n\}$ converge q.t.p. para g-h, donde $f\in \mathcal{L}^1(I)$ e $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=\int_I f$

c.q.d.

———x———

Com esse resultado, podemos constatar que integrais impróprias de Riemann correspondem a integrais comuns de Lebesgue.

Exemplo 7 A função $1/\sqrt{x} \in \mathcal{L}^1[0,1]$

De fato, a seqüência $\{f_n\}$ assim definida:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{se } x\geq 1/n \\ 0 & \text{se } 0\leq x<1/n \end{cases}$$

é crescente em $[0,1]$ e é de funções Riemann integráveis para todo n. Logo:

$$\int_{[0,1]} f_n = \int_{1/n}^{1} f_n(x)\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_{1/n}^{1} = 2(1-\sqrt{1/n})\text{, ou seja,}$$

$$\int_{[0,1]} f_n \leq 2, \quad \forall n$$

O teorema da convergência monõtona se aplica com $K=2$ e $\int_{[0,1]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n$ para f, função limite q.t.p. de $\{f_n\}$. Incidentalmente $1/\sqrt{x}$ é tal limite pois $\{f_n(x)\}$ sõ não converge para $1/\sqrt{x}$ para $x=0$. Logo:

$$\int_{[0,1]} 1/\sqrt{x} = 2.$$

Outro resultado clássico importante da Teoria da Integração ẽ o Lema de Fatou que veremos mais adiante. Antes porém devemos introduzir dois conceitos de limite freqüentemente utilizados em Anãlise Funcional:

Seja $\{s_n\}$ uma seqüência de $\mathbb{R}$ convergente ou não.

Vamos definir duas seqüências $\{\ell_m\}$ e $\{u_m\}$ associadas a $\{s_n\}$ com:

$$\ell_m = \inf\{s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots\} = \inf_{n\geq m}\{s_n\}$$
$$u_m = \sup\{s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots\} = \sup_{n\geq m}\{s_n\}$$

Dessa definição deduzimos que $\{\ell_m\}$ ẽ não decrescente e $\{u_n\}$ ẽ não crescente, isto ẽ:

$$\ell_m \geq \ell_{m-1} \text{ e } u_m \leq u_{m-1} \quad \forall m.$$

Como se trata de seqüências monõtonas de $\mathbb{R}$, podemos sempre calcular $\lim_{m\to\infty} \ell_m$ e $\lim_{m\to\infty} u_m$ que podem eventualmente ser $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente.

Definimos então esses dois limites como limite inferior e limite superior de $\{s_n\}$ respectivamente, denotados:

$$\liminf s_n = \lim_{m\to\infty} \ell_m$$

$$\limsup s_n = \lim_{m\to\infty} u_m$$

Observa-se que se $\{s_n\}$ ẽ limitada os limites superior e inferior são finitos.

<u>Exemplos:</u> Seja a seqüência $\{s_n\} = \{1,-1,1,-1,1,-1,\ldots\}$

temos: $\ell_m = \inf_{n\geq m}\{s_n\} = -1 \quad \forall m$

$u_m = \sup_{n\geq m} s_n = 1 \quad \forall m$

Portanto $\limsup s_n = 1$ e $\liminf s_n = -1$

Observa-se que nesse caso $\{s_n\}$ não converge.

Claramente temos $u_m \geq \ell_m$ $\forall m$, donde

$$\limsup s_n \geq \liminf s_n$$

Agora, o que não é difícil constatar é que, se $\{s_n\}$ converge, então os limites inferior e superior de $\{s_n\}$ são iguais. Inversamente, se essa igualdade ocorre $\{s_n\}$ converge e temos então

$$\liminf s_n = \limsup s_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

<u>Lema 3</u> (Lema de Fatou)

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções positivas de $\mathcal{L}^1(I)$ que converge q.t.p. para uma função f, e tal que $\exists$ $K\geq 0$ tal que $\int_I f_n \leq K$ $\forall n$. Então $f \in \mathcal{L}^1(I)$ e:

$$\int_I f \leq \liminf \int_I f_n$$

<u>Demonstração</u>: Definimos uma seqüência $\{g_m\}$ por

$$g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\}$$

de forma que $g_m \leq f_n$ $\forall m\leq n$. Suponhamos por enquanto que $g_m \in \mathcal{L}^1(I)$ $\forall m$. Temos pois:

$$\int_I g_m \leq \int_I f_n \quad \text{sempre que } m\leq n \text{ o que dá}$$

$$\int_I g_m \leq \ell_m \quad \forall m \text{ onde } \ell_m = \inf_{n\geq m} \{\int_I f_n\}$$

Por outro lado, devido à convergência q.t.p. de $\{f_n\}$ para f, $\{g_m\}$ converge também para f q.t.p. De fato:

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = \liminf f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ para quase todo } x \text{ em } I.$$

Enfim, como $\{g_m\}$ é crescente, podemos aplicar o teorema da convergência monótona a $\{\int_I g_m\}$ com

$$\int_I g_m \leq K \quad \forall m, \text{ donde o resultado.}$$

Para completar a demonstração, resta provar que $g_m \in \mathcal{L}^1(I)$

Em primeiro lugar temos que se $h_1, h_2 \in \mathcal{L}^1(I)$

$$\min(h_1,h_2) \in \mathcal{L}^1(I) \quad \text{pois}$$

$$\min(h_1,h_2) = \frac{1}{2}(h_1+h_2) - \frac{1}{2}|h_1-h_2|$$

o que se poderá verificar como exercício.

Agora para $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{L}^1(I)$

$$\min(h_1,h_2,h_3)=\min(h_1,\min(h_2,h_3)) \Rightarrow \min(h_1,h_2,h_3) \in \mathcal{L}^1(I)$$

Por indução finita conclui-se que se $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathcal{L}^1(I)$ então:

$$\min(h_1,h_2,\ldots,h_k)=\min(h_1,\min(h_2,\min(h_3,\ldots,\min(h_{k-1},h_k)\ldots) \in \mathcal{L}^1(I).$$

Considerando-se então a seqüência $\{\ell_{mk}\}_{k=1,2,\ldots}$ monótona crescente definida por

$$\ell_{mk}=\min\{f_m,f_{m+1},\ldots,f_{m+k}\}$$

temos:

$$\ell_{mk} \in \mathcal{L}^1(I) \quad \forall m,k.$$ Além disso, por construção,

temos:

$$\int_I \ell_{mk} \leq \int_I f_m \quad \forall k, \text{ m fixo.}$$

Logo $$\int_I \ell_{mk} \leq K \quad \forall k \text{ e certo m.}$$

Daí, pelo Teorema da convergência monótona deduz-se que $g_m \in \mathcal{L}^1(I)$ c.q.d.

O Lema de Fatou indica que, em se tratando de seqüências de funções positivas convergentes q.t.p., a integral da função limite q.t.p não é necessariamente igual ao limite da seqüência de integrais, caso essa convirja. Vejamos um exemplo.

Exemplo 9: Seja $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1[0,1]$, definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{se } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

Temos $f_n \geq 0$ $\forall n$ e $f_n \to f$ q.t.p em $[0,1]$ onde $f=0$, já que só para $x=0$ não converge $\{f_n(x)\}$.

Por outro lado $\int_{[0,1]} f_n = 1$ $\forall n$ donde

$$0=\int_{[0,1]} f \leq \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = 1.$$

Observamos que o Lema de Fatou aparece aqui numa versão simplificada pois o original nem supõe que $\{\int_I f_n\}$ seja limitada. Na aplicação dada à seguir, entretanto, essa condição será satisfeita.

Teorema 6 (Teorema da Convergência Dominada)

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções de $\mathcal{L}^1(I)$ que convergem q.t.p. para uma função f e que é dominada por uma função $g \in \mathcal{L}^1(I)$ no sentido que $|f_n| \le g$, $\forall n$. Então $f \in \mathcal{L}^1(I)$ e $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$

Demonstração

Como $\pm f_n \le g$, $\forall n$, devemos ter $\pm\int_I f_n \le \int_I g$, $\forall n$.

Como $g+f_n \ge 0$ podemos aplicar o Lema de Fatou à seqüência $\{g+f_n\}$ que converge q.t.p. para f+g com $\int_I g + f_n \le 2\int g$, $\forall n$:

$$\int_I f+g \le \liminf \int_I g+f_n \Rightarrow \int_I f \le \liminf \int_I f_n$$

Por outro lado $g-f_n \ge 0$. Podemos de novo aplicar o Lema de Fatou à seqüência $\{g-f_n\}$ que converge q.t.p. para f-g com $\int_I g-f_n \le 2\int_I g$, $\forall n$:

$$\int_I g-f \le \liminf \int_I g-f_n \Rightarrow -\int_I f \le \liminf -\int_I f_n$$

Como $\liminf -s_n = -\limsup s_n$ (verificar), temos:

$\int_I f \ge \limsup \int_I f_n$

o que dá $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ c.q.d.

O teorema da convergência dominada indica, entre outras conclusões, que a convergência q.t.p. de uma seqüência de funções Lebesgue - integráveis para uma função f, não implica necessàriamente que f seja Lebesgue-integrável. É preciso uma condição a mais; no caso que a seqüência seja em módulo dominada q.t.p por uma função integrável.

Assim, por exemplo, a seqüência $\{f_n\}$ de funções de $\mathcal{L}^1[0,1]$ definidas por: $f_n(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } 1/n < x \le 1 \\ 0 & \text{se } 0 \le x \le 1/n \end{cases}$

converge q.t.p. para 1/x. No entanto como $\{f_n\}$ não é denominada por nenhuma g, não podemos garantir que 1/x é de $\mathcal{L}^1[0,1]$, como de fato não é.

I.6. Espaços L^p.

Já definimos o espaço de funções $\mathcal{L}^1(I)$ a partir de suas propriedades de integração. Neste parágrafo trataremos de uma família de tais espaços munida de norma adequada, que tem expressivas aplicações, em especial nos domínios da otimização e das equações diferenciais.

Como $\mathcal{L}^1(I)$ é definido como o espaço de funções para as quais $\int_I f$ existe e $\int_I f < \infty$, seria natuaral normá-lo por:

$$\boxed{||f||_1 = \int_I |f|}$$

uma vez que $f \in \mathcal{L}^1(I) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(I)$

Como se pode observar duas das exigências da definição de uma norma são satisfeitas, ie,

2. $||\lambda f||_1 = \int_I |\lambda . f| = \int_I |\lambda| |f| = |\lambda| \; ||f||_1$
3. $||f+g||_1 = \int_I |f+g| \leq ||f||_1 + ||g||_1$

Como $|f+g| \leq |f| + |g|$, temos $\int_I |f+g| \leq \int_I |f| + |g|$
ou seja

$$||f+g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$$

No entanto se $\int_I |f|=0$ temos $|f|=0$ q.t.p.
ou seja, $f=0$ q.t.p., o que não convém à definição, pois o vetor 0 de um espaço vetorial deve ser único e nesse caso temos todo um subespaço $N(I)$ de $\mathcal{L}^1(I)$ para o qual $||f||_1=0 \Rightarrow f \in N(I)$ que é o conjunto de funções nulas q.t.p. em I. Por isso, para podermos trabalhar com tal norma, será necessária a definição do espaço quociente $\mathcal{L}^1(I)/N(I)$ e que denotaremos por $L^1(I)$.

Agora, supondo-se $[f] \in L^1(I)$, onde f é um representante qualquer de $[f]$, e definindo-se $||[f]||_1 = \int_I |f|$, vemos que, não só as 2 exigências da definição de norma permenecem satisfeitas, como também

$$||[f]||_1 = 0 \Rightarrow [f] = 0$$

ou seja, $f \in N(I)$ que é o vetor nulo de $L^1(I)$

Na prática, como a integral de Lebesgue ignora tudo o que ocorre num conjunto nulo, vamos escrever freqüentemente f para representar um elemento de $\mathcal{L}^1(I)$ em vez de $[f]$, ficando subentendido que neste caso f é apenas um representante de classe.

Podemos definir também os espaços $\mathcal{L}^p(I)$ de funções f, cuja p-ésima potência de $|f|$, $1 \leq p < \infty$, é Lebesgue-integrável, i.e. de $\mathcal{L}^1(I)$.

Verifica-se que $\mathcal{L}^p(I)$ é um espaço vetorial mas $[\int_I |f|^p]^{1/p}$ não é propriamente uma norma.

Porém, definindo-se $L^p(I) = \mathcal{L}^p(I)/N(I)$, teremos, de forma análoga ao caso de $L^1(I)$, que à expressão $||f||_p = [\int_I |f|^p]^{1/p}$ corresponde uma norma, pelo menos quanto às duas primeiras condições.

Quanto à terceira, provém da desigualdade de Minkowski: Se $f,g \in \mathcal{L}^p(I)$ vale:

$$\boxed{[\int_I |f+g|^p]^{1/p} \leq [\int_I |f|^p]^{1/p} + [\int_I |g|^p]^{1/p}}, \text{ i.e.}$$

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

A demonstração dessa desigualdade é conseqüência da desigualdade de Hölder: Se $f \in \mathcal{L}^p(I)$ e $g \in \mathcal{L}^q(I)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale:

$$\boxed{\int_I fg \leq [\int_I |f|^p]^{1/p} [\int_I |g|^q]^{1/q}}$$

De fato, admitindo-a conhecida temos:

$$\int_I |f+g|^p \leq \int_I |f||f+g|^{p-1} + \int_I |g||f+g|^{p-1}$$

Aplicâmo-la agora a cada um dos termos da soma acima e obtemos

$$\int_I |f+g|^p \leq ([\int_I |f|^p]^{1/p} + [\int_I |g|^p]^{1/p})[\int_I |f+g|^{(p-1)q}]^{1/q}$$

Como $(p-1)q = p$ e $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ temos a desigualdade de Minkowski. Quanto à desigualdade de Hölder é conseqüência da desigualdade fundamental:

Se $a,b \geq 0$, $p > 1$, $\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com igualdade se e somente se $a^p = b^q$. (Ver por exemplo [7] pag.79)

Temos(*)

$$\int_I fg \leq ||f||_p ||g||_q \int_I \frac{|fg|}{||f||_p ||g||_q}$$

Mas $\dfrac{|fg|}{||f||_p ||g||_q} \leq \dfrac{|f|^p}{p||f||_p^p} + \dfrac{|g|^q}{q||g||_q^q}$ donde se obtém

$$\int_I fg \leq ||f||_p ||g||_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = ||f||_p ||g||_q \text{ como desejado.}$$

Como conseqüência fica que, se $f \in \mathcal{L}^p(I)$ e $g \in \mathcal{L}^q(I)$ então $fg \in \mathcal{L}^1(I)$.

(*) Consideramos possível definir-se a integral de fg se $f \in \mathcal{L}^p(I)$ e $g \in \mathcal{L}^q(I)$. Essa possibilidade, a rigor, deveria ser justificada (ver, por exemplo [7] página 80).

<u>Exemplo 10</u>: Seja $p=3/2$ e $q=3$

Pode-se verificar que $x^{-1/3} \in \mathcal{L}^{3/2}[0,1]$ mas $x^{-1/3} \notin \mathcal{L}^{3}[0,1]$.

De fato, como sabemos:

$(x^{-1/3})^{3/2} = x^{-1/2} \in \mathcal{L}^{1}[0,1]$. Porém, $\int_{[0,1]} \frac{1}{x^3} = \lim_{\varepsilon \to} - \operatorname{Ln}\varepsilon = +\infty$.

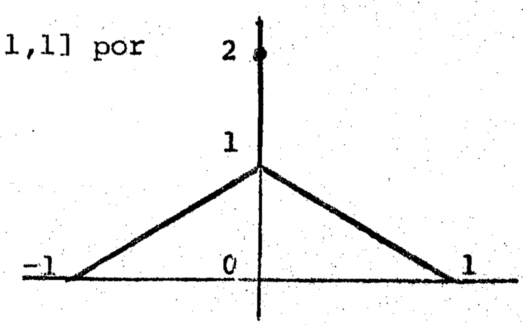
Analogamente temos:

$x^{-1/6} \in \mathcal{L}^{3}[0,1]$ e $x^{-1/6} . x^{-1/3} = x^{-1/2} \in \mathcal{L}^{1}[0,1]$.

Podemos ainda definir um espaço $\mathcal{L}^{\infty}(I)$, que será o espaço das funções limitadas sobre I, exceto eventualmente, sobre um subconjunto nulo de I. Isso quer dizer que se $f \in \mathcal{L}^{\infty}(I)$, existe uma constante positiva K, tal que, $|f(x)| \leq K$ para quase todo x em I.

<u>Exemplo 11</u>: A função definida em $[-1,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x=0 \end{cases}$$



é limitada por 2. No entanto ela é limitada q.t.p. por 1.

A norma que definiremos, não para $\mathcal{L}^{\infty}(I)$, mas para $L^{\infty}(I) = \mathcal{L}^{\infty}(I) / N(I)$ é:

$$\| f \|_{\infty} = \inf . \{K / K \geq |f(x)| \text{ q.t.p. em } I\}$$

Tal valor é chamado o "supremo essencial" de f, que difere do supremo em geral, uma vez que este deve majorar $|f(x)|$ para todo x,

Denotaremos:

$$\| f \|_{\infty} = \underset{x \in I}{\text{sup.ess.}} |f(x)|$$

No exemplo anterior $\| f \|_{\infty} = 1$.

Exercício 6: Verificar que ao supremo essencial definido acima corresponde uma norma para $L^{\infty}(I)$, verificando também que ele é um espaço vetorial.

O resultado importante que temos agora é o seguinte:

Teorema 7:

Os espaços $L^p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach com a norma.

$$\| f \|_p = [\int_I |f|^p]^{1/p}$$

Para provarmos este teorema necessitamos do seguinte Lema:

Lema 4: Num espaço vetorial normado X, se uma subseqüência f_n $\{f_{n_k}\}_{k=1,2,...}$ de uma seqüência de Cauchy $\{f_n\}$ converge para $f \in X$, então $\{f_n\}$ converge para $f \in X$.

Demonstração:

$\forall$ $\varepsilon/2 > 0$, $\exists$ $K(\varepsilon)$, tal que,

$$\| f_{n_k} - f \|_p \leq \varepsilon/2, \ \forall \ k > K(\varepsilon)$$

Por outro lado $\exists N(\varepsilon)$ tal que $\| f_m - f_n \| < \varepsilon/2$, $\forall n,m > N(\varepsilon)$.

Como $\| f_n - f \|_p \leq \| f_n - f_{n_k} \|_p + \| f_{n_k} - f \|_p$

basta escolher $M(\varepsilon) = \max[N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)}]$, $m = n_k$ com k, tal que $n_k > M(\varepsilon)$, para se ter um $M(\varepsilon)$ / $\| f_n - f \|_p < \varepsilon$, $\forall n > M(\varepsilon)$. c.q.d

Demonstração do Teorema 7

Seja $\{[f_n]\}$ uma seqüência de Cauchy de $L^p(I)$. Pelo Lema 4, para provarmos que $\{[f_n]\}$converge para um elemento $[f] \in L^p(I)$ basta provar que uma subseqüência $\{[f_{n_k}]\}$ convenientemente escolhida de $\{[f_n]\}$ converge para $[f]$. É sempre possível escolher uma subseqüência $\{[f_{n_k}]\}_{k=1,2,...}$ de tal maneira que $\| [f_{n_k}] - [f_{n_{k-1}}] \| \leq \frac{1}{2^k}$ a partir da condição de Cauchy com uma supressão adequada de termos. Trabalharemos com um representante f_{n_k} da classe $[f_{n_k}]$.

Vamos construir uma seqüência crescente de $L^p(I)$

$$g_m = |f_{n_1}| + \sum_{k=2}^{m} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|$$

que tem certamente a propriedade $|f_{n_m}| \leq g_m$. Pode-se verificar como exercício que a desigualdade de Minkowski pode ser aplicada reiteradamente a somas de mais de duas parcelas o que no caso dá:

$$[\int_I g_m^p]^{1/p} \leq [\int_I |f_{n_1}|^p]^{1/p} + \sum_{k=2}^{n} [\int_I |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|^p]^{1/p}$$

Portanto, por construção

$$\| g_m \|_p \leq \| f_{n_1} \|_p + \sum_{k=1}^{n} \| f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \|_p = \| f_{n_1} \|_p + 1, \quad \forall m$$

Como $\{\| g_m \|_p\}$ é seqüência crescente de $\mathbb{R}$, limitada superiormente, deve convergir. Assim $\{g_m^p\}$ é seqüência positiva crescente de $L^1(I)$ tal que $\{\int_I g_m^p\}$ converge.

Podemos pois aplicar o teorema da convergência monótona e concluir que existe uma função g^p limite q.t.p de $\{g_m^p\}$ tal que $g^p \in L^1(I)$. Por conseguinte $\{g_m\}$ converge q.t.p. para g e a série seguinte para quase todo x:

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

converge para um limite $f(x)$, pois a série de termos positivos também converge (convergência absoluta).

Concluimos ainda daí que $\{f_{n_k}^p\}$ converge para f^p q.t.p.

Podemos agora aplicar o teorema da convergência dominada à seqüência $\{f_{n_k}^p\}$ que é tal que $\|f_{n_k}\|^p \leq g^p$ q.t.p. $\forall k$ (verificar), para concluir que o limite q.t.p f^p pertence a $L^1(I)$ e que além disso $|f| \leq g$ q.t.p.

Resta então provar que $\{f_{n_k}\}$ converge em norma para f. Para tanto definimos funções $\phi_k \in L^1(I)$ por $\phi_k = |f - f_{n_k}|^p$

Temos que

$$|f - f_{n_k}| \leq |f| + |f_{n_k}| \leq 2g \quad \text{q.t.p.}$$

A seqüência $\{\phi_k\}$ é pois dominada q.t.p. por $(2g)^p$ que pertence a $L^1(I)$. Como $\{\phi_k\}$ converge para zero q.t.p. devemos ter pelo teorema da convergência dominada:

$\lim_{k\to\infty} \int_I |f - f_{n_k}|^p = 0$ implicando finalmente $\| [f] - [f_{n_k}] \|_p \to 0$

que é o resultado desejado c.q.d.

<u>Teorema 8</u>:

O espaço $L^\infty(I)$ é em espaço de Banach com a norma $\| f \|_\infty = \sup_{x\in I}\text{ess.} |f(x)|$

Demonstração:

Seja $\{[f_n]\}$ uma seqüência de Cauchy de $L^\infty(I)$. Em cada classe $[f_n]$ de $L^\infty(I)$ há pelo menos uma função f_n limitada para todo $x \in I$. Portanto $\{f_n\}$ é uma seqüência de Cauchy no espaço normado das funções limitadas sôbre I que denotaremos por B(I) com a norma $\| f \| = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

Se provarmos que B(I) é completo está provado o teorema pois nesse caso $\{f_n\}$ converge para f em B(I) o que prova que $[f_n]$ converge para $[f]$ em $L^\infty(I)$ (verificar).

Agora, como $\{f_n\}$ é de Cauchy em B(I), $\forall x$ e $\forall \varepsilon$, $\exists\, N(\varepsilon,x)$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall m,n > N(\varepsilon,x)$

Por conseguinte $\{f_n(x)\}$ é uma seqüência de Cauchy de $\mathbb{R}$, e como tal converge para um real que denotaremos por $f(x)$.

Provemos que f é uma função de B(I).

Passando ao limite em m mantendo n fixo, $n = N(\varepsilon,x) + 1$ temos:

$$\lim_{m\to\infty} |f_{N+1}(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_{N+1}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$|f(x)| \leq f_{N+1}(x) + \varepsilon$$

$$|f(x)| \leq \sup |f_{N+1}(x)| + \varepsilon \leq K_{N+1} + \varepsilon$$

ou seja, $f \in B(I)$ sendo K_{N+1} uma limitação de f_{N+1}.

Resta provar que $\{f_n\}$ converge para f, o que faremos por absurdo. De fato se $\{f_n\}$ não converge para f, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall n > N(\varepsilon)$

$\sup |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon$.

Logo existe pelo menos um ponto σ de I tal que $|f(\sigma) - f_n(\sigma)| > \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$ o que é incompatível com a convergência pontual de $\{f_n(x)\}$ para $f(x)$, $\forall x \in I$. Enfim $[f_n] \to [f]$ c.q.d.

Dentre os espaços $L^p(I)$, merece especial atenção $L^2(I)$ que é um espaço de Hilbert com o produto escalar definido por

$$(f,g) = \int_I fg.$$

e cuja norma correspondente é a já definida, tomando-se o valor particular p=2. Sendo assim $L^2(I)$ possui as mesmas propriedades comuns aos espaços de Hilbert, e em especial, no que diz respeito aos duais.

Portanto pelo teorema de Riesz, podemos dizer que a todo elemento do dual de $L^2(I)$ corresponde um e somente um elemento de $L^2(I)$ e vice-versa o que convencionamos expressar por

$$[L^2(I)]^* = L^2(I).$$

Para os demais $L^p(I)$ o resultado é o seguinte:

$$[L^p(I)]^* = L^q(I) \quad \text{com } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{e } 1 \leq p < \infty$$

Apesar da prova de que $L^p(I)^* \supset L^q(I)$ ser simples, a da inclusão inversa é sensivelmente mais difícil, razão pela qual será omitida aqui. O resultado está provado por exemplo em [17] pg 187.

__Exercício 7__: prove que $[L^p(I)]^* \supset L^q(I)$, $1 \leq p \leq \infty$

Como se pode ver, o exercício não exclui $p=\infty$. Porém neste caso observamos que a inclusão inversa não vale, o que implica em $[L^\infty(I)]^* \neq L^1(I)$.

Outra observação importante para os espaços $L^p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$, é que eles são os fechos do espaço $C^0[a,b]$ com relação às normas respectivas.

De fato sabemos que, como $C^0[a,b] \subset L^p[a,b]$ (provar), devemos ter que seqüências de Cauchy de $C^0[a,b]$ convergem para funções de $L^p[a,b]$ (e não necessariamente para funções de $C^0[a,b]$, uma vez que $C^0[a,b]$ não é completo para essas normas).

Inversamente, para $1 \leq p < \infty$, todo elemento de $L^p[a,b]$ pode ser obtido como limite de seqüências de funções de $C^0[a,b]$ na norma $\|\cdot\|_p$, resultado que não provaremos aqui. Em outras palavras, isso significa que $C^0[a,b]$ é denso em $L^p[a,b]$, $1 \leq p < \infty$. Como consequência desse fato fica que $L^p[a,b]$ é separável para $1 \leq p < \infty$, pois o conjunto de polinômios de coeficientes racionais definidas sôbre I é denso em $L^p[a,b]$: $\forall f \in L^p(I)$ e $\forall \varepsilon > 0$ existe um tal polinômio r para o qual

$$[\int_I |f-r|^p]^{1/p} < \varepsilon$$

De fato, admitindo-se conhecido que $C^0[a,b]$ é denso em $L^p[a,b]$, $\forall f \in L^p[a,b]$ e $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists g \in C^0[a,b]$ tal que

$$[\int_{[a,b]} |f-g|^p]^{1/p} \leq \varepsilon/2$$

Por outro lado, como sabemos $\forall \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{1/p}} > 0$, existe um tal polinômio r tal que:

$$\max_{a\le x\le b} |g(x)-r(x)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{1/p}} \quad \text{donde}$$

$$\left[\int_{[a,b]} |g-r|^p\right]^{1/p} \le \varepsilon/2$$ o que pela desigualdade de Minkowski dá:

$$\left[\int_{[a,b]} |f-r|^p\right]^{1/p} \le \varepsilon$$

Neste ponto é importante salientar que $L^\infty(I)$ não é separável [7].

Exercício 8:

Provar que $f \in L^2(I) \Rightarrow f \in L^1(I)$ e que a recíproca não é verdadeira por meio de um contra-exemplo.

Exercício 9:

Use a desigualdade de Hölder para provar que $f \in L^p(I) \Rightarrow f \in L^1(I)$, $\forall\ 1 \le p \le \infty$

Observamos enfim que se pode provar que se $f \in L^\infty(I)$ então $f \in L^p[1]$ $\forall p$, $1 \le p < \infty$ e que além disso

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

Aliás com base nesse resultado é possível concluir que só podemos ter $f \in L^{p_1}(I)$ e $f \notin L^{p_2}(I)$ para $p_1 \neq p_2$ se f é função não limitada q.t.p. Em outras palavras só podemos distinguir os espaços $L^p(I)$ uns dos outros considerando funções não limitadas.

Por exemplo, $1/\sqrt{x} \in L^1[0,1]$ mas $1/\sqrt{x} \notin L^2[0,1]$.

Note-se que essa função não é limitada em $[0,1]$.

CAPÍTULO II

RELAÇÕES INTEGRAÇÃO - DERIVAÇÃO

Neste capítulo pretende-se apresentar alguns dos resultados mais importantes da teoria de Lebesgue no que diz respeito às relações entre funções através da integração. Muitos desses resultados são bem conhecidos do Cálculo elementar ou mera generalização dos mesmos.

II.1 - Funções definidas por integrais:

Façamos inicialmente uma mudança de notação que será de grande utilidade: Quando se tratar de integral ao longo de um intervalo limitado I de extremidades a e b denotaremos a integral de uma função f por

$$\int_a^b f$$

Seja agora $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$. Vamos definir uma função F primitiva de f sobre [a,b] por:

$$(1) \quad \boxed{F(x) = \int_a^x f} \qquad \forall x \in [a,b]$$

Com essa definição fica claro que temos sempre,

$$F(a)=0$$

Porém podemos definir outras primitivas para uma mesma função f a menos de constantes com:

$$(1)' \quad \boxed{F(x) = \int_a^x f + C}$$

Por exemplo x^α é uma primitiva de $\alpha x^{\alpha-1} \in \mathcal{L}^1[0,1]$ para $0<\alpha\leq 1$, assim como $x^\alpha+C$ onde C é uma constante arbitrária. Esta poderá ser determinada, se desejarmos fixar um valor não nulo para $F(a)=C$.

Para a primitiva vale o seguinte resultado:

Teorema 1: Se f é contínua num ponto $x_o \in [a,b]$ então $F'(x_o)=f(x_o)$ (Se $x_o=a$ ou $x_o=b$ a derivada é tomada como limite à direita ou à esquerda da razão incremental, respectivamente).

Demonstração: Por hipótese, $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta_o>0$ tal que $|x-x_o|<\delta_o$ implica em $|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$.

Como é sempre possível encontrar $\delta \leq \delta_o$ tal que $[x_o, x_o+\delta) \subset [a,b)$ temos:

$f(x_o)-\varepsilon \leq f(x) \leq f(x_o)+\varepsilon \quad \forall x \in (x_o, x_o+\delta)$

Agora, para $0<h<\delta$ temos

$$F(x_o+h)-F(x_o) = \int_a^{x_o+h} f - \int_a^{x_o} f = \int_{x_o}^{x_o+h} f$$

sendo a última igualdade a verificar usando, por exemplo, funções características.

Concluimos então que:

$\int_{x_o}^{x_o+h} (f(x_o)-\varepsilon) \leq F(x_o+h)-F(x_o) \leq \int_{x_o}^{x_o+h} (f(x_o)+\varepsilon)$, donde:

$h[f(x_o)-\varepsilon] \leq F(x_o+h)-F(x_o) \leq h[f(x_o)+\varepsilon]$, o que implica que

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ h>0$ tal que $\left| \dfrac{F(x_o+h)-F(x_o)}{h} - f(x_o) \right| \leq \varepsilon$

Com isso concluimos que a derivada à direita de F no ponto x_o é $f(x_o)$. Supondo-se agora $x_o \in (a,b]$ e tomando-se h negativo, chega-se analogamente a: $\forall \varepsilon > 0$ tal que:

$$\left| \frac{F(x_o)-F(x_o-h)}{-h} - f(x_o) \right| \leq \varepsilon$$

o que mostra que a derivada à esquerda de F no ponto x_o é $f(x_o)$. Concluimos então que efetivamente $F'(x_o)=f(x_o)$. c.q.d.

Vimos que as funções Lebesgue integráveis abragem uma grande gama de funções, posto que não precisam nem ser contínuas nem limitadas. No entanto primitivas de funções de $\mathcal{L}^1[a,b]$ são sempre bem caracterizadas como veremos nos teoremas a seguir.

<u>Teorema 2:</u> Se $F(x) = \int_a^x f \quad \forall x \in [a,b]$ com $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$, então $F \in C^o[a,b]$.

<u>Demonstração:</u> Se $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$ devemos ter $f=f_1-f_2$ com $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1[a,b]$

Provemos que $F_i \in C^o[a,b]$ onde $F_i(x) = \int_a^x f_i \quad i=1,2.$

Assim ficará provado que $F \in C^o[a,b]$ pois $F=F_1-F_2$.

Seja então $\{\phi_n\}$ uma seqüência de funções de $D[a,b]$ que converge q.t.p. para f_1, por exemplo.

$\forall \ \varepsilon/2 > 0 \quad \exists N$ tal que $0 \leq \int_a^b (f_1-\phi_N) \leq \varepsilon/2$

Mas $\forall N \quad \exists K<\infty$ tal que $|\phi_N(x)|<K \quad \forall x\in[a,b]$

Agora, $\forall x_o, x\in[a,b]$ temos: $F_1(x)-F_1(x_o)=\int_{x_o}^{x} f_1$ (se $x_o>x$, definimos $\int_{x_o}^{x} f_1=-\int_{x}^{x_o} f_1$). Daí vem que.

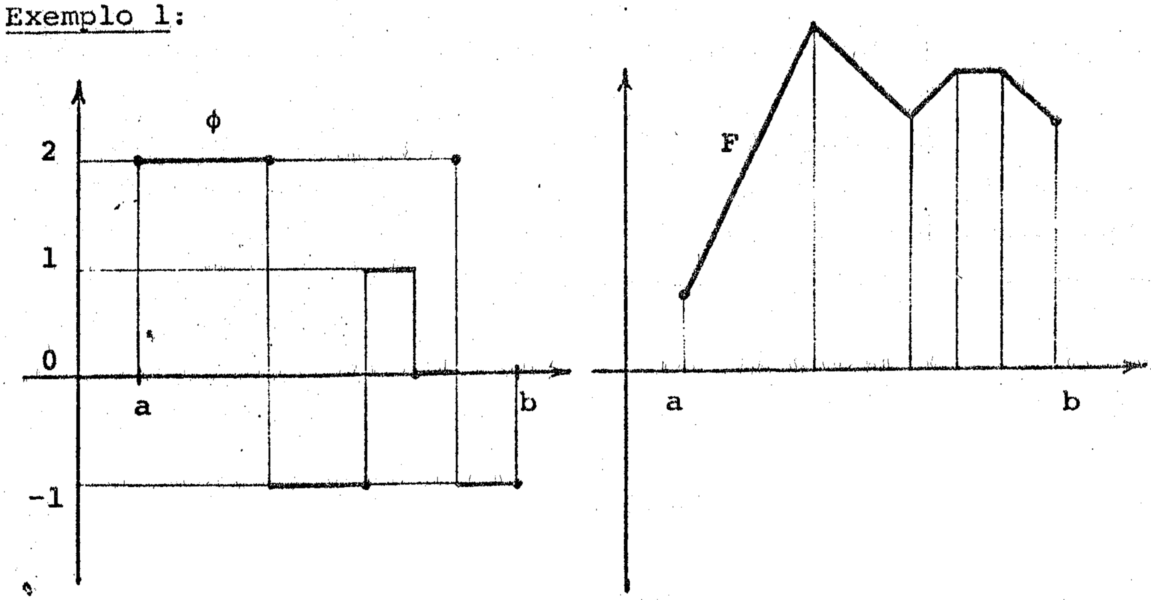
$F_1(x)-F_1(x_o)=\int_{x_o}^{x} f_1-\phi_N+\int_{x_o}^{x}\phi_N$ donde $|F_1(x)-F_1(x_o)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+K|x-x_o|$

Portanto, se escolhermos $\delta=\frac{\varepsilon}{2K}$ teremos:

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ tal que $|F_1(x)-F_1(x_o)|\leq\varepsilon$ se $|x-x_o|\leq\delta$, o que prova a continuidade de F_1 e portanto a de F. c.q.d.

Com o Teoremas 1 e 2, podemos concluir que, embora funções contínuas não sejam nècessàriamente continuamente diferenciáveis, uma função contínua F que seja primitiva de uma função $f\in\mathcal{L}^1[a,b]$ no sentido (1), é diferenciável q.t.p, e sua derivada q.t.p. é igual a f q.t.p. Como ilustração, temos o caso da primitiva de ϕ, função degrau definida sobre $[a,b]$ que é linear por pedaços. F' não é diferenciável apenas nos "saltos" de ϕ.

Exemplo 1:

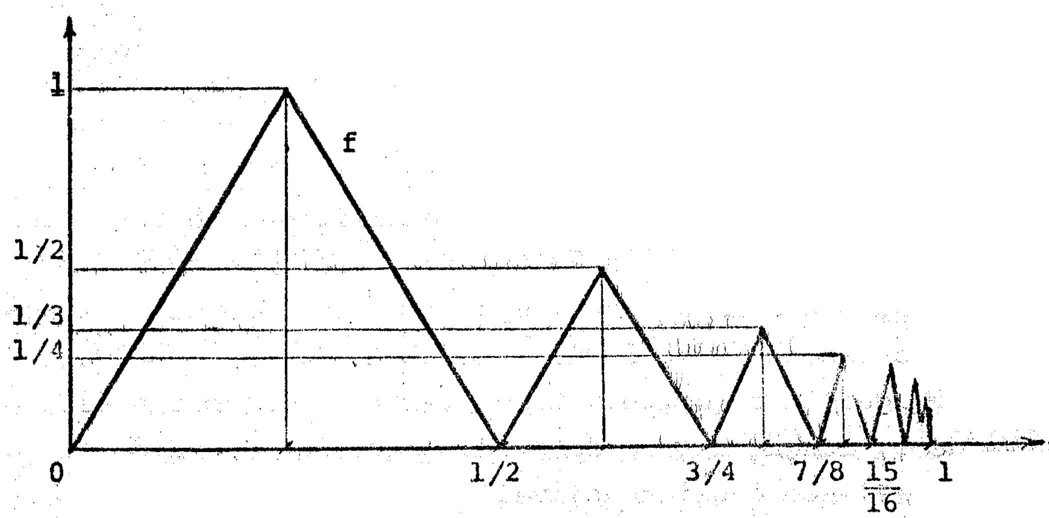


Agora, se por um lado toda primitiva é uma função contínua, nem toda função contínua pode ser uma primitiva de uma função de $\mathcal{L}^1[a,b]$. Exemplos ilustrando esse fato não são entretanto nada triviais como o do

Exercício 1: Seja f a função contínua linear por pedaços em $[0,1]$

definidos por $[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-3}{2^{n+1}}]$, $[\frac{2^{n+1}-3}{2^{n+1}}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}]$ para $n=1,2,3,\ldots$

com $\begin{cases} f(\frac{2^{n+1}-3}{2^{n+1}}) = \frac{1}{n}, & n=1,2,\ldots \\ f(\frac{2^n-1}{2^n}) = 0, & n=1,2,\ldots \end{cases}$



Verificar que a derivada q.t.p. dessa função não pertence a $\mathcal{L}^1[0,1]$.

Com isso surge imediatamente a questão: que funções contínuas podem ser primitivas de funções de $\mathcal{L}^1[a,b]$? A resposta é encontrada com a introdução de uma classe de funções contínuas: a das funções <u>absolutamente contínuas</u>:

<u>Definição 1</u>: Uma função $F \in C^0[a,b]$ é dita absolutamente contínua em $[a,b]$ se $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que:

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leq \delta \quad \text{implicar em}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \varepsilon$$ para qualquer conjunto de subintervalos $[a_k, b_k]$ de $[a,b]$ tais que (a_k, b_k) sejam disjuntos dois, $k=1,2,\ldots,n$ (finito)

Da <u>Definição 1</u>: pode-se deduzir que uma função absolutamente contínua é contínua, o que deixamos como:

<u>Exercício 2</u>: F absolutamente contínua em $[a,b]$ $\Rightarrow$ $F \in C^0[a,b]$.

No entanto a recíproca não é verdadeira como prova a função f do exercício 1 que não é absolutamente contínua. De fato suponhamos que para tal função, dado $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$, tal que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leq\delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|\leq\varepsilon.$$

Ora, sempre é possível encontrar N tal que $\delta>2^{-N}$. Mas para conjuntos de intervalos contidos em $[1-2^{-N},1]$ cujas extremidades correspondem a pontos de inflexão de f, somatórias da forma $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|$ são ilimitadas por se tratar de termos da serie harmônica.

$$\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\ldots.$$

Logo f não pode ser absolutamente contínua.

Em seguida provaremos que uma primitiva de uma função deve ser absolutamente contínua.

<u>Teorema 3</u>: Se $f\in\mathcal{L}^1[a,b]$ então F definida por (1) ou (1)' é absolutamente contínua em $[a,b]$.

<u>Demonstração</u>: Definimos uma seqüência crescente $\{f_n\}$ de funções de $\mathcal{L}^1[a,b]$ que tende q.t.p para $|f|$ por:

$$f_n=\min\{|f|,n\}$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona devemos ter:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b|f|$$

Agora $\forall\,\varepsilon/2>0$ $\exists\,N$ tal que $\int_a^b|f|-f_N\leq\frac{\varepsilon}{2}$

Definindo-se $\delta=\frac{\varepsilon}{2N}$, seja o conjunto de subintervalos $[a_k,b_k]$ tal que $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$.

Temos: $\sum_{k=1}^{N}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{N}\left|\int_{a_k}^{b_k}f\right|\leq\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{b_k}|f|$

$=\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{b_k}(|f|-f_N)+\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{b_k}f_N$. Como $f_N\leq N$ $\forall N$

temos $\sum_{k=1}^{N}|F(b_k)-F(a_k)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\delta N=\varepsilon$ ou seja:

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ t... N

Teorema 4: (Teorema fundamental da Integração de Lebesgue): Se F é absolutamente contínua em $[a,b]$ então f, derivada q.t.p. de F é Lebesgue integrável em $[a,b]$ e vale

$$(2) \quad \boxed{F(x) = \int_a^x f + F(a)}$$

Êsse teorema é um caso particular do Teorema de Radon-Nikodym encontrado em qualquer livro especializado em Teoria da Integração como, por exemplo [3]. Omitimos a demonstração porque envolve conceitos que temos evitado mencionar neste texto; como os de mensurabilidade e o de medida de Borel.

Vale observar que a introdução do termo constante $F(a)$ em (2) é agora necessária mas não interfere nos resultados dos teoremas precedentes, posto que, se f é a derivada q.t.p. de $F(x)$ o será também de $F(x)+C$ onde C é uma constante arbitrária.

Como conseqüência do Teorema 4 fica que o conjunto de funções absolutamente contínuas é um espaço vetorial.

Os teoremas 3 e 4 podem ser resumidos com o seguinte:

"A condição necessária e suficiente para que uma função F seja dada sob a forma (2) onde f é certa função de $\mathcal{L}^1[a,b]$ é que F seja absolutamente contínua. Nesse caso F' existe para quase todo $x \in [a,b]$ e $F'(x)=f(x)$ q.t.p".

Para terminar fazemos a relação entre uma função e sua derivada q.t.p. Como vimos mesmo que uma função F não seja continuamente diferenciável, sua derivada q.t.p. f pode ter um sentido. No entanto a função F só será uma primitiva da mesma, isto é, só poderá ser reconstituida a partir de f por:

$$F(x) = \int_a^x f + F(a),$$

se F for absolutamente contínua.

Exemplo 2: A função $X_{[0,1/2]} \in D\,[0,1]$ não é absolutamente contínua (nem contínua). Sua derivada q.t.p. é 0. Temos:

$\int_0^x 0 + \chi_{[0,1/2]}(0) \equiv 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

Portanto a primitiva da derivada q.t.p. é diferente de $\chi_{[0,1/2]}$!

Poderá ainda ser provado como

<u>Exercício 3</u>: Se $f \in C^1[a,b]$ então f é absolutamente contínua.

II.2 - Integração de Stieltjes em [a,b].

Antes de iniciar a apresentação deste assunto esclarecemos que ele é tratado quase sempre em textos sobre integração, apenas como uma espécie de generalização da integração de Lebesgue com a introdução de conceitos fortes como o de medida real regular, borelianos de $\mathbb{R}$, entre outros, que não julgamos conveniente tratar aqui. Por isso tendo em vista só o objetivo deste curso, preferimos o tratamento clássico dado, por exemplo por Smirnov [16].

As funções absolutamente contínuas que vimos no parágrafo anterior pertencem a uma classe importante de funções que representam o ponto de partida da integração de Stieltjes: as funções de variação limitada.

<u>Definição 2</u>: Uma função f é dita de variação limitada num intervalo [a,b] se para qualquer partição finita de [a,b]:

$$a=x_0<x_1, <x_2 \dots <x_n=b$$

existe uma constante $K>0$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq K$$

Fica implícito, com essa definição, que uma função de variação limitada deve ser definida em todos os pontos e além disso <u>limitada</u> em [a,b].

O conjunto de funções de variação limitada constitui um espaço vetorial que denotaremos $V[a,b]$. Por conveniência será normado por:

$$(3) \quad \| f \|_{V[a,b]} = \|f(a)\| + \sup_{\substack{x_i \in [a,b] \\ x_i > x_{i-1} \\ x_o = a, x_n = b}} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

i.e.,o sup é calculado sobre todas as partições finitas possíveis de [a,b]. Tal valor é aliás igual a:

$$\inf \{K/K \geq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|\}$$

O supremo da expressão da norma (3) se denomina a variação total de f denotada VT(f). Poderá ser verificado como

Exercício 4: A variação total é uma semi-norma e (3) uma norma para V [a,b] .

Exemplo 3: Uma função f é dita monótona em [a,b] se uma das duas situações ocorrerem para $x,y \in [a,b]$.

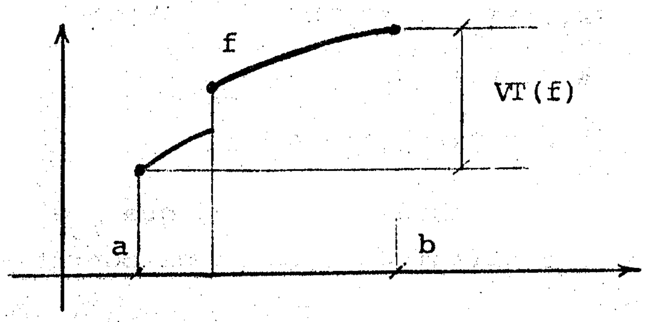
$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

ou

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

No 1º caso f será não decrescente (crescente se valer $f(x) < f(y)$ quando $x<y$) e no 2º caso f será não crescente (decrescente se valer $f(x) > f(y)$ quando $x<y$).

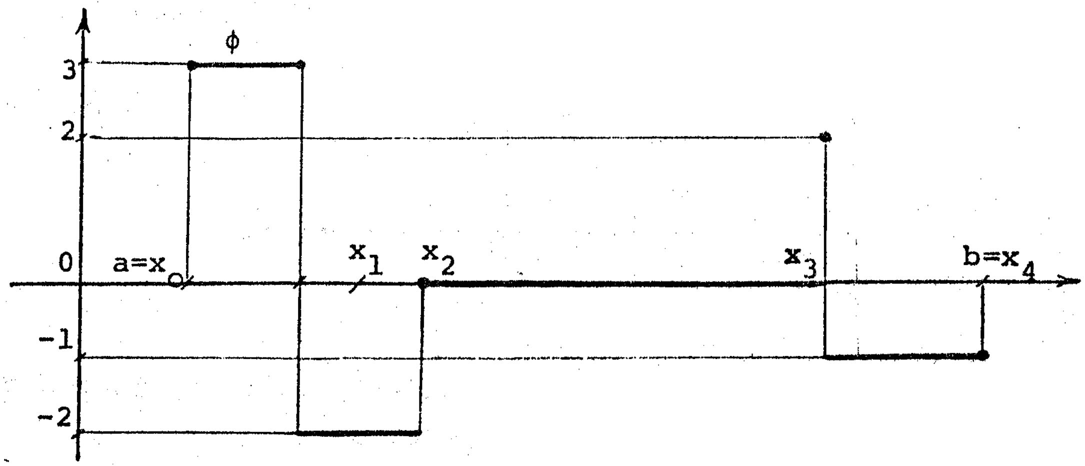
Se f é função monótona então $f \in V[a,b]$. Nesse caso a variação total de f é $|f(b)-f(a)|$.



Exemplo 4: Uma função degrau ϕ é sempre de V[a,b]. Nesse caso se $\phi = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_i$ onde χ_i são intervalos disjuntos abertos ou pontos de [a,b] tais que $\bigcup_{i=0}^{n} \chi_i = [a,b]$, temos:

$$VT(\phi) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \alpha_{i-1}|$$

No caso da figura:



$VT(\phi) = 5 + 2 + 2 + 1 = 10$

Tal valor é obtido, por exemplo, com a partição indicado para n=4.

Exemplo 5: A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n/n \text{ se } \dfrac{1}{2^n} \le x < \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ 0 \text{ se } x=1 \\ 1 \text{ se } x=0 \end{cases}$$

Não é de $V[0,1]$.

Verificar isso tomando partições definidas por $x_i = 2^{-i}$, $i=1,2,\ldots,n$, n crescente.

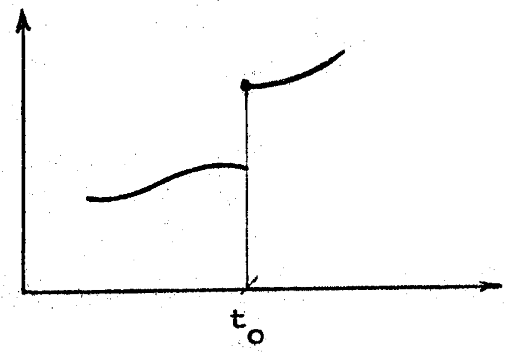
Como recomenda Luenberger ([11] pg. 113), e dado que tal procedimento não representa restrição real à construção da integral de Stieltjes e nem a outras aplicações deste texto, a título de simplificação convencionaremos daqui para diante que as funções de variaçao limitada são contínuas à direita, em todo ponto em que for descontínuo ou seja:

Se $\lim_{t \to t_o^+} f(t) \neq \lim_{t \to t_o^-} f(t)$, supondo-se que os limites existam, então:

$f(t_o) = \lim_{t \to t_o^+} f(t)$. $\quad t \to t_o^+$ significa que $t \to t_o$ com $t > t_o$.

$t \to t_o^-$ significa que $t \to t_o$ com $t < t_o$.

Assim sendo descontinuidades, se houver, são do tipo:



Verifica-se sem problemas que o conjunto de tais funções de variação limitado é ainda um espaço vetorial.

A simplificação adotada é restritiva a ponto de intrinsecamente eliminar certos tipos de funções como as que não são contínuas em nenhum ponto de um conjunto que não seja nulo. No entanto o resultado dado a seguir mostra que ela é coerente pois tais funções não podem ser de variação limitada.

<u>Proposição 1:</u> Se $f \in V[a,b]$ então f é descontínuo no máximo num conjunto enumerável de pontos $\{t_i\}_{i=1,2,\ldots}$ de $[a,b]$.

Vamos provar o teorema só para funções monótonas que são sempre de $V[a,b]$. O caso geral poderá ser provado como exercício, com base no resultado do Teorema 5 a ser dado a seguir.

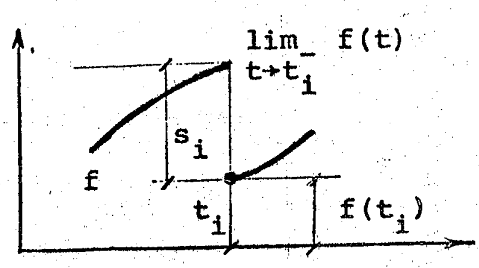
É claro que a soma dos módulos de saltos de f em $[a,b]$ não pode ser maior do que $VT(f)=f(b)-f(a)$. Por conseguinte deve existir no máximo um conjunto finito de saltos $S_n=\{s_i^n\}$ tais que $n|s_i^n| \geq VT(f)$ $\forall n$, ou seja, tais que

$$|s_i^n| \geq \frac{1}{n} VT(f) \quad \forall n \quad i \leq n.$$

<u>Demost.</u>: O conjunto $\bigcup_n S_n$ composto de todos os saltos de f em $[a,b]$ é portanto enumerável, de acordo com a Proposição 1 do capítulo I.
c.q.d.

De acordo com a Proposição 1 e adotando-se a seguinte convenção para o valor do salto em t_i:

$$s_i = f(t_i) - \lim_{t \to t_i^-} f(t)$$

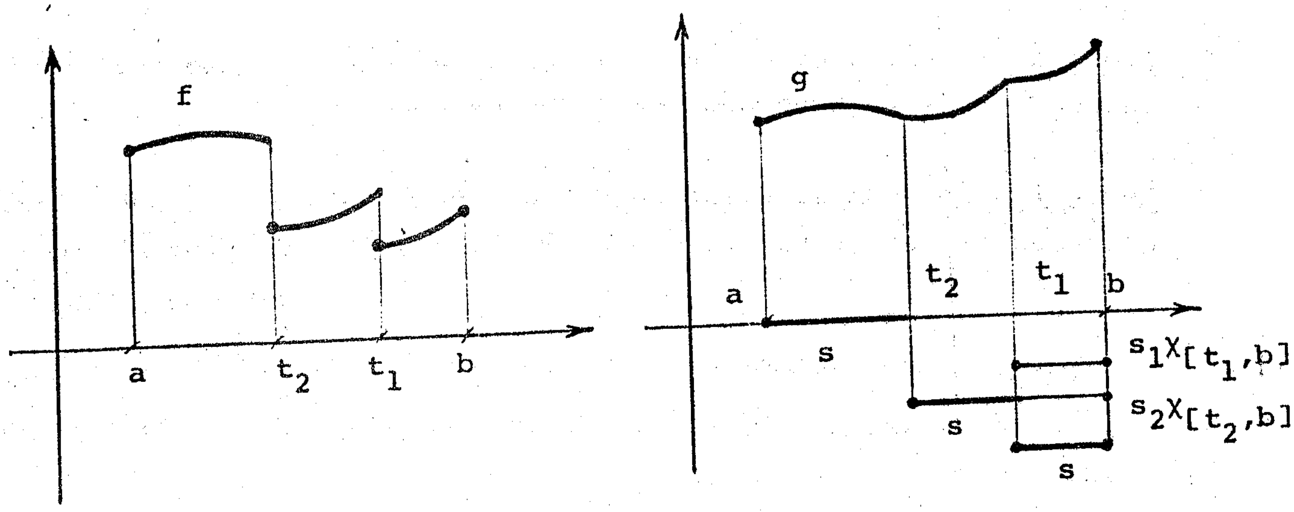


podemos representar qualquer função $f \in V[a,b]$ por

(4) $f=g+s$ onde $g \in C^0[a,b]$ com $g(a)=f(a)$ e

(5) $s=\sum_i s_i \chi_{[t_i,b]}$ uma "função salto".

Esta última será de $D[a,b]$ sempre que f tiver um número finito de descontinuidades. No exemplo da figura ilustramos essa idéia,



que, esperamos, deverá esclarecer o que ocorre no caso geral.

Pode-se verificar que $VT(f)=VT(g)+\sum_i |s_i|$, ou seja, a série $\sum_i s_i$ deve ser absolutamente convergente.

Suponhamos agora válido o resultado de que toda função da forma $\sum_i \alpha_i \chi_{I_i}$ é de $\mathcal{L}^1[a,b]$, sendo todos os I_i da forma $I_i=[t_i,b]$ e $\sum_i |\alpha_i| < \infty$. Isso poderá ser provado como o

<u>Exercício 5:</u> Se $\sum_i |\alpha_i| < \infty$. e $f=\sum_i \alpha_i \chi_{I_i}$, $I_i \subset [a,b]$ então $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$

<u>Sugestão:</u> Tomar a seqüência crescente de funções degrau:
$\phi_N=\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{I_i} + \beta_N \chi_{[a,b]}$ onde $\beta_N = -\sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|$ e aplicar o teorema da convergência monótona.

Assim deduz-se imediatamente a

<u>Proposição 2</u>: Se $f \in V[a,b]$ então $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$

A função g da decomposição (4) não pode ser qualquer função contínua pois deve ser de variação limitada também. No entanto nem sempre g será absolutamente contínua.

Agora provemos o resultado seguinte que caracteriza $V[a,b]$.

<u>Teorema 5</u>: Uma função é de $V[a,b]$ se e somente se é a diferença de duas funções não decrescentes em $[a,b]$.

<u>Demonstração</u>: Em primeiro lugar se $f=g-h$, onde g e h são não decrescentes em $[a,b]$, como $g,h \in V[a,b]$ pois:
$$VT(g)=g(b)-g(a)$$
$$VT(h)=h(b)-h(a)$$
e $V[a,b]$ é um espaço vetorial, devemos ter $f \in V[a,b]$.

Agora seja $f \in V[a,b]$. Para uma partição arbitrária de $[a,x]$:
$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=x \;,\quad x\leq b.$$
Definimos:
$$p(x)=\sum_{i=1}^{n} \max\{0,[f(x_i)-f(x_{i-1})]\}$$
e
$$n(x)=\sum_{i=1}^{n} \max\{0,[f(x_{i-1})-f(x_i)]\}$$
p e n representam respectivamente as variações negativa e positiva de f para a dada partição de $[a,x]$. Por conseguinte:
$$p+n=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \text{ e } p-n=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=f(x)-f(a)$$

Agora definindo-se $P(x)=\sup p(x)$ e $N(x)=\sup n(x)$ onde os supremos são tomados sobre as possíveis partições de $[a,x]$ temos que $\forall x\,[a,b]$:
$$\sup(p+n)=P(x)+N(x) \quad \forall x\in[a,b]$$
$$\sup(p-n)=P(x)-N(x)=f(x)-f(a)$$

Logo $T(x)$, variação total de f desde <u>a</u> até <u>x</u> é igual à máxima variação positiva $P(x)$ mais a máxima variação negativa $N(x)$ de f, de <u>a</u> até <u>x</u>.

Como é fácil verificar P(x) e N(x) são crescentes em [a,b]. Por outro lado, como $f(x) = f(a) + P(x) - N(x)$ onde $[f(a) + P(x)]$ e $N(x)$ são não decrescentes, temos o resultado desejado. c.q.d.

Como consequência fica que toda função absolutamente contínua é de $V[a,b]$ pois, de acordo com o Teorema 4 uma tal função F deve poder ser expressa por

$$F(x) = \int_a^x f + F(a) \quad \text{onde } f \in \mathcal{L}^1[a,b]$$

Definindo-se então as funções positivas $f^+ = (|f|+f)/2$ e $f^- = (|f|-f)/2$, deduz-se que $f = f^+ - f^-$. Portanto, como $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1[a,b]$ se $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$, vem:

$F(x) = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^- + F(a)$. Porém $\{\int_a^x f^+ + F(a)\}$ e $\{\int_a^x f^-\}$ são não decrescentes; daí segue pela Proposição 2 que $f \in V[a,b]$. c.q.d

Podemos agora proceder à integração de Stieltjes de uma função $f \in C^0[a,b]$ com relação a funções de variação limitada. A imposição de continuidade para a função a integrar pode ser removida. No entanto, como veremos, nesse caso podemos estar certos de que a integral de Stieltjes existe.

Seja inicialmente $g \in V[a,b]$, função não decrescente.

Para um dada partição de [a,b]

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, construimos a soma

(6) $$\boxed{\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]}$$ onde ξ_i é certo ponto de $[x_{i-1}, x_i]$.

<u>Definição 3</u>: Se existe o limite da soma da[illegible]em (7) à medida em que tomamos partições de [a,b] tais que $\max[x_i - x_{i-1}] \to 0$, diz-se que tal limite é a integral de Stieltjes de f com respeito a g que se denota:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

Na verdade a condição de existência pode ser omitida nessa definição se $f \in C^0[a,b]$. De fato com a análise semelhante à feita para a integral de Riemann usando somas superior a inferior provamos que o limite existe:

Seja $\bar{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i[g(x_i) - g(x_{i-1})]$ onde $M_i = \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$ e

$\underline{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i[g(x_i) - g(x_{i-1})]$ onde $m_i = \min_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$

De acordo com a hipótese feita para g temos: $\underline{\sigma}_n \le \sigma_n \le \bar{\sigma}_n$

Mas $\bar{\sigma}_n - \underline{\sigma}_n = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \ge 0$.

Como $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ tal que $M_i - m_i \le \varepsilon\ \ \forall i$, se $\max_i |x_i - x_{i-1}| \le \delta$, podemos ter as somas superior e inferior arbitrariamente próximas. Isto significa que $\forall \varepsilon > 0$ podemos encontrar uma partição em N intervalos tais que $\bar{\sigma}_N - \underline{\sigma}_N \le \varepsilon\ [g(b) - g(a)]$, o que prova que o limite de $\{\sigma_n\}$ existe.

A generalização da integral de Stieltjes de uma função $f \in C^0[a,b]$ com respeito a uma função $g \in V[a,b]$ é dada de forma semelhante à usada para a de funções de $\mathcal{L}^1[a,b]$ a partir das de $\mathcal{L}^c[a,b]$:

Pelo Teorema 5 podemos escrever:

$g = g_1 - g_2$ onde g_1 e g_2 são funções não decrescentes em $[a,b]$.

Assim definimos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) - \int_a^b f(x)\,dg_2(x)} \tag{7}$$

Pode-se verificar sem dificuldades, a partir da definição das duas integrais de (7) que $\int_a^b f(x)\,gd(x)$ nada mais é do que o limite de $\{\sigma_n\}$ no mesmo sentido que na Definição 3 com:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})], \text{ onde } x_{i-1} \le \xi_i \le x_i .$$

Poderá ser igualmente verificado como

<u>Exercício 6</u>: A integral de Stieltjes é linear com respeito a funções não decrescentes isto é:

$$\int_a^b f(x)\ d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \int_a^b f(x)\,dg_2(x)$$

e $\int_a^b f(x)\ d[\lambda g(x)] = \lambda \int_a^b f(x)\,dg(x)$, g, $g_1, g_2 \in V\ [a,b]$ não decrescentes.

Esse resultado mais a fórmula (7) mostra que a integral de Stieltjes é linear com respeito a funções quaisquer de $V[a,b]$.

Outro resultado importante é que se $g_1 - g_2 = C$, constante, então

$$\int_a^b f(x)\,dg_1(x) = \int_a^b f(x)\,dg_2(x) \qquad \forall f \in C^0[a,b],$$

que se deduz da própria definição da integral. Por esse motivo, costuma-se definir integrais de Stieltjes com relação a funções do subespaço $V_o[a,b]$ de $V[a,b]$ de funções g para as quais $g(a)=0$. Com isso elimina-se qualquer ambiguidade pois se $g_1, g_2 \in V_o[a,b]$ e $g_1-g_2=C$ então $g_1=g_2$.

Agora vamos relacionar as integrais de Riemann e Lebesgue com a de Stieltjes em alguns casos particulares.

1º) Suponhamos que $g \in C^1[a,b]$. Vimos que nesse caso g é absolutamente contínua e, por conseguinte, de variação limitada em $[a,b]$.

Denotando-se $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ é sabido que $\exists\, \xi_i \in I_i$ tal que:

$$g'(\xi_i) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{m(I_i)} \quad \text{(Teorema do Valor Médio)}$$

Escolhendo esse mesmo ponto para f no intervalo I_i de uma dada partição de $[a,b]$ vem:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g'(\xi_i) m(I_i).$$

σ_n é tal que está compreendida entre as correspondentes somas superior e inferior de Riemann para a função contínua $G=fg'$. Tais somas têm, como sabemos, o limite:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx$$

como precisado na Definição 3. Vemos portanto que nesse caso:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx = \int_a^b fg'$$

sendo a última igualdade consequência da coincidência das integrais de Riemann e de Lebesgue, nesse caso.

O leitor poderá facilmente identificar este resultado com o que, certamente está habituado a usar em cálculos de integrais com mudança de variável. Por exemplo se desejamos calcular a integral

$$\int_0^1 2x \sqrt{1-x^2}\, dx$$

e fazemos a mudança de variável $x=\text{sent}$, como $(\text{sent})'=\text{cost}$, temos:

$$\int_0^1 2x \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen}2t \; d\,\text{sent} = \int_0^{\pi/2} \text{sen}2t \,\text{cost}\, dt$$

2º) Menos evidente é provar que no caso em que g é "apenas" absolutamente contínua vale ainda:

(8) $\boxed{\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b fg'}$ $\forall f \in C^0[a,b]$ onde g' é a derivada q.t.p de g, sabidamente função integrável. (Ver por exemplo, [2], pg. 227).

III. 3 - Dual de $C^0[a,b]$

O espaço $V[a,b]$ é um espaço importante em Análise Funcional também por "ser" dual do espaço de funções contínuas no intervalo $[a,b]$, sendo a norma (3) coincidente com a norma usual dos duais , a menos de uma constante aditiva que é o módulo do valor da função em $\underline{a}$.

Se trabalharmos com $V_0[a,b]$ há perfeita coincidência das normas. Nesse sentido aliás, costuma-se identificar esse espaço com o dual de $C^0[a,b]$, por isomorfismo

Teorema 6: Seja L um funcional linear limitado sobre $C^0[a,b]$. Então existe uma função $g \in V_0[a,b]$ tal que tenhamos:

(9) $\boxed{L(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x)}$ $\forall f \in C^0[a,b]$.

tal que $\|L\| = VT(g)$. Inversamente toda função $g \in V_0[a,b]$ define um funcional linear limitado sobre $C^0[a,b]$ dado pela forma (9)

Demonstração: Deixamos como exercício a prova de que (9) define efetivamente um elemento de $\{C^0[a,b]\}^*$.

Para provar a existência da representação (9) em qualquer caso, vamos usar o Teorema de Hahn-Banach [4] encarando

$C^0[a,b]$ como um subespaço de $B[a,b]$, espaço de funções limitadas em $[a,b]$. (ver seção 1.6) com a norma:

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$$

que coincide com a norma de $C^0[a,b]$ para funções contínuas.

Seja então $L \in (C^0[a,b])^*$. Existe pois um funcional $\mathcal{L} \in (B[a,b])^*$ extensão de L a $B[a,b]$ tal que:

$$\|\mathcal{L}\|_{B^*} = \|L\|_{C^{0*}}$$

Vamos agora tentar representar L por uma integral de Stieltjes com respeito a uma função $g \in V_0[a,b]$. Para tanto usamos o artifício seguinte:

Definimos: $h_t = \chi_{(a,t]}$, $t \in (a,b]$ e $h_a = 0$

Definimos agora $g(t) = F(h_t)$, $a \le t \le b$, e vamos provar que $g\ V_o[a,b]$. Seja então $a = x_o < x_1 < x_2, \ldots < x_n = b$ uma partição arbitrária de $[a,b]$ e $\sigma_i = \text{sinal}\ [g(x_i) - g(x_{i-1})]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\ [g(x_i) - g(x_{i-1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\ [F(h_{x_i}) - F(h_{x_{i-1}})] = F(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \chi_{(x_{i-1}, x_i]})$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \le \| F \|_{B^*} \| \sum_{i=1} \sigma_i\ \chi_{(x_{i-1}, x_i]} \|$$

Verifica-se porém sem dificuldades que $\| \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\ \chi_{(x_{i-1}, x_i]} \|_\infty = 1$.

Daí segue que

$$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \le \| L \|$$ para qualquer partição finita de $[a,b]$ ou seja $g \in V_o[a,b]$ e $VT(g) \le \| L \|$

Resta provar que de fato $L(f) = \int_a^b f(x)dg(x)$ $\forall f \in C^o[a,b]$

Para tanto definimos uma função degrau ϕ associada a f e à partição com: $\phi = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\ \chi_{(x_{i-1}, x_i]} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[h_{x_i} - h_{x_{i-1}}]$

assim

$$\| \phi - f \|_\infty = \max_{1 \le i \le n}\ \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} |f(x_{i-1}) - f(x)|$$

o que mostra que ϕ tende para f, quando fazemos a partição arbitrariamente fina.

Agora pela continuidade de $\mathcal{L}$ devemos ter

$$\mathcal{L}(\phi) \to \mathcal{L}(f) = L(f) \qquad \forall f \in C^o[a,b].$$

Porém, por construção temos

$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

Passando então ao limite temos enfim

$$L(f) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Observa-se ainda que de (6)' deduz-se que

$$|L(f)| \leq \| f \|_{\infty} . VT(g) \quad \text{ou seja}$$

$\| L \| \leq VT(g)$. Logo como já provamos que a desigualdade vale no outro sentido, temos:

$$\| L \| = VT(g) \quad \text{c.q.d.}$$

Observamos enfim que, como de costume para duais, (9) estabelece apenas uma maneira de representar funcionais lineares contínuos sobre um espaço vetorial, entre uma infinidade de outras possibilidades. No Capítulo III veremos outro tipo de representação para o dual de $C^o[a,b]$.

CAPÍTULO III - FUNÇÕES GENERALIZADAS - NOÇÕES SOBRE DISTRIBUIÇÕES

Para um tratamento adequado de equações diferenciais, é essencial o conceito de função generalizada, que conduz natural - mente ao de distribuição. Essa idéia surgiu da necessidade de se dar um sentido preciso e vigoroso a entes matemáticos utilizados na descrição de certos fenômenos físicos, o que não era possível fazer somente com as funções clássicas.

Por exemplo, o delta de Dirac δ_c, que ao tempo de sua introdução era chamado de "função de Dirac", e que seria tal que:

$$\begin{cases} \delta_c(x) = 0 & \text{se} \quad x \neq c \\ \delta_c(x) = +\infty & \text{se} \quad x = c \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_c = 1$$

é na realidade uma distribuição. Tem interpretações físicas variadas como a de um impulso ou a de uma carga concentrada num ponto c.

III.1 - Derivadas Generalizadas

Nossa primeira apresentação de funções generalizadas se fará através da definição de derivada primeira de certas funções de variação limitada, usando a integração de Stieltjes.

Como sabemos, tais funções não são necessariamente absolutamente contínuas e, por isso, suas derivadas q.t.p. não as "reconstituem" por integração, em geral.

Por isso vamos definir um outro tipo de derivada que, pelo menos simule a propriedade fundamental

$$f(x) = \int_a^x f' + f(a)$$

sendo a integral convenientemente definida de forma que coincida com a integral comum quando f for absolutamente contínua.

Sabemos que se g é absolutamente contínua temos:

$$\int_a^x f(x)\,dg(x) = \int_a^x fg' \qquad \forall f \in C^0[a,b],$$

isto é a integral de Stieltjes se transforma em uma integral de Lebesgue comum.

Suponhamos entretanto que g não seja absolutamente contínua.

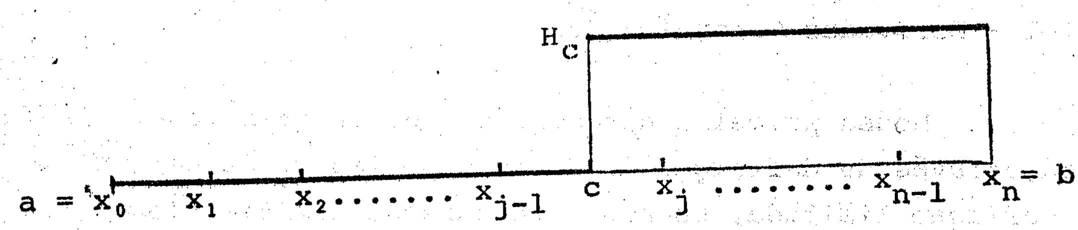
Para facilitar nossa exposição, comecemos com uma função bem simples de variação limitada não contínua como a função de Heaviside para uma semi-reta de $\mathbb{R}$, $[c,\infty)$:

$$H_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq c \\ 0 & \text{se} \quad x < c \end{cases}$$

Obviamente $H_c \in V[a,b]$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$. Supondo-se $c \in (a,b)$ temos por definição:

$$\int_a^b f(x)\, dH_c(x) = \lim_{\max\limits_i |x_i - x_{i-1}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[H_c(x_i) - H_c(x_{i-1})]$$

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$



Seja $[x_{j-1}, x_j)$ o intervalo em que se encontra c para cada partição. Temos:

$$\int_a^b f(x)\, dH_c(x) = \lim_{|x_{j-1} - x_j| \to 0} f(\xi_j)$$

Mas, como f é contínua em $[a,b]$ devemos ter:

(1) $$\boxed{\int_a^b f(x)\, dH_c(x) = f(x)}$$

Portanto a integral de Stieltjes de qualquer função contínua num intervalo $[a,b]$ com respeito a H_c, fornece o valor dessa função no ponto c, desde que $c \in [a,b]$. Assim, definiremos a derivada primeira generalizada de H_c como a função generalizada H'_c tal que a integral de seu produto por qualquer função contínua seja igual ao valor desta no ponto c.

Evidentemente não se trata de uma integral comum. Mas apenas simbolicamente escrevemos

$$\int_a^b fH'_c = f(c). \qquad \forall f \in C^0[a,b].$$

No entanto para evitar qualquer confusão vamos frequentemente preferir usar o símbolo $<.,.>$. Isto porque H'_c define simplesmente um funcional linear contínuo sobre $C^0[a,b]$ com:

$$(2) \qquad \boxed{<f,H'_c> = f(c)} \qquad \forall f \in C^0[a,b]$$

De fato temos:

$$|<f,H'_c>| \leq \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| \leq \|f\|_\infty \Longrightarrow \|H'_c\| \leq 1$$

Aliás, escolhendo-se $f \in C^0[a,b]$ tal que

$$\max_{a\leq x\leq b} |f(x)| = |f(c)| \quad \text{conclui-se que} \quad \|H'_c\| = 1$$

É claro que o funcional definido por H'_c é o mesmo definido por H_c através da integral de Stieltjes, usando o teorema do Capítulo II. Trata-se, portanto, tão somente de representações diferentes de um mesmo funcional.

A notação mais usual para H'_c é δ_c ,"delta de Dirac concentrado no ponto c" que definiremos pois por meio de (2), isto é:

$$<f,\delta_c> = f(c) \qquad \forall f \in C^0[a,b].$$

Agora podemos verificar que, com tal definição, a função H_c pode ser reconstituída a partir de δ_c no sentido seguinte:

Como

$$\int_a^x dH_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x<c \\ 1 & \text{se} \quad x\geq c \end{cases}$$

e $\displaystyle\int_a^x H'_c(x) = \int_a^x \delta_c$ vem: $\displaystyle\int_a^x \delta_c = \begin{cases} 0 & \text{se } x<c \\ 1 & \text{se } x\geq c \end{cases}$

como queríamos (o uso da integral de δ_c é, como sabemos, simbólico; leia-se $<1,\delta_c>$).

Podemos agora estender esse procedimento para "derivar" outras funções de $V[a,b]$.

Seja então $g \in V[a,b]$ função que tem um número finito m de descontinuidades em $[a,b]$. Sabemos que:

$$g = \tilde{g}+s \quad \text{onde} \quad \tilde{g} \in C^0[a,b] \quad \text{e} \quad s = \sum_{j=1}^{m} s_j \chi_{[t_j,b]}$$

(de acordo com nossa notação $\chi_{[t_j,b]}$ é H_{t_j} restrita a $[a,b]$).

Supondo que $\tilde{g}$ seja absolutamente contínua temos:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,d\tilde{g}(x) + \int_a^b f(x)\,ds(x) \quad \text{, ou seja:}$$

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f\tilde{g}' + \sum_{j=1}^{m} s_j \int_a^b f(x)\,dH_{t_j}(x).$$

Porém, de acordo com (1) temos:

$$\int_a^b f(x)\,dH_{t_j}(x) = f(t_j)$$

Por conseguinte definimos g' derivada primeira generalizada de g por

$$\boxed{\int_a^b fg' = \int_a^b f\tilde{g}' + \sum_{j=1}^{m} s_j f(t_j)} \quad \text{ou como no caso de } H'_c\text{:}$$

$$(3) \qquad \boxed{<f,g'> = \int_a^b f\tilde{g}' + \sum_{j=1}^{m} s_j f(t_j)} \qquad \forall f \in C^0[a,b]$$

Aqui também obtemos de modo análogo ao de H_c que

$\displaystyle\int_a^x g' = g$ como se poderá verificar, ficando, bem entendido, tratar-se de integral simbólica, representando a forma linear aplicada a 1 : $<1,g'>$ no intervalo $[a,x]$.

Sempre supondo $\tilde{g}$ absolutamente contínua, teríamos resultado análogo para o caso em que o número de descontinuidade não é finito (mas enumerável de acordo com o Teorema II.5).

(4) $$\boxed{\langle f,g'\rangle = \int_a^b f\tilde{g}' + \sum_j s_j f(t_j)}$$

Observa-se que, como δ_c, g' define também funcional linear contínuo sobre $C^0[a,b]$ com (3) ou (4). Temos:

$$|\langle f,g'\rangle| \leq \max_{a\leq x\leq b}|f(x)| \int_a^b |\tilde{g}'| + \max_{a\leq x\leq b}|f(x)| \sum_j |s_j| \Longrightarrow$$

$$|\langle f,g'\rangle| \leq C\|f\|_\infty \quad \text{com} \quad C = \int_a^b |g'| + \sum_j |s_j| < \infty .$$

Obviamente todos esses funcionais tem sua representação em forma de integral de Stieltjes com

$\langle f,g'\rangle = \int_a^b f(x)dg(x)$, de acordo com o teorema 6 do Capitulo II.Portanto, trata-se apenas de maneiras diferentes de representar um mesmo funcional. (Para evitar qualquer confusão, aliás, convém lembrar que $V_0[a,b]$ não é o dual de $C^0[a,b]$ mas sim um espaço de funções isomorfo a $\{C^0[a,b]\}^*$. Portanto as funções generalizados derivadas de funções de $V[a,b]$ definidas em (4), formam conjunto isomorfo a uma parte do dual de $C^0[a,b]$ e não propriamente parte do mesmo).

Será mais cômodo daqui por diante escrever igualdades de funções generalizadas da qual podem eventualmente participar funções comuns.

Assim as igualdades que representam (2), (3) e (4) são respectivamente:

$$H_c' = \delta_c$$

$$g' = \tilde{g}' + \sum_{j=1}^{m} s_j \delta_{t_j}$$

$$g' = \tilde{g}' + \sum_j s_j \delta_{t_j}$$ relações essas no sentido das funções generalizadas.

III.2. Fórmulas de integração por partes generalizada

O procedimento de derivação generalizada em base na integral de Stieltjes é limitado à derivada primeira de algumas funções de $V[a,b]$. Em muitos casos temos necessidade de usar derivadas de ordem superior. Para tanto é necessário recorrer a uma interpretação diferente da derivação expressa por (2), (3) e (4) que vai inclusive permitir estendê-la a classes muito mais amplas de funções como a das (Lebesque) integráveis.

Antes de mais nada, é preciso recordar a fórmula clássica de integração por partes.

Quando f e g são funções continuamente diferenciáveis, isto é, $f,g \in C^1[a,b]$ vale a fórmula:

$$(5) \qquad \boxed{\int_a^b fg' = fg\Big/_a^b - \int_a^b f'g}$$

onde $fg\Big/_a^b = f(b)g(b) - g(a)f(a)$ é o termo integrado. As integrais de (5) podem ser considerados também integrais de Riemann uma vez que $f'g$ e $fg' \in C^0[a,b]$.

Recorda-se que (5) pode ser deduzida a partir da integração membro a membro da fórmula de Leibnitz:

$$(fg)' = fg' + f'g \qquad , \quad f,g \in C'[a,b].$$

Agora, pode-se demonstrar que se f e g são absolutamente contínuas em $[a,b]$, fg também é absolutamente contínua.

__Exercício 1:__ Provar que se f e g são absolutamente contínuas então fg também o é.

__Sugestão:__ Majorar f e g pelo máximo em qualquer conjunto de intervalos de $[a,b]$.

Assim devemos ter:

$$f(b)g(b) = \int_a^b (fg)' + g(a)f(a)$$

Usando agora a fórmula de Leibnitz nos pontos em que fg é diferenciável vem:

$$(fg)' = f'g + fg' \quad q.t.p \quad \text{em } [a,b].$$

Pode-se provar ainda como:

<u>Exercício 2</u>: O produto de uma função de $\mathcal{L}^1[a,b]$ por uma função contínua também é de $\mathcal{L}^1[a,b]$.

Daí vem que $f'g,\ fg' \in \mathcal{L}^1[a,b]$, donde:

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

o que prova a validade de (5) para f e g "apenas" absolutamente contínuas.

Vamos agora interrelacionar (2) e (5).

Seja $g = H_c$ e f absolutamente contínua em $[a,b]$.

Com isso vemos que o 2º membro de (5) é bem definido no sentido usual, valendo precisamente:

$$H_c f \Big/_a^b - \int_a^b f'H_c = H_c(b)f(b) - H_c(a)f(a) - \int_c^b f'$$

$$= f(b) - [f(b) - f(c)] = f(c).$$

Então poderíamos igualmente definir H_c' por (5), isto é:

$\int_a^b fH_c' = f(c) \quad \forall f$ absolutamente contínua em $[a,b]$, sendo simbólica a integral da relação acima.

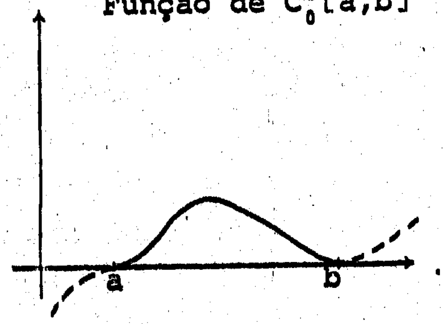
Imaginemos agora que desejemos a derivada segunda de H_c. Nota-se que se f e g têm a 1ª derivada absolutamente contínua vale:

$$\int_a^b fg'' = fg' \Big/_a^b - \int_a^b f'g'$$

Termos integrados como $fg'\Big/_a^b$ representam incovenientes que será útil eliminar. Por isso tomamos $f \in C_0^1[a,b]$, subespaço de $C^1[a,b]$ assim definido(*):

$$C_0^1[a,b] = \{f/ \ \ f\in C^1[a,b],\ f(b) = f(a) = f'(b) = f'(a) = 0\}$$

Função de $C_0^1[a,b]$



Nesse caso temos:

$$\int_a^b fg" = -\int_a^b f'g' \quad \forall f\in C_0^1[a,b]$$

se g' é absolutamente contínua.

Supondo-se porém que apenas g é absolutamente contínua g" não é necessariamente função (pelo menos não de $\mathcal{L}^1[a,b]$). Nesse caso, porém, definimos g" por:

(6) $$\boxed{\int_a^b fg" = \int_a^b f'g'} \qquad \forall f \in C_0^1[a,b]$$

Mais ainda, suponhamos agora g "apenas" em $V[a,b]$. Por exemplo $g = H_c$. Teríamos:

$$\int_a^b fH_c'' = -\int_a^b f'H_c' \quad \text{ou seja}$$

$$\int_a^b fH_c'' = -f'(c) \qquad \forall f \in C_0^1[a,b]$$

Sendo todas as integrais acima simbólicas, preferimos escrever:

(7) $$\boxed{\langle f,H_c''\rangle = -f'(c)} \qquad \forall f \in C_0^1[a,b]$$

De modo coerente com nosso procedimento anterior, denotaremos $H_c'' = \delta_c'$. δ_c' derivada do delta de Dirac é conhecida como dipolo ou doublet.

(*) Na verdade para nosso interesse imediato bastaria $f(b)=f(a)=0$. Entretanto pelo que se verá na seção seguinte a escolha desse subespaço é mais coerente.

Podemos agora, de modo análogo ao já feito para a derivada primeira, generalizar o procedimento usado para H_c a outras funções $g \in V[a,b]$.

Assim sendo, com

$$g = \tilde{g} + \sum_j s_j \chi_{I_j} \qquad I_j = [t_j, b],$$

supondo que $\tilde{g}'$ é absolutamente contínua, vem:

$$(8) \qquad \boxed{\langle f, g'' \rangle = -\int_a^b f'\tilde{g}' - \sum_j s_j f'(t_j)} \qquad \forall f \in C_0^1[a,b].$$

Deve ficar claro que a derivada segunda generalizada definida por (8) coincide com a derivada comum (no sentido q.t.p) quando $g'' \in \mathcal{L}^1[a,b]$, ou seja, quando g' é absolutamente contínua.

Agora, observando que se f' é absolutamente contínua, por exemplo, se $f \in C_0^2[a,b]$ onde $C_0^2[a,b]$ é o subespaço de $C^2[a,b]$ definido por:

$$C_0^2[a,b] = \{f/f \in C^2[a,b],\ f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=f''(a)= =f''(b)=0\}.$$

teríamos ainda:

$$\int_a^b f'g' = f'g\Big/_a^b - \int_a^b f''g \text{ , ou seja, com (6)}$$

$$(9) \qquad \boxed{\langle f, g'' \rangle = \int_a^b f''g} \qquad \forall f \in C_0^2[a,b]$$

Com essa interpretação, vemos que não precisamos nos restringir a funções g tão particulares como as de $V[a,b]$, tais que $\tilde{g}'$ seja absolutamente contínua. Basta que $g \in \mathcal{L}^1[a,b]$ para que o 2º membro de (9) tenha sentido. Observe-se ainda que se $g'' \in \mathcal{L}^1[a,b]$ a simbologia $\langle .,. \rangle$ corresponde efetivamente a uma integral.

A idéia da derivação generalizada está portanto lançada: se não podemos derivar uma função de modo que a derivada tenha propriedades desejáveis, que derivadas q.t.p nem sempre têm (com respeito a primitivas, por exemplo), adotamos o procedimento seguinte:

Trabalhamos em dualidade com funções-teste suficientemente diferenciáveis e de propriedades convenientes de nulidade em a e b, e passamos a derivação para estas.

Como definir então derivadas de qualquer ordem m de funções $g \in \mathcal{L}^1[a,b]$? Tomamos funções teste do subespaço $C_0^m[a,b]$ de $C^m[a,b]$ tal que

$$C_0^m[a,b] = \{f/f \in C^m[a,b] \quad e \quad f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0;\ i=0,1,..,m\}$$

com $\qquad f^{(0)}(x) = f(x) \qquad \forall x.$

Agora $\forall g \in \mathcal{L}^1[a,b]$ definiremos $g^{(m)}$ derivada generalizada de ordem m de g por:

$$(10) \qquad \boxed{\langle f, g^{(m)} \rangle = (-1)^m \int_a^b f^{(m)} g} \qquad \forall f \in C_0^m[a,b].$$

Interpretando (10) como uma aplicação sobre f vemos que $g^{(m)}$ define nada mais e nada menos do que um funcional linear sobre o espaço vetorial normado $C_0^m[a,b]$, com a norma $\|\cdot\|_{m,\infty}$, onde

$$(11) \qquad \boxed{\|f\|_{m,\infty} = \max_{0 \le j \le m} \{ \max_{a \le x \le b} |f^{(j)}(x)| \}}$$

Como sabemos, $C^0[a,b]$, é um espaço de Banach para a norma

$$\|f\|_{0,\infty} = \max_{a \le x \le b} |f^{(0)}(x)|.$$

O mesmo ocorre com $C_0^0[a,b]$ por ser subespaço fechado de $C^0[a,b]$

Agora, para a norma

$$\|f\|_{1,\infty} = \max_{0 \le j \le 1} \{ \max_{a \le x \le b} |f^{(j)}(x)| \}$$

$C^1[a,b]$ é completo assim como seu subespaço $C_0^1[a,b]$ por razões análogas. De modo mais geral $C_0^m[a,b]$ é um espaço de Banach para a norma (11).

Com isso podemos concluir que derivadas generalizadas de ordem i, $i \leq m$ de funções $g \in \mathcal{L}^1[a,b]$ definidas em (10) são elementos do dual de $C_0^m[a,b]$; de fato;

$$|\langle f,g^{(i)}\rangle| = \left|\int_a^b f^{(i)} g\right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f^{(i)}(x)| \int_a^b |g| \text{ , ou}$$

seja: $|\langle f,g^{(i)}\rangle| \leq C \, \|f\|_{m,\infty} \quad \forall f \in C_0^m[a,b]$, com $C = \int_a^b |g| < \infty$.

Vamos concluir esta apresentação das funções generalizadas, observando que o uso de $C_0^m[a,b]$ não é a única maneira de se definir derivadas generalizadas de ordem menor ou igual a m. A escolha desse espaço é no entanto estratégica, permitindo, entre outras coisas, que a integral simbólica

$$\int_a^b fg^{(m)} = \langle f,g^{(m)}\rangle$$

possa ser definida de maneira simples por (10) e que ela coincida com a integral comum desde que g seja suficientemente diferenciável. Por exemplo, a escolha de $C^m[a,b]$ seria incoveniente devido aos termos integrados que apareceriam.

No capítulo seguinte veremos como obter tal propriedade com espaço um pouco menos restrito do que $C_0^m[a,b]$.

II.3. Noções sobre distribuições

Na análise que fizemos nos dois parágrafos precedentes apenas introduzimos de uma maneira indireta aspectos da teoria desenvolvida particularmente por Laurent Schwartz, formalizando e consagrando o uso das funções generalizadas em Análise Funcional: essa é a teoria das distribuições[14].

Não é nosso intuito estudar em detalhes ou rigorosamente tal assunto, aliás bem vasto e de complexidade que exige conhecimentos matemáticos cujo tratamento fugiria ao objetivo deste texto.

A intenção é tão somente a de apresentar suas noções básicas, assim como seu emprego no estudo de equações diferenciais.

Já sabemos "derivar" qualquer função integrável até certa ordem m; para tanto trabalhamos com um espaço de funções teste $C_0^m[a,b]$.

Como faríamos agora para conseguir derivadas de qualquer ordem? Certamente precisaríamos de um espaço de funções-teste infinitamente diferenciáveis no sentido usual, com certas propriedades de nulidade em a e b.

O espaço de que necessitamos é, em outras palavras, um subespaço de $C^\infty[a,b]$ tal que $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0$, $i=0,1,2,\ldots$

Para definirmos convenientemente o espaço das funções-teste escolhido por Schwartz precisamos da:

<u>Definição 1</u>: <u>Suporte</u> de uma função f é o menor fechado de $\mathbb{R}$ que contém o conjunto de pontos x tais que $f(x) \neq 0$. Denotamos

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x / f(x) \neq 0\}}$$

onde a barra superior representa o fecho do conjunto.

<u>Exemplo 1</u>: Seja a função $f(x) = \text{sen}x$.

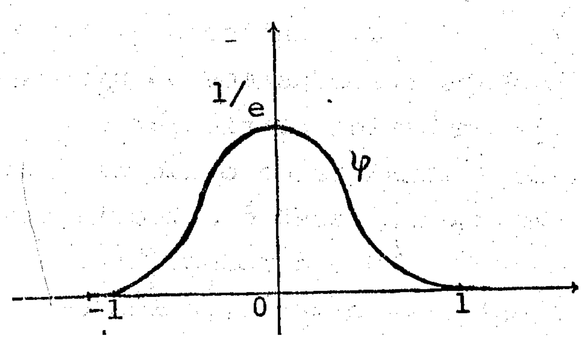
Sabemos que $\text{sen}x = 0$ se $x = k\Pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Portanto $\text{supp}(\text{sen}x) = \mathbb{R}$

<u>Exemplo 2</u>: Seja a função $$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } |x|<1 \\ 0 & \text{se } |x|\geq 1 \end{cases}$$

Temos: $\varphi(x) \neq 0$ se $|x|<1$

Porém $\text{supp}(\varphi) = \{x / |x| \leq 1\}$

ou seja $\text{supp}(\varphi) = [-1,1]$



Agora definimos nosso espaço de funções-teste $\mathcal{D}(a,b)$:

$$\mathcal{D}(a,b) = \{\varphi/\varphi \in C^{\infty}[a,b], \quad supp(\varphi) \subset (a,b)$$

Como o suporte de φ é sempre fechado e limitado porque está contido em (a,b), $\mathcal{D}(a,b)$ é comumente definido como o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis cujo suporte é compacto contido em (a,b).

A pergunta natural que deve surgir é se tal espaço não está reduzido à função identicamente nula em $[a,b]$. A resposta é negativa. Por exemplo a função do exemplo 2 é de $\mathcal{D}(a,b)$ se (a,b) é tal que contém $[-1,1]$.

Exercício 3: Verificar que a função definida por:

$$\varphi_{\Theta}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}\, e^{-\frac{1}{(x-b)^2}} & \text{se } \Theta a<x<\Theta b \\ 0 & \text{se } x\leq\Theta a \text{ e } x\geq\Theta b \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{D}(a,b)$ se $a\leq 0$ e $b\geq 0$.

Além disso se $a,b\geq 0$, idem para

$$\varphi_{\Theta}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-\frac{a}{\Theta})^2}}\, e^{-\frac{1}{(x-\Theta b)^2}} & \text{se } \frac{a}{\Theta}<x<\Theta b \\ 0 & \text{se } x\leq\frac{a}{\Theta} \text{ e } x\leq\Theta b \end{cases}$$

com $\sqrt{\frac{a}{b}} < \Theta < 1$.

Se $a,b\leq 0$ tomar $\sqrt{\frac{b}{a}} < \Theta < 1$ e

$$\varphi_{\Theta}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-\Theta a)^2}}\, e^{-\frac{1}{(x-\frac{b}{\Theta})^2}} & \text{se } \Theta a<x<\frac{b}{\Theta} \\ 0 & \text{se } x\leq\Theta a \text{ e } x\geq\frac{b}{\Theta} \end{cases}$$

Agora, tomando-se φ_{Θ} como no Exercício 3, podemos construir tantas outras funções $\mathcal{D}(a,b)$ quanto quisermos usando o procedimento seguinte: multiplicamos φ_{Θ} por funções α infinitamente diferenciáveis em $[a,b]$. De fato, nesse caso $\alpha\varphi_{\Theta} \in C^{\infty}[a,b]$

Além disso temos:

$$\mathrm{supp}(\alpha\varphi_\Theta) \subset \mathrm{supp}(\varphi_\Theta) \subset (a,b)$$

Daí segue que $\alpha\varphi_\Theta \in \mathcal{D}(a,b)$ como queríamos.

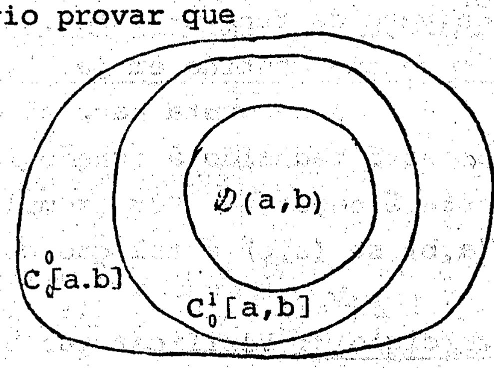
Parece-nos ser desnecessário provar que

$$\mathcal{D}(a,b) \subset C_0^m[a,b] \quad \forall m$$

e que $\mathcal{D}(a,b)$ é um espaço vetorial

Porém

$$\mathcal{D}(a,b) \neq \bigcap_{m=0}^{\infty} C_0^m[a,b]$$



Por exemplo $\varphi \in C_0^m[-1,1]$ $\forall m$. Porém $\varphi \notin \mathcal{D}(-1,1)$.

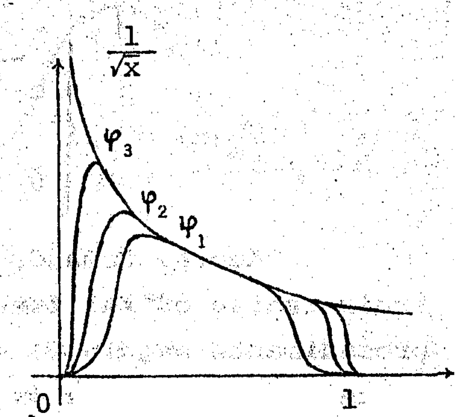
Vimos que para $C_0^m[a,b]$ podemos definir a norma (11) para a qual esse espaço é completo. No entanto para $\mathcal{D}(a,b)$ surge o incoveniente de que não é um espaço normável de forma que seja um espaço completo. Tal dificuldade aparece precisamente da exigência que o suporte de um elemento de $\mathcal{D}(a,b)$ esteja estritamente contido em (a,b), propriedade que não é estável por passagem ao limite.

É importante aliás observar neste ponto que, se por um lado $\mathcal{D}(a,b)$ não é completo para a norma (11) para certo m, limites de seqüências de Cauchy de $\mathcal{D}(a,b)$ nessa norma são elementos de $C_0^m[a,b]$. Na verdade $\mathcal{D}(a,b)$ é denso em $C_0^m[a,b]$ para a norma (11).

Outro resultado correlato nada evidente é que $\mathcal{D}(a,b)$ é denso em $\mathcal{L}^p[a,b]$ $1 \leq p \leq \infty$ para a norma

$$\|\cdot\|_p = \left[\int_a^b |\cdot|^p\right]^{1/p}$$

A demonstração desses resultados de densidade que usaremos mais adiante, exige conhecimentos que não estão disponíveis aqui. A idéia está ilustrada ao lado para uma função não limitada de $\mathcal{L}^1[0,1]$ (ver p. ex.[1]).



Voltando ao problema de "medir distâncias" em $\mathcal{D}(a,b)$, é então imperioso substituir a noção de convergência em norma pela seguinte:

<u>Definição 2</u>: Uma seqüência $\{\varphi_n\}$ de $\mathcal{D}(a,b)$ convergirá para $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ se:

1º) $\exists K$, compacto contido em (a,b) tal que $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K \quad \forall n$

2º) $\max_{x \in K} |\varphi_n^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x)| \to 0 \quad \forall m$

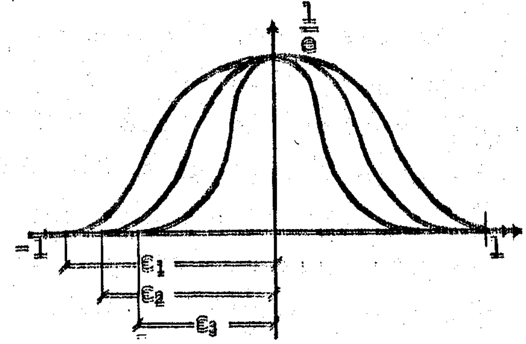
A propriedade é alternativamente expressa pelo fato de que a seqüência $\{\varphi_n - \varphi\}$ de $\mathcal{D}(a,b)$ assim como a de derivadas de qualquer ordem, convergem uniformemente para 0 em K.

<u>Exemplo 3</u>: A seqüência $\{\varphi_\varepsilon\}$ definida para $\varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$ por

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-(\frac{x}{\varepsilon})^2}} & \text{se} \quad |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

não converge para nenhuma função de $\mathcal{D}(-1,1)$ quando $\varepsilon \to 0$. De fato $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \subset [-1,1] \quad \forall \, \varepsilon \leq \varepsilon_0$. No entanto $\varphi_\varepsilon(0) = \frac{1}{e} \; \forall \varepsilon$.

Isto implica que o limite teria que ser uma função descontínua como indica a ilustração ao lado.



<u>Exemplo 4</u>: A seqüência $\{x^n \varphi\}$ converge para 0 em $\mathcal{D}(-1,1)$ se $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$. De fato, se $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$, $\exists \alpha < 1$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \in [-\alpha, \alpha]$. Logo $\operatorname{supp}(x^n \varphi) \in [-\alpha, \alpha] \; \forall n$. Por outro lado:

$$\max_{x \in (-1,1)} |x^n \varphi(x)| = \max_{x \in [-\alpha,\alpha]} |x^n \varphi(x)| \leq \alpha^n \, \|\varphi\|_\infty \to 0.$$

Analogamente temos:

$$|(x^n\varphi)^{(m)}| = \sum_{i=1}^{m} C^{i} \prod_{j=0}^{i-1} (n-j)\, x^{n-i}\varphi^{(m-i)}(x) + x^{n}\varphi^{(m)}(x) \quad \text{com } n \geq m.$$

$$|(x^n\varphi)^{(m)}| \leq C_m^{[\frac{m}{2}]}\, n^m \alpha^{n-m} \sum_{i=0}^{m} \max_{x\in[-\alpha,\alpha]} |\varphi^{(m-i)}(x)| \qquad \forall x,\ \forall m.$$

Logo

$$\max_{x\in[-\alpha,\alpha]} |(x^n\varphi)^{(m)}| \leq C_m^{[\frac{m}{2}]}\, n^m \alpha^{n-m} \sum_{i=0}^{m} \max_{x\in[-\alpha,\alpha]} |\varphi^{(m-i)}(x)| \qquad \forall m$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{x\in[-\alpha,\alpha]} |(x^n\varphi)^{(m)}| = 0 \qquad \forall m$

Obs.: $\left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m}{2}$ se m é par;

$\left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m-1}{2}$ se m é impar;

Observe-se que essa noção de convergência generaliza em certo sentido a noção de convergência em norma. Por exemplo, se se tratasse de $C_0^m[a,b]$ com a norma (11) teríamos que testar a convergência de $\{\varphi_n - \varphi\}$ para 0 assim como a das derivadas, sempre na norma do máximo. Só que nesse caso em vez de testar a de todas as derivadas o faríamos só até a ordem m.

Podemos agora definir uma distribuição. Isso se fará da maneira mais natural possível, isto é, como uma espécie de funcional linear contínuo que engloba todos os já definidos para $C_0^m[a,b]$:

<u>Definição 3</u>: Distribuição de Schwartz é um funcional linear contínuo T definido sobre $\mathcal{D}(a,b)$ sendo que a continuidade se exprime por:

$$\langle\varphi_n, T\rangle \to \langle\varphi, T\rangle \quad \text{em } \mathbb{R} \text{ sempre que } \{\varphi_n\},$$

seqüência de $\mathcal{D}(a,b)$, convergir para $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ no sentido da Definição 2.

Num sentido algo mais amplo do que o habitual o conjunto de tais funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{D}(a,b)$ é o dual desse espaço, que denotaremos $\mathcal{D}'(a,b)$ dito o espaço das distribuições de Schwartz.

A seguir damos exemplos de elementos de $\mathcal{D}'(a,b)$

1º) Em primeiro lugar, qualquer função $g \in \mathcal{L}^1[a,b]$ define uma distribuição por:

$$<\varphi,g> = \int_a^b \varphi g$$

De fato $|<\varphi_n - \varphi,g>| \leq \max_{x \in (a,b)} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_a^b |g|$

Assim $|<\varphi_n - \varphi,g>| \to 0$ se $\varphi_n - \varphi \to 0$ em $\mathcal{D}(a,b)$

2º) Mesmo certas funções não integráveis em $[a,b]$ podem definir distribuições via integração. Esse é o caso de funções localmente integráveis(*) em (a,b), isto é, de funções $g \in \mathcal{L}(K)$ $\forall K$, onde K é qualquer compacto contido em (a,b). Isso porque para todo $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ e toda seqüência $\{\varphi_n\}$ que converge para φ em $\mathcal{D}(a,b)$, $\exists K \subset (a,b)$ tal que $\varphi_n(x) = \varphi(x) = 0$ se $x \notin K$. Logo:

$<\varphi - \varphi_n, g> = \int_a^b (\varphi - \varphi_n) g = \int_K (\varphi - \varphi_n) g$ e recaimos no caso anterior.

Nos dois casos acima, dizemos que a distribuição é regular.

3º) De modo mais geral, qualquer um dos funcionais lineares contínuos definidos por (10) é também uma distribuição. De fato por definição:

$$|<\varphi_n - \varphi, g^{(m)}>| \leq \max_{x \in (a,b)} |\varphi_n^{(m)} - \varphi^{(m)}(x)| \cdot \int_a^b |g|$$

Isso quer dizer que se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(a,b)$ então

$<\varphi_n - \varphi, g^{(m)}> \to 0$ em $\mathbb{R}$.

Tais distribuições não são mais necessariamente regulares pois $g^{(m)}$ não é, em geral, uma função clássica. Esse é, por exemplo, o caso do delta de Dirac, que agora denominaremos distribuição de Dirac.

(*) Por exemplo a função $1/x \notin \mathcal{L}^1[0,1]$. É, porém, localmente integrável em $[0,1]$.

A propósito de tais funcionais, observamos o seguinte: $g^{(m)}$ onde $g \in \mathcal{L}^1[a,b]$ define não só funcionais lineares contínuos sobre $C_0^m[a,b]$ como também sobre qualquer $C_0^\ell[a,b]$ com $\ell > m$ (verificar). Portanto nossa conclusão aqui pode ser considerada natural.

Assim como se define igualdade de funções ou ainda igualdade de funcionais, podemos definir analogamente a igualdade de distribuições. Assim, dizemos que $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(a,b)$ são iguais se:

$$<\varphi, T_1> = <\varphi, T_2> \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Mais ainda, podemos considerar seqüências de distribuições e definir convergência, só que não como se faz para funcionais sobre espaços vetoriais normados, onde se utiliza também a convergência na norma dual do supremo. Precisamos agora usar nossa noção de convergência em $\mathcal{D}(a,b)$.

Assim, diremos que uma seqüência $\{T_n\}$ de $\mathcal{D}'(a,b)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(a,b)$ se:

$$<\varphi, T_n> \to <\varphi, T> \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Exemplo 5: A seqüência $\{T_\varepsilon\}$ definida por

$$T_\varepsilon = \frac{\delta_c - \delta_{c+\varepsilon}}{\varepsilon}$$

converge para a distribuição δ_c' (dipolo) quando $\varepsilon \to 0$.

De fato:

$$<\varphi, T_\varepsilon> = \frac{\varphi(x) - \varphi(c+\varepsilon)}{\varepsilon} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} <\varphi, T_\varepsilon> = \lim_{\varepsilon \to 0} - \frac{\varphi(c+\varepsilon) - \varphi(c)}{\varepsilon} = -\varphi'(c) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Como sabemos: $<\varphi, \delta_c'> = -\varphi'(c) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. Logo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = \delta_c' \quad \text{em } \mathcal{D}'(a,b).$$

Exercício 4: A seqüência de distribuições regulares definidas por

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & \text{se } |x| \le \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

converge para δ_0 em $\mathcal{D}'(-1,1)$ quando $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon < 1$.

Sugestão: Usar o teorema do valor médio para integrais: se $f,g \in C^0[a,b]$ e $f \ge 0$ então $\exists \xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = g(\xi)\int_a^b f$$

Oportunamente lembramos que o exercício 4 faz exata - mente o paralelo entre a distribuição de Dirac e a "função" de Dirac tal como a apresentamos no início deste capítulo. De fa- to, se existisse o limite de $\{f_\varepsilon\}$ como função esta teria que ter aquele sentido (verificar).

Como já era possível se antever da preparação que fi- zemos até agora, poderemos definir derivadas de qualquer ordem de uma distribuição T como sendo a distribuição $T^{(m)}$ tal que:

$$(12) \qquad \boxed{\langle \varphi, T^{(m)} \rangle = (-1)^m \langle \varphi^{(m)}, T \rangle} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Em particular, se T é uma distribuição regular

$$\langle \varphi, T^{(m)} \rangle = (-1)^m \int_a^b T\varphi^{(m)} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Nesse caso essa derivada de T, função, é dita <u>derivada fraca</u>. Esta como sabemos nem sempre pode ser substituída pela derivada usual ou derivada no sentido q.t.p, que, se existe , corresponde sempre a uma distribuição regular.

É de se notar que a derivada fraca coincide com a de- rivada q.t.p., no sentido que podemos substituir a primeira pe- la segunda no primeiro membro de (12), em casos tais como:

- T é função de $C^m[a,b]$
- T é função de $C^{m-1}[a,b]$ e $T^{(m-1)}$ é absolutamente contínua. Neste caso $T^{(m)} \in \mathcal{L}^1[a,b]$ e o primeiro mem bro de (12) pode ser expresso como integral, ou seja:

$$\int_a^b \varphi T^{(m)} = (-1)^m \int_a^b T\varphi^{(m)}$$

Como conseqüência da definição (12) fica, não só que toda distribuição é infinitamente derivável como também que toda função localmente integrável em $[a,b]$ é infinitamente derivável em $[a,b]$ no sentido das distribuições (fracamente).

Propriedades fundamentais das derivadas comuns se estendem às derivadas fracas como, por exemplo, a seguinte [15 , pg.52];

(13) $\quad \langle \varphi^{(m)},T\rangle = \langle \varphi^{(m)},\bar{T}\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b) \Rightarrow T=\bar{T}+p_{m-1}$ onde

p_{m-1} é a distribuição regular associada a um polinômio de grau máximo m-1. Notar que (13) implica também em $T^{(m)} = \bar{T}^{(m)}$ em $\mathcal{D}'(a,b)$ e o resultado é exatamente o mesmo conhecido para funções comuns.

Para finalizar, julgamos oportuno estabelecer o vínculo entre nossa análise inicial sobre as funções generalizadas e as distribuições, citando um resultado essencial provado por L. Schwartz [15]:

Não existe nenhuma distribuição $T \in \mathcal{D}'(a,b)$ que não seja derivada fraca de certa ordem m de certa função f contínua sobre qualquer compacto de (a,b) (aliás, uma função localmente integrável).

Em resumo:

$$\forall T \in \mathcal{D}'(a,b) \quad \exists f \in C^0(a,b) \text{ e } m \text{ tais que:}$$

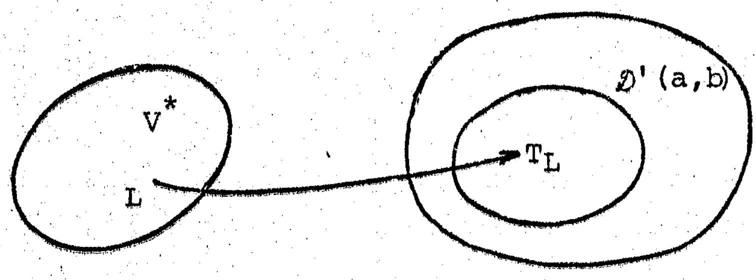
$$\langle \varphi,T\rangle = (-1)^m \langle \varphi^{(m)},f\rangle = (-1)^m \int_a^b f\varphi^{(m)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Portanto, tendo-se definido as distribuições com o intuito inicial de poder derivar funções a qualquer ordem, não se introduziu nenhum ente que não preencha exatamente essa finalidade.

III.4. Espaços de Distribuições

Como $\mathcal{D}'(a,b)$, outros espaços são constituídos por distribuições. Em particular, é este o caso dos duais de certos espaços V que contêm $\mathcal{D}(a,b)$. Antes de precisá-los porém, convém esclarecer o que se entende por espaço de distribuições:

É um espaço V^* que se identifica a uma parte de $\mathcal{D}'(a,b)$ no sentido que há uma correspondência biunívoca entre seus elementos e certo subespaço de $\mathcal{D}'(a,b)$.



Seja agora V um espaço que satisfaz

$$\mathcal{D}(a,b) \subset V$$

e tal que a aplicação injeção $\mathcal{J}$ de $\mathcal{D}(a,b)$ em V seja contínua:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}: \mathcal{D}(a,b) &\to V\\ \varphi &\mapsto \varphi\end{aligned}$$

isto é, se $\varphi_n \to \varphi$ em (a,b) então $\varphi_n \to \varphi$ em V.

Esse é, por exemplo, o caso de $C^m[a,b]$, $C_0^m[a,b]$ e $\mathcal{L}^p[a,b]$.

Agora, se $L \in V^*$, L define automaticamente uma distribuição T_L com:

$$\langle \varphi, T_L \rangle = L(\varphi) \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

De fato, como L é contínuo temos:

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{em} \quad \mathcal{D}(a,b) \Longrightarrow \varphi_n \to \varphi \quad \text{em } V \Longrightarrow$$

$$L(\varphi_n) \to L(\varphi) \Longrightarrow \langle \varphi_n, T_L \rangle \to \langle \varphi, T_L \rangle .$$

Porém, isso não implica que V^* seja um espaço de distribuições pois para isso seria preciso que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^*: V^* &\to \mathcal{D}'(a,b) \\ L &\to T_L \end{aligned}$$

fosse injetiva, ou seja: $T_{L_1} = T_{L_2} \Longrightarrow L_1 = L_2$ em V^*.

Damos a seguir uma condição necessária e suficiente para que tal ocorra:

"Se $\mathcal{D}(a,b)$ é denso em V então V^* é um espaço de distribuições".

A justificativa para essa afirmativa pode ser dada com a utilização de um Corolário do Teorema de Hahn-Banach [4]:

"Um subespaço D de X é denso em X se e somente se $\forall F \in X^*$ tal que

$$F(x) = 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow F(x) = 0 \quad \forall x \in X".$$

Assim, supondo-se $L_1, L_2 \in V^*$ tais que $T_{L_1} = T_{L_2}$ em $\mathcal{D}'(a,b)$, temos

$$<\varphi, T_{L_1}> = L_1(\varphi) = <\varphi, T_{L_2}> = L_2(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Logo $(L_1 - L_2)(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b) \Longrightarrow$

$L_1 = L_2$ se e somente se $\mathcal{D}(a,b)$ for denso em V.

<u>Exemplo 6:</u> $L^q[a,b]$, $1<q\leq\infty$ é um espaço de distribuições. De fato, como sabemos, $L^q[a,b]$ é o dual de $L^p[a,b]$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p\geq 1$. Ora, como $\mathcal{D}(a,b)$ é denso em $L^p[a,b]$, $1\leq p<\infty$ procede a afirmativa. Observa-se que aqui temos um espaço de distribuições regulares.

$$<\varphi, T_L> = \int_a^b T_L \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b) \;, \quad T_L \in L^q[a,b].$$

<u>Exemplo 7</u> : $\{C_0^m[a,b]\}^*$ é um espaço de distribuições. De fato, $\mathcal{D}(a,b)$ é denso em $C_0^m[a,b]$ $\forall m$, daí o resultado.

Já sabemos que certas funções generalizadas definiam elementos do dual de $C_0^m[a,b]$. Agora vemos também que, inversamente, qualquer elemento do dual de $C_0^m[a,b]$ está associado a uma distribuição, ou seja, uma função generalizada.

<u>Exemplo 8</u> : $\{C^m[a,b]\}^*$ não é um espaço de distribuições. Isto porque $\mathcal{D}(a,b)$ não é denso em $C^m[a,b]$.

É claro que elementos do dual de $C^m[a,b]$ sempre definem distribuições considerando-se sua restrição a $\mathcal{D}(a,b)$. Porém a diferentes funcionais lineares contínuos sobre $C^m[a,b]$ podem corresponder uma mesma distribuição. Um exemplo trivial desse fato é a dos funcionais

$\delta_0', \delta_1' \in \{C^1[0,1]\}^*$ definidos por:

$$\delta_0'(f) = f'(0) \quad \text{e} \quad \delta_1'(f) = f'(1) \qquad \forall f \in C^1[0,1]$$

A ambos corresponde a distribuição nula de $\mathcal{D}'(0,1)$.

CAPITULO IV - ESPAÇOS H^m (ESPAÇOS DE SOBOLEV) e H^{-m}

Já introduzimos no Capítulo I espaços de funções definidas por suas propriedades de integração: os espaços L^p. Agora apresentaremos outra família de espaços igualmente importantes no estudo de equações diferenciais e que são aliás extensões dos L^p: os espaços de Sobolev.

IV.1. Definições e Propriedades

Iniciamos com a definição formal dos espaços H^m, m inteiro não negativo.

Definição 1: $H^m(a,b)$ é o conjunto de funções v definidas sobre um intervalo $[a,b]$ tais que, não só v seja de quadrado integrável como também todas as suas derivadas fracas até a de ordem m (daí vem que $H^0(a,b) \equiv L^2(a,b)$).

Coerentemente com convenção frequentemente adotada na literatura, vamo-nos referir daqui em diante, imprópria e definitivamente, a $L^p(a,b) \equiv L^p[a,b]$ como um espaço de funções. Tal procedimento não terá conseqüências relevantes desde que se tenha presente que funções iguais q.t.p não devem ser distinguidas umas das outras.

Podemos assim escrever sucintamente:

$$H^m(a,b) = \{v/v \in L^2(a,b),\ \ v' \in L^2(a,b), \ldots, v^{(m)} \in L^2(a,b)\}.$$

Apesar de isso não ter utilidade no nosso curso, analogamente se definiria os espaços de Sobolev $W^{m,p}(a,b)$ de funções $v \in L^p(a,b)$ tais que suas derivadas fracas até a m-ésima pertençam também a $L^p(a,b)$.

A definição dos espaços $H^m(a,b)$ com derivadas fracas é apenas por conveniência para certos desenvolvimentos a serem feitos posteriormente. Prova-se, na realidade que, se uma função é de $H^m(a,b)$, todas as suas derivadas q.t.p até a m-ésima existem e coincidem com as derivadas fracas. Isso nos permitirá, na prática, trabalhar com as derivadas usuais.

<u>Teorema 1</u>: Se $v \in H^m(a,b)$ então todas as derivadas q.t.p de v até a de ordem <u>m</u> existem e são precisamente iguais q.t.p às derivadas fracas respectivas.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos inicialmente $m=1$

Sabemos que $v \in L^2(a,b)$ e que v', derivada fraca de v, é também uma distribuição regular de $L^2(a,b)$.

Como $v' \in L^2(a,b)$ temos também $v' \in L^1(a,b)$ (ver Capítulo I, pag. 30).

Seja υ uma primitiva de v', com

$$\upsilon(x) = \int_a^x v'$$

É sabido que υ é absolutamente contínua e que sua derivada q.t.p é v'.

Tomemos agora $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. Podemos aplicar integração por partes no sentido usual a $\upsilon\varphi'$, isto é:

$$\int_a^b \upsilon\varphi' = \upsilon\varphi\Big/_a^b - \int_a^b \varphi v'$$

Porém $\upsilon\varphi\Big/_a^b = 0$. Logo

$$\int_a^b \upsilon\varphi' = -\int_a^b v'\varphi \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Por outro lado, υ é distribuição regular, assim como v'. Temos então:

$$<\upsilon,\varphi'> = \int_a^b \upsilon\varphi' \quad \text{e} \quad <v',\varphi> = \int_a^b v'\varphi \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Logo $\quad <\upsilon,\varphi'> = -<v',\varphi> \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$

Como v' é derivada fraca de ν temos também:

$$\langle v',\varphi\rangle = - \langle v,\varphi'\rangle \quad \forall \ \varphi\in \mathcal{D}(a,b)$$

Isso mostra que v e ν são distribuições primitivas de v'. Mas pelos resultados de L. Schwartz:

$$v-\nu = \text{constante}$$

Por conseguinte v tem uma derivada q.t.p igual à derivada q.t.p de ν, isto é, v'.

Para provar o teorema para derivadas de qualquer ordem <u>i</u>, basta usar o argumento seguinte:

Como $v^{(i)}$ é regular sua derivada fraca $v^{(i)'}$ é tal que

$$\langle v^{(i)'},\varphi\rangle = -\langle v^{(i)},\varphi'\rangle \quad \forall \ \varphi\in \mathcal{D}(a,b).$$

Mas $v^{(i)}$ é derivada fraca de v de ordem i. Logo

$$\langle v^{(i)},\varphi'\rangle = (-1)^{i} \quad \langle v,\varphi^{(i+1)}\rangle$$

Como $\langle v,\varphi^{(i+1)}\rangle = (-1)^{i+1}\langle v^{(i+1)},\varphi\rangle \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(a,b)$ onde $v^{(i+1)}$ é a (i+1)-ésima derivada fraca de v vem: $v^{(i)'} = v^{(i+1)}$.

Para concluir usa-se a indução finita:

Supondo-se provado que $v^{(i)}$, além de derivada fraca é derivada i-ésima q.t.p de v, prova-se que $v^{(i+1)}$ é derivada (i+1)-ésima q.t.p. de v da mesma forma utilizada para v'.

c.q.d.

A primeira conseqüência importante do Teorema 1 é a seguinte:

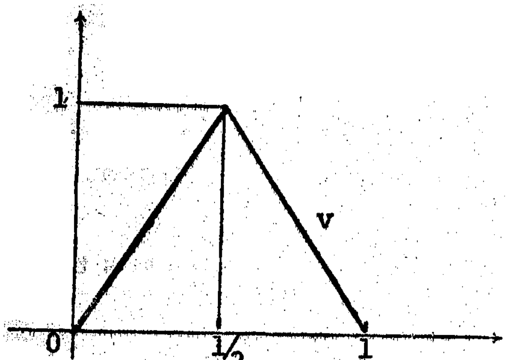
Uma função pertence a $H^{m}(a,b)$ quando:

1º) Todas as derivadas q.t.p dessa função até a de ordem m existem e são de quadrado integrável.

2º) Todas essas derivadas q.t.p coincidem com as respectivas derivadas fracas.

Se uma dessas condições não se verificar a função em questão não será de $H^m(a,b)$.

<u>Exemplo 1</u>: A função v linear por pedaços pertence a $H^1(0,1)$ mas não a $H^2(0,1)$:

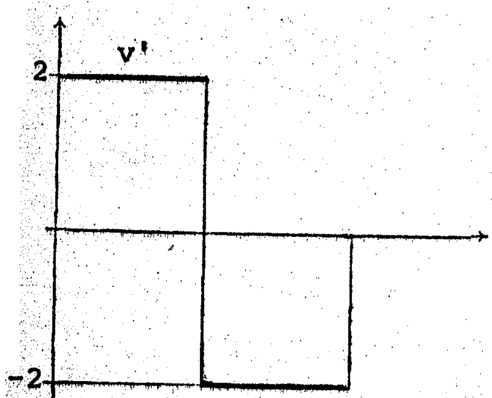


$$v(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0\le x\le 1/2 \\ 2(1-x) & \text{se } 1/2\le x\le 1 \end{cases}$$

Como $v\in C^0[0,1]$ então $v\in L^2(0,1)$. A derivada q.t.p. v' de v é também certamente de $L^2(0,1)$.

Por outro lado, a derivada fraca de v' é uma distribuição não regular, enquanto que a derivada q.t.p de v' é a função idênticamente nula.

Logo com a 2º condição violada, não é possível ter $v\in H^2(0,1)$.



<u>Exemplo 2</u>: A função $x^{-1/4}\in L^2(0,1)$, não pertence a $H^1(0,1)$.

De fato $\int_0^1 (x^{-1/4})^2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2<\infty$, i.e. $x^{-1/4}\in L^2(0,1)$.

Porém a derivada q.t.p. de $x^{-1/4}$ é $-\frac{1}{4}x^{-5/4}$ e temos:

$$\int_0^1 (x^{-5/4})^2 = \int_0^1 x^{-5/2} = -\frac{2}{3}x^{-3/2}\Big|_0^1 = \infty$$

A 1ª condição é violada e portanto $x^{-1/4}\notin H^1(0,1)$.

Outra conseqüência importante do Teorema 1 é dada no:

Corolário 1: Se $v \in H^m(a,b)$ então $v \in C^{m-1}[a,b]$.

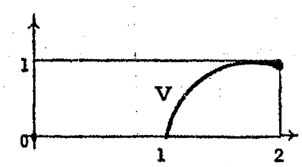
Demonstração: De fato, se todas as derivadas fracas de v são também derivadas q.t.p temos:

v é primitiva de $v' \in L^1(a,b)$, logo $v \in C^0[a,b]$
v' é primitiva de $v'' \in L^1(a,b)$, logo $v' \in C^0[a,b]$
⋮
$v^{(m-1)}$ é primitiva de $v^{(m)} \in L^1(a,b)$, logo $v^{(m-1)} \in C^0[a,b]$
c.q.d.

A recíproca do Corolário 1 não é verdadeira. Podemos ter $v \in C^{m-1}[a,b]$ mas $v \notin H^m(a,b)$. Vejamos um exemplo:

Exemplo 3: A função $v \in C^0[0,2]$ definida por

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



não pertence a $H^1(0,1)$.

De fato, a derivada q.t.p de v é:

$$v'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^{-1/2} & \text{se } 1 < x \le 2 \\ \text{indefinida para } x=1 \end{cases}$$

Temos: $\displaystyle\int_0^2 (v')^2 = \int_0^2 \frac{1}{x-1} = \mathrm{Ln}(x-1) \Big/_0^2 = \infty$.

Por outro lado deverá ser provado sem dificuldades o resultado:

Exercício 1: $v \in C^m[a,b] \Longrightarrow v \in H^m(a,b)$

Agora vamos ver que a Definição 1 dos espaços $H^m(a,b)$ poderia ser simplificada, de acordo com a propriedade seguinte:

Proposição 1: Se $v^{(m)}$ derivada fraca de ordem m de v pertence a $L^2(a,b)$ então $v \in H^m(a,b)$.

Demonstração: Como $v^{(m)} \in L^2(a,b)$ então $v^{(m)} \in L^1(a,b)$.

Logo $v^{(m)}$ é distribuição regular:

$$<v^{(m)},\varphi> = \int_a^b v^{(m)}\varphi \quad , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Seja $\nu^{(m-1)}$ definida por: $\nu^{(m-1)}(x) = \int_a^x v^{(m)}$

Como sabemos $\nu^{(m-1)} \in C^0[a,b]$. Logo temos

$$<\nu^{(m-1)},\varphi'> = \int_a^b \nu^{(m-1)}\varphi' \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Porém $\int_a^b \nu^{(m-1)}\varphi' = -\int_a^b v^{(m)}\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ pois

$\nu^{(m-1)}\varphi \Big/_a^b = 0.$

Logo $<\nu^{(m-1)},\varphi'> = -<v^{(m)},\varphi> \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$

Como $v^{(m-1)}$ derivada fraca (m-1)-ésima de v é também tal que $<v^{(m-1)},\varphi'> = -<v^{(m)},\varphi> \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ temos:

$$v^{(m-1)} = \nu^{(m-1)} + \text{constante}$$

Assim sendo $v^{(m-1)} \in C^0[a,b] \Longrightarrow v^{(m-1)} \in L^2(a,b)$.

Para as derivadas fracas de qualquer ordem $v^{(i)}$ $i=m-1,m-2,\ldots,0$ demonstra-se o resultado analogamente por indução finita. c.q.d.

Enfim uma propriedade algo evidente de $H^m(a,b)$ pode ser demonstrada como:

Exercício 2: Se $(c,d) \subset (a,b)$ então $v \in H^m(a,b) \Longrightarrow v \in H^m(c,d)$.

IV.2. O espaço normado $H^m(a,b)$

Tratemos agora do problema de normar $H^m(a,b)$.

Em primeiro lugar, definimos um produto escalar por

(1) $$\boxed{(u,v)_m = \int_a^b (uv + u'v' + \ldots + u^{(m)}v^{(m)})}$$ ou

$$(u,v)_m = \sum_{i=0}^{m} \int_a^b u^{(i)}v^{(i)}$$

Exercício 3: Provar que (1) define um produto escalar sobre $H^m(a,b)$, verificando previamente que tal expressão tem sentido.

A razão da inclusão de todas as derivadas na definição desse produto escalar, será vista a seguir com o teorema que mostra que $H^m(a,b)$ é completo para a norma associada, isto é:

(2) $$\boxed{\|v\|_{m,2} = \left[\int_a^b (|v|^2+|v'|^2+ \ldots + |v^{(m)}|^2)\right]^{1/2}}$$ ou

$$\|v\|_{m,2} = \left[\sum_{i=0}^{m}\int_a^b |v^{(i)}|^2\right]^{1/2}$$ ou ainda

(3) $$\boxed{\|v\|_{m,2} = \left[\sum_{i=0}^{m} \|v^{(i)}\|_2^2\right]}$$ onde $\|\cdot\|_2$ é a norma de $L^2(a,b)$.

Teorema 2: $H^m(a,b)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar (1).

Demonstração: Basta provar que $H^m(a,b)$ é completo para a norma (3).

Seja então $\{v_k\}$ seqüência de Cauchy de $H^m(a,b)$. Sabemos que

$$v_k^{(i)} \in L^2(a,b) \qquad \forall k,\ i=0,1,2,\ldots,m,$$

Por definição de seqüência de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ tal que $\forall k, \ell > N$

$$\left[\sum_{i=0}^{m} \| v_\ell^{(i)} - v_k^{(i)} \|_2^2 \right]^{1/2} \leq \varepsilon$$

Daí vem que $\| v_\ell^{(i)} - v_k^{(i)} \| \leq \varepsilon \quad \forall k, \ell > N$, ou seja $\{v_k^{(i)}\}$ é seqüência de Cauchy de $L^2(a,b)$ $i = 0,1,2,\ldots,m$. Como $L^2(a,b)$ é completo $v_k^{(i)} \to w_i$, $w_i \in L^2(a,b)$ $\forall i$.

Só resta provar que de fato $w_i = w_0^{(i)}$, $i=1,2,\ldots,m$ no sentido fraco, para concluirmos que, efetivamente $v_i \to w_0$ em $H^m(a,b)$.

Provemos inicialmente que $w_1 = w_0'$. Temos:

$$v_k \to w_0 \quad \text{em} \quad L^2(a,b) \Longrightarrow \langle v_k, \varphi \rangle \to \langle w_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

o que se pode provar como exercício. Por outro lado:

$$v_k' \to w_1 \quad \text{em} \quad L^2(a,b) \Longrightarrow \langle v_k', \varphi \rangle \to \langle w_1, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Porém, $\langle v_k', \varphi \rangle = -\langle v_k, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$

Como $\langle v_k, \varphi' \rangle \to \langle w_0, \varphi' \rangle$, pois $\varphi' \in \mathcal{D}(a,b)$ se $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$, devemos ter $\langle w_1, \varphi \rangle = -\langle w_0, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$, ou seja:

$$w_1 = w_0' .$$

Para derivadadas de qualquer ordem procede-se analogamente. c.q.d.

No corolário 1 vimos que $v \in H^m(a,b) \Longrightarrow v \in C^{m-1}[a,b]$, ou seja:

$$H^m(a,b) \in C^{m-1}[a,b]$$

Na verdade podemos provar ainda o resultado seguinte:

<u>Teorema 3</u>: O operador injeção de $H^m(a,b)$ em $C^{m-1}[a,b]$

$$\mathcal{J}: H^m(a,b) \to C^{m-1}[a,b]$$
$$v \mapsto v \qquad \text{é } \underline{\text{contínuo}}.$$

<u>Demonstração</u>: Temos que provar que existe uma constante M tal que

$$\|v\|_{m-1,\infty} \leq M \|v\|_{m,2} \qquad \forall v \in H^m(a,b)$$

(Para a definição de $\|\cdot\|_{m,\infty}$, norma de $C^m[a,b]$ ver Capítulo III, (11)).

Provemos inicialmente para m=1.

$\forall x,t \in [a,b]$ temos: $v^2(x) - v^2(t) = \int_t^x (v^2)'$

(Se t>x usamos a convenção usual quanto aos limites de integração).

Porém: $\left|\int_t^x [v^2]'\right| = \left|\int_t^x 2vv'\right|$.

Pela desigualdade de Schwartz vem ainda:

$$v^2(x) - v^2(t) \leq 2\left|\int_t^x v^2\right|^{1/2}\left|\int_t^x [v']^2\right|^{1/2} \leq 2\|v\|_2\|v'\|_2 \quad \forall x,t \in [a,b]$$

Como $v \in C^0[a,b]$, seja x_M um ponto de $[a,b]$ onde ocorre o máximo de $|v|$. Temos:

$$v^2(x_M) \leq v^2(t) + 2\|v\|_2\|v'\|_2$$

Agora integrando membro a membro com respeito a t em [a,b] vem:

$$(b-a)v^2(x_M) \leq \int_a^b v^2(t)dt + 2(b-a)\|v\|_2\|v'\|_2 \text{ , ou seja:}$$

$$v^2(x_M) \leq \frac{\|v\|_2^2 + 2(b-a)\|v\|_2\|v'\|_2}{b-a}.$$

Usando a desigualdade $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ vem:

$$v^2(x_M) \leq \frac{(b-a+1)\,\| v\|_2^2 + (b-a)\,\| v'\|_2^2}{b-a} \leq \frac{b-a+1}{b-a}\left(\| v\|_2^2 + \| v'\|_2^2\right)$$

o que enfim dá:

(4) $$\boxed{\| v\|_{0,\infty} \leq \sqrt{\frac{b-a+1}{b-a}}\;\| v\|_{1,2}} \qquad \forall v \in H^1(a,b)$$

O caso geral pode ser agora provado a partir de (4). De fato, temos analogamente:

$$\| v^{(i)}\|_{0,\infty}^2 \leq C^2 \| v^{(i)}\|_{1,2}^2 \quad i=0,1,\ldots,m \quad \text{onde } C^2 = \frac{b-a+1}{b-a}$$

Com nova majoração vem

$$\| v^{(j)}\|_{0,\infty} \leq C^2 \sum_{i=0}^{m-1} \left[\| v^{(i)}\|_2^2 + \| v^{(i+1)}\|_2^2 \right]$$

$\forall j$, $j = 0,1,\ldots,m-1$, ou seja:

$$\| v^{(j)}\|_{0,\infty} \leq 2C^2 \| v\|_{m,2}^2 \text{ , isto é:}$$

$$\{ \max_{a\leq x\leq b} |v^{(j)}(x)| \}^2 \leq 2C^2 \| v\|_{m,2}^2 \;, \qquad \forall j$$

Isso dá enfim:

$$\max_{0\leq j\leq m-1} \left[\max_{a\leq x\leq b} |v^{(j)}(x)| \right]^2 \leq 2C^2 \| v\|_{m,2}^2 \quad \text{ou seja}$$

(5) $$\boxed{\| v\|_{m-1,\infty} \leq M \| v\|_{m,2}} \qquad \forall v \in H^m(a,b) \quad \text{com} \quad \boxed{M = \sqrt{\frac{2(b-a+1)}{b-a}}}$$

c.q.d.

IV.3. Espaços $H_0^m(a,b)$

No estudo de equações diferenciais com condições de contorno de tipo essencial, trabalha-se com certos subespaços de $H^m(a,b)$. Esse é o caso de $H_0^m(a,b)$ de que trataremos neste parágrafo.

Como sabemos, $\mathcal{D}(a,b)$ não é completo para nenhuma norma. Portanto, limites de seqüências de Cauchy de $\mathcal{D}(a,b)$ em qualquer norma convergem para um elemento de um espaço que contenha $\mathcal{D}(a,b)$ e que seja completo para tal norma. Mas o limite não pertence necessariamente a $\mathcal{D}(a,b)$.

Já vimos, por exemplo, que limites de seqüências de $\mathcal{D}(a,b)$ na norma $\|\cdot\|_p$, são funções de $L^p(a,b)$, $1\leq p<\infty$, pois nessa norma $L^p(a,b)$, é completo. Mais do que isso, vimos também que qualquer função de $L^p(a,b)$ pode ser expressa como limite de seqüências de $\mathcal{D}(a,b)$ nessa norma, uma vez que $\mathcal{D}(a,b)$ é denso em $L^p(a,b)$.

Vejamos agora a situação para a norma $\|\cdot\|_{m,2}$:

<u>Definição 2:</u> $H_0^m(a,b)$ é o subespaço de $H^m(a,b)$ constituído por funções limites de seqüências de Cauchy de $\mathcal{D}(a,b)$ na norma $\|\cdot\|_{m,2}$.

Dita em outros termos, a Definição 2 estabelece simplesmente que o fecho de $\mathcal{D}(a,b)$ na norma $\|\cdot\|_{m,2}$ é $H_0^m(a,b)$. Portanto, por definição, $\mathcal{D}(a,b)$ é denso em $H_0^m(a,b)$.

Aqui também, essa definição é dada em tais termos só por conveniência. Na verdade, podemos caracterizar $H_0^m(a,b)$ pela:

<u>Proposição 2:</u> Se $v\in H_0^m(a,b)$ então
$$\begin{aligned} v(a) &= v(b) = 0\\ v'(a) &= v'(b) = 0\\ &\vdots\\ v^{(m-1)}(a) &= v^{(m-1)}(b) = 0\end{aligned}$$

<u>Demonstração:</u> Provemos a proposição inicialmente para m=1.

De acordo com a Definição 2, $\exists\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(a,b)$ tal que:

$\|\varphi_n - v\|_{1,2} \to 0$

Por outro lado, de acordo com o Teorema 3, relação (4) temos:

$$\max_{a\leq x\leq b} |\varphi_n(x) - v(x)| \leq C\|\varphi_n - v\|_{1,2} \quad \text{pois } \varphi_n - v \in H^1(a,b)$$

Por conseguinte:

$$|\varphi_n(a) - v(a)| \leq C\|\varphi_n - v\|_{1,2} \quad e \quad |\varphi_n(b) - v(b)| \leq C\|\varphi_n - v\|_{1,2} \quad \forall n.$$

Como $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0 \quad \forall n$ e $\|\varphi_n, v\|_{1,2} \to 0$, vem:

$v(a) = v(b) = 0.$

A demonstração para m qualquer é análoga usando (5).

c.q.d.

Resumindo, podemos em termos práticos considerar $H^m(a,b)$ como o subespaço de funções de $H^m(a,b)$ tais que

(6) $\boxed{v^{(i)}(a) = v^{(i)}(b) = 0}$ $i=0,1,\ldots,m-1 \quad \forall v\ H_0^m(a,b)$

Com esse resultado deve ficar claro que $H_0^m(a,b) \neq H^m(a,b)$ pois nem toda função de $H^m(a,b)$ precisa satisfazer (6). Segue daí imediatamente que $\mathcal{D}(a,b)$ <u>não é denso</u> em $H^m(a,b)$.

Uma propriedade interessante que se prova para os espaços $H_0^m(a,b)$ é que sobre estas se pode definir uma norma mais simples do que (2) que é

(7) $$\boxed{|v|_{m,2} = \left[\int_a^b |v^{(m)}|^2\right]^{1/2}}$$

Já para $H^m(a,b)$ isso não é possível pois $|\cdot|_{m,2}$ é apenas uma semi-norma. De fato se $v \in H^m(a,b)$:

$|v|_{m,2} = 0 \implies v^{(m)} \equiv 0$. Porém $v^{(m)} \equiv 0$ implica apenas que v é um polinômio de grau máximo m-1 e não necessariamente a função identicamente nula.

Teorema 4: A expressão

(8) $$\boxed{((u,v))_m = \int_a^b u^{(m)} v^{(m)}}$$

define um produto escalar sobre $H_0^m(a,b)$ que é um espaço de Hilbert para a norma associada (7).

Demonstração: Basta provar que $((v,v))_m \implies v \equiv 0$, supondo conhecidos que as demais exigências do produto escalar são satisfeitas (verificar). De fato temos:

$$((v,v))_m = 0 \implies v^{(m)} \equiv 0 \implies v^{(m-1)} \equiv \text{const.}$$ Porém,

como $v^{(m-1)}(a) = v^{(m-1)}(b) = 0$ devemos ter $v^{(m-1)} \equiv 0$.

Aplicamos agora o mesmo argumento sucessivamente a $v^{(i)}$ $i=m,m-1,\ldots,2,1$, para concluir que $v \equiv 0$. $((.,.))_m$ é pois produto escalar.

Agora, como $H_0^m(a,b)$ é um subespaço fechado de $H^m(a,b)$ que é completo para a norma $\|\cdot\|_{m,2}$, então $H_0^m(a,b)$ também é completo para essa norma. Enfim, como

$$|v|_{m,2} \leq \|v\|_{m,2} \qquad \forall v \in H^m(a,b),$$

toda seqüência de Cauchy convergente na norma $\|\cdot\|_{m,2}$ tem que convergir também na norma $|\cdot|_{m,2}$. Logo $H_0^m(a,b)$ é espaço de Hilbert com (8). c.q.d.

Por argumentos semelhantes aos do Teorema 4 poderá ser demonstrado o resultado:

Exercício 4: O subespaço $H_E^m(a,b)$ de $H^m(a,b)$ definido por:

$$H_E^m(a,b) = \{v/v\ H^m(a,b) \quad e \quad v(a) = v'(a) = \ldots = v^{(m-1)}(a)=0\}$$

é um espaço de Hilbert com o produto escalar (8).

E' certo que para a norma $|\cdot|_{m,2}$ vale

$$|v|_{m,2} \leq C\| v\|_{m,2} \qquad \forall v \in H_0^m(a,b), \quad \text{com } C=1$$

uma vez que ela é apenas uma parcela da norma $\| v\|_{m,2}$.

Resultado menos evidente é que é possível obter uma minoração do mesmo tipo no sentido inverso. Isso é conseqüência da desigualdade de Poincaré provada na:

<u>Proposição 3</u>: Se $v \in H_0^1(a,b)$, vale a desigualdade de Poincaré:

$$\boxed{\| v\|_2 \leq C(a,b) \ \|v'\|_2} \quad \text{onde } C(a,b) = 2(b-a). \tag{9}$$

<u>Demonstração</u>: Temos $\forall x$, $x \in (a,b)$ e $v \in H_0^1(a,b)$:

$$v^2(x) - v^2(a) = \int_a^b (v^2)' = \int_a^b 2vv'$$

Como $v(a) = 0$, e usando a desigualdade de Schwartz vem:

$$v^2(x) \leq 2\left[\int_a^b v^2\right]^{1/2} \left[\int_a^b (v')^2\right]^{1/2} \qquad \forall x \in (a,b)$$

Integrando membro a membro de a até b, como o 2º membro é constante, vem:

$$\int_a^b v^2 \leq 2(b-a)\left[\int_a^b v^2\right]^{1/2} \left[\int_a^b (v')^2\right]^{1/2} \quad \text{, donde}$$

$$\| v\|_2^2 \leq 2(b-a) \ \| v\|_2 \|v'\|_2 \text{ , ou seja (9). c.q.d.}$$

Com esse resultado podemos provar o:

<u>Teorema 5</u>: Sobre $H_0^m(a,b)$ as normas $|\cdot|_{m,2}$ e $\| \cdot\|_{m,2}$ são equivalentes.

<u>Demonstração</u>: Devemos provar que existem duas constantes estritamente positivas c_m e C_m tais que:

$$(10)\qquad \boxed{c_m \| v\|_{m,2} \leq |v|_{m,2} \leq C_m \| v \|_{m,2}} \qquad \forall v \in H_0^m(a,b)$$

Já sabemos que $C_m = 1 \quad \forall m$. Resta determinar c_m.

Como $v^{(i)} \in H_0^1(a,b)$, $i=0,1,\ldots,m-1$, devemos ter, pela desigualdade de Poincaré:

$$\| v^{(i)} \|_2 \leq 2(b-a) \quad \| v^{(i+1)} \|_2$$

$$\| v^{(i+1)} \|_2 \leq 2(b-a) \| v^{(i+2)} \|_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\| v^{(m-1)} \|_2 \leq 2(b-a) \| v^{(m)} \|_2$$

Multiplicando membro a membro: $\| v^{(i)} \|_2 < 2(b-a)^{m-i} \| v^{(m)} \|_2$,

$i = 0,1,\ldots,m-1.$

Como $\| v \|_{m,2} = \left[\sum_{i=0}^{m} \| v^{(i)} \|_2^2 \right]^{1/2}$ e $\| v^{(m)} \|_2 = |v|_{m,2}$ temos:

$$\| v \|_{m,2} = \left[\sum_{i=0}^{m} |2(b-a)|^{2(m-i)} \right]^{1/2} |v|_{m,2} \qquad \forall v \in H_0^m(a,b)$$

ou seja:

$$c_m = \left\{ \sum_{i=0}^{m} [2(b-a)]^{2(m-i)} \right\}^{1/2} \qquad \text{c.q.d.}$$

Observe-se que do Teorema 5 se deduziria também que (7) define efetivamente uma norma sobre $H_0^m(a,b)$, a qual, a menos de uma constante multiplicativa pode ser substituída pela norma comum de $H^m(a,b)$.

IV.4. Dual de $H^m(a,b)$. Espaços H^{-m}

Para terminar este capítulo, vamos tentar caracterizar o dual dos espaços $H^m(a,b)$. Antes de mais nada, observamos que, como espaços de Hilbert, pelo teorema de Riesz temos:

$\forall L \in \{H^m(a,b)\}^* \quad \exists\, v_L \in H^m(a,b)$ tal que:

$$L(v) = (v_L, v)_m \qquad \forall v \in H^m(a,b)$$

No entanto, quase sempre nas aplicações é extremamente difícil exibir tal elemento v_L que traduz sob a forma de produto escalar - sempre mais cômoda - um dado funcional L sobre $H^m(a,b)$. Por esse motivo não usaremos o Teorema de Riesz, isto é, não identificaremos $H^m(a,b)$ ao seu dual através do produto escalar.

A caracterização que faremos inicialmente é somente para $H^1(a,b)$, passando-se depois, como de costume, ao caso de m qualquer.

Teorema 6: A condição necessária e suficiente para que um funcional L seja de $\{H^1(a,b)\}^*$ é que possa ser expresso por

$$(11) \qquad \boxed{L(v) = \int_a^b v f_0 + \int_a^b v' f_1} \qquad \forall v \in H^1(a,b)$$

onde $f_0, f_1 \in L^2(a,b)$.

Demonstração: Inicialmente se L é da forma (11), temos, pela desigualdade de Schwartz:

$$|L(v)| \le \|v\|_2 \|f_0\|_2 + \|v'\|_2 \|f_1\|_2$$

Por outro lado, considerando $a = (\|v\|_2, \|v'\|_2)$ e $b = (\|f_0\|_2, \|f_1\|_2)$ como vetores de $\mathbb{R}^2$ temos:

$$|L(v)| = |(a,b)| \le \|a\|\,\|b\| = (\|v\|_2^2 + \|v'\|_2^2)^{1/2} (\|f_0\|_2^2 + \|f_1\|_2^2)^{1/2}$$

Obtemos portanto, como $f_0, f_1 \in L^2(a,b)$:

$$|L(v)| \le C\|v\|_{1,2} \qquad \forall v \in H^1(a,b) \quad \text{com } C = (\|f_0\|_2^2 + \|f_1\|_2^2) < \infty$$

Provemos agora que a condição é necessária; para tanto, consideremos $H^1(a,b)$ como um subespaço de $W = L^2(a,b) \times L^2(a,b)$ que é um espaço de Hilbert para a norma do espaço produto:

$$z = (x,y) \in X\times Y \Longrightarrow \| z\|_{X\times Y} = \left[\| x\|_X^2 + \| y \|_Y^2\right]^{1/2}, \text{ derivada do}$$

produto escalar:

$$(z_1, z_2)_{X\times Y} = (x_1,x_2)_X + (y_1,y_2)_Y \quad \begin{cases}(x_1,y_1) = z_1\\ (x_2,y_2) = z_2\end{cases}$$

como se poderá verificar. Assim se $\vec{v} = (v_0,v_1) \in W$, temos:

$$\| \vec{v}\|_W = \left[\int_a^b (v_0^2 + v_1^2)\right]^{1/2}.$$

L é pois um funcional linear contínuo sobre um subespaço de W. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{L}$, funcional linear contínuo sobre todo W, tal que:

$$\tilde{L}(\vec{v}) = L(\vec{v}) \quad \forall v \in H^1(a,b), \quad \vec{v} = (v,v'),$$

com $\| \tilde{L}\|_{W^*} = \| L\|$ sendo $\| L\| = \sup\limits_{v\in H^1(a,b)} \dfrac{|L(v)|}{\| v\|_{1,2}}$.

Como pelo Teorema de Riesz $\forall \tilde{L} \in W^*$ $\exists (f_0,f_1) \in W$ tal que

$$\tilde{L}(\vec{v}) = \int_a^b f_0 v_0 + \int_a^b f_1 v_1 \qquad \forall \vec{v} = (v_0,v_1)\in W, \text{ temos em particu-}$$

lar para $\vec{v} = (v,v')$, $v\in H^1(a,b)$ o resultado (11). c.q.d.

Analogamente provar-se-ia que se $L\in\{H^m(a,b)\}^*$, então $\exists f_0,f_1,\ldots,f_m \in L^2(a,b)$ tais que:

$$\text{(12)} \qquad \boxed{L(v) = \sum_{i=0}^{m} \int_a^b f_i v^{(i)}} \qquad \forall v\in H^m(a,b).$$

Como vimos no Capítulo III, $\{H^m(a,b)\}^*$ não é um espaço de distribuições porque $\mathcal{D}(a,b)$ não é denso em $H^m(a,b)$, o que é semelhante ao que ocorre com $C^m[a,b]$.

Assim, por exemplo, não poderemos em geral exibir um funcional $L\in\{H^1(a,b)\}^*$ dado por

$$L(v) = \int_a^b f_1 v'$$

por intermédio de uma função generalizada g_1', isto é:

$$L(v) = \langle v, g_1' \rangle = \int_a^b g_1' v$$

sendo a integral simbólica e a derivada generalizada g_1' dotadas de sentido habitual.

Já a situação para $H_0^m(a,b)$ é diferente pois como $\mathcal{D}(a,b)$ é denso nesse espaço, seu dual é um espaço de distribuições que será denotado por $H^{-m}(a,b)$.

As distribuições de $H^{-m}(a,b)$ podem ser caracterizados pelo:

<u>Teorema 7</u>: A condição necessária e suficiente para que uma distribuição L seja de $H^{-m}(a,b)$ é que possa ser expressa sob a forma:

$$\boxed{L = \sum_{i=0}^{m} g_i^{(i)}} \tag{13}$$

onde $g_0, g_1, \ldots, g_m \in L^2(a,b)$ e as derivadas tomadas no sentido fraco.

<u>Demonstração</u>: A condição é suficiente pois, por definição:

$$L(\varphi) = \int_a^b g_0\varphi + \sum_{i=0}^{m} (-1)^m \int_a^b g_i \varphi^{(i)} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Ora, tal funcional é também de $\{H^m(a,b)\}^*$ pelo Teorema 6. Logo, como $H_0^m(a,b)$ é subespaço então $L \in H^{-m}(a,b)$.

Agora, a necessidade é provada com o seguinte argumento:

Inicialmente, se L pertence ao dual de $H_0^m(a,b)$, pelo Teorema de Hahn-Banach, L tem uma extensão $\bar{L}$ a $H^m(a,b)$ tal que

$$\bar{L}(v) \leq \| L \| \, \| v \| \qquad \forall v \in H^m(a,b)$$

Ora, pelo Teorema 6, $\bar{L}$ deve ser da forma:

$$\bar{L}(v) = \sum_{i=0}^{m} \int_a^b f_i v^{(i)} \quad ,$$

onde $f_0, f_1, \ldots, f_m \in L^2(a,b)$. Agora, se $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$, temos:

$$\bar{L}(\varphi) = L(\varphi) = \langle \varphi, \sum_{i=0}^{m} (-1)^i f_i^{(i)} \rangle$$, ou seja, L como

distribuição é da forma (13) com $g_i = (-1)^i f_i \quad \forall i$. c.q.d.

A propósito das distribuições de $H^{-m}(a,b)$ fazemos o seguinte comentário:

Podemos atribuir-lhes sentido semelhante ao dado no Capítulo III às funções generalizadas associadas a $C_0^m[a,b]$. Lá definíamos a derivada i-ésima de uma função $g \in L^1(a,b)$ como o funcional tal que:

$$\langle v, g^{(i)} \rangle = (-1)^i \int_a^b g v^{(i)} \qquad \forall v \in C_0^m[a,b] \ , \ 1 \le i \le m.$$

Poderíamos agora igualmente definir derivadas generalizadas de ordem i de funções g usando o espaço $H_0^m(a,b)$ um pouco menos restrito do que $C_0^m[a,b]$, com:

$$\langle v, g^{(i)} \rangle = (-1)^i \int_a^b g v^{(i)}$$

Só que para se garantir que a integral exista, $\forall i$, teríamos que exigir $g \in L^2(a,b)$, e não mais somente $g \in L^1(a,b)$.

É importante notar que podemos normar $H^{-m}(a,b)$ usando a norma comum dos duais. De acordo com o Teorema 7 temos pois:

$$(14) \qquad \boxed{\| L \|_{-m} = \sup_{v \in H_0^m(a,b)} \frac{\left| \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \int_a^b g_i v^{(i)} \right|}{\left[\sum_{i=0}^{m} \int_a^b |v^{(i)}|^2 \right]^{1/2}} = \sup_{v \in H_0^m(a,b)} \frac{|\langle v, L \rangle|}{\| v \|_{m,2}}}$$

para certas funções $g_0, g_1, \ldots, g_m \in L^2(a,b)$.

Vejamos agora alguns exemplos:

<u>Exemplo 4:</u> O delta de Dirac $\delta_c \in H^{-1}(a,b)$, $c \in (a,b)$.

De fato $\langle v,\delta_c\rangle = v(c) \quad \forall v \in C^0[a,b]$

Como $H_0^1(a,b) \subset C^0[a,b]$ o funcional está bem definido.

Por outro lado, de acordo com (4) temos:

$$\sup_{v\in H_0^1(a,b)} \frac{|v(c)|}{\|v\|_{1,2}} \leq \sup_{v\in H_0^1(a,b)} \frac{\sqrt{\frac{1+b-a}{b-a}}\,\|v\|_{1,2}}{\|v\|_{1,2}} \quad \text{ou seja:}$$

$$\|\delta_c\|_{-1} \leq \sqrt{\frac{1+b-a}{b-a}} < \infty$$

Observe-se que esse resultado está de acordo com o Teorema 7 que se aplica com $g_0 = 0$ e $g_1 = H_c$ (verificar).

<u>Exemplo 5:</u> $\delta_c \in \{H^1(a,b)\}^*$

De fato, concluimos, como no exemplo 4, que no dual de $H^1(a,b)$ δ_c é normado com:

$$\|\delta_c\| \leq \sqrt{\frac{1+b-a}{b-a}} < \infty$$

O Teorema 6 se aplica, por exemplo, com:

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-c} & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{se } x < c \end{cases} \quad \text{e} \quad f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x-b}{b-c} & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{se } x < c \end{cases}$$

como se pode verificar.

<u>Exemplo 6:</u> O dipolo δ'_c não é de $\{H^1(a,b)\}^*$. Para verificar isso tomemos a função $v \in H^1(a,b)$ com

$$v(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-c)^2} & \text{se } c \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } a \leq x < c \end{cases}$$

Constatamos que δ'_c não é limitada aplicando-a a v.
Por razões análogas concluiríamos que $\delta'_c \notin H^{-1}(a,b)$.

Exercício 5: Verificar que $\delta'_c \in H^{-2}(a,b)$.

Exercício 6: Verificar que $\delta'_1 \in \{H^2(0,1)\}^*$ e que podemos escolher $f_0 = 0$; $f_1 = 2x$ e $f_2 = x^2$ para as funções do Teorema 6.

Agora damos um exemplo de um funcional de $H^{-1}(a,b)$ que não pertence a $\{H^1(a,b)\}^*$.

Exemplo 7: Seja a função $x^{-1/4} \in L^2(0,1)$. Sua derivada fraca é uma distribuição de $H^{-1}(0,1)$, de acordo com o Teorema 7. Temos $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1)$:

$$<\varphi,(x^{-1/4})'> = -<\varphi',x^{-1/4}> = -\int_0^1 \frac{\varphi'}{x^{1/4}}$$

Porém:

$$\int_0^1 \frac{\varphi'}{x^{1/4}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi'}{x^{1/4}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi x^{-1/4}\Big/_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \varphi(x^{-1/4})'$$

sendo a derivada de $x^{-1/4}$ na integral tomada no sentido q.t.p. Ora:

$$\varphi x^{-1/4}\Big/_\varepsilon^1 = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^{1/4}} = \frac{\varepsilon\varphi'(\xi_\varepsilon)}{\varepsilon^{1/4}}, \text{ onde } 0 \le \xi_\varepsilon \le \varepsilon$$

Logo $\quad 0 \le \left|\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^{1/4}}\right| \le \varepsilon^{3/4} \|\varphi\|_{1,\infty}$, o que implica em:

$$<\varphi,(x^{-1/4})'> = \int_0^1 \varphi(x^{-1/4})'$$

Logo, a derivada q.t.p. de $x^{-1/4}$ coincide com a derivada fraca, que é, portanto, a distribuição regular $(-1/4)x^{-5/4}$, derivada de $x^{-1/4} \in L^2(a,b)$. Por conseguinte temos:

$$\int_0^1 x^{-5/4} v < \infty \qquad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

No entanto, se $v \in H^1(0,1)$ o funcional acima não seria mais limitado. Para se constatar esse fato basta tomar v = constante:

$$\int_0^1 cx^{-5/4} = c\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-5/4} = c\lim_{\varepsilon\to 0} x^{-1/4}\Big/_\varepsilon^1 = \infty .$$

Exemplo 8: Verificar que o funcional

$$L(v) = \int_0^1 x^{-1/4} v' \quad \text{do dual de } H^1(0,1) \text{ é equivalente}$$

ao funcional

$$\bar{L}(v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{v(\varepsilon)}{\varepsilon^{1/4}} + \frac{1}{4} \int_\varepsilon^1 x^{-5/4} v \right] + v(1)$$

Observe-se que $\bar{L}$ restrito a $H_0^1(a,b)$ deve ser o funcional do exemplo 7.

Para terminar observamos que, assim como funções de $H^{m-1}(a,b)$ podem ser considerados como derivadas de funções de $H^m(a,b)$, $m \geq 1$, o mesmo vale para $m<1$ sendo as derivadas agora tomadas no sentido fraco, evidentemente.

Observa-se ainda que a majoração de normas evidente:

$$\|v\|_{m-1,2} \leq \|v\|_{m,2} \quad \forall m \quad \text{se} \quad v \in H^m(a,b) \quad \text{e } m \geq 1,$$

vale também para valores negativos de m. Por exemplo, se $g \in H^1(a,b)$ temos $g \in H^0(a,b)$ e ainda $g \in H^{-1}(a,b)$, pois g define também um funcional linear contínuo sobre $H_0^1(a,b)$ com:

$$\langle v,g \rangle = \int_a^b gv \qquad \forall v \in H_0^1(a,b).$$

Temos pela desigualdade de Schwartz:

$$\|g\|_{-1} = \sup_{v \in H_0^1(a,b)} \frac{\int_a^b gv}{\|v\|_{1,2}} \leq \sup_{v \in H_0^1(a,b)} \frac{\|g\|_{0,2} \|v\|_{0,2}}{\|v\|_{1,2}}$$

ou seja,

$$\|g\|_{-1} \leq \|g\|_{0,2} \text{ já que } \|v\|_{0,2} \leq \|v\|_{1,2}.$$

Logo temos: $\|g\|_{-1} \leq \|g\|_0 \leq \|g\|_1 \quad \forall g \in H^1(a,b)$.

(aqui omitimos deliberadamente o índice 2 das normas de H^0 e H^1).

Relações análogas poderiam ser obtidas com $m < -1$.

CAPÍTULO V: PROBLEMAS DE CONTORNO E SUA FORMA VARIACIONAL

V.1 - Introdução

O objetivo deste Capítulo é o estudo da forma variacional sob a qual podemos alternativamente tratar equações diferenciais lineares com condições de contorno e com frequência, mais comodamente.

Aqui nos limitaremos às equações diferenciais ordinárias. No entanto, cremos que a abordagem que procuramos dar ao problema torna a generalização ao caso de equações diferenciais parciais relativamente fácil.

Uma equação diferencial ordinária definida sobre um intervalo $[a,b]$ com condições de contorno se apresenta sob a forma geral:

Encontrar $u(x)$ tal que:

(1) $\boxed{Du=f}$ $\forall x \in (a,b)$

(2) $\boxed{\vec{R}u/_{x=a} = \vec{\alpha};\ \vec{S}u/_{x=b} = \vec{\beta}}$

$D, \vec{R}$ e $\vec{S}$ são operadores diferenciais lineares da forma

$\sum_{i=0}^{m} a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$, com a convenção $\frac{d^o u}{dx^o} = u$, sendo a_i funções (vetoriais ou não). Para o operador D o valor de m corresponde à ordem da equação diferencial. Tal valor é sempre superior aos associados aos operadores $\vec{R}$ e $\vec{S}$.

Enquanto (1) é dita a equação de Euler, (2) define as condições de contorno do problema. Quando $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ são nulos essas condições são ditas homogêneas.

A formulação variacional de problemas do tipo (1)-(2) que estudaremos, será muitas vezes natural, pois provirá de um problema equivalente de minimização da energia de certo sistema físico. Outras vezes devemos transformar uma equação do tipo (1)-(2) em um problema variacional equivalente.

No final deste capítulo faremos apreciações sobre ambos os casos por meio de exemplos concretos. Por ora, vejamos o problema-tipo que, em qualquer caso, teremos que resolver: o proble ma variacional.

Desejamos determinar uma função u de um espaço V de funções ditas admissíveis, isto é, que satisfazem a certas condições compatíveis com o sistema físico, tal que:

$$(3)\quad \boxed{a(u,v) = L(v)} \quad \forall v\in V, \text{ sendo:}$$

L um funcional linear definido sobre V e $\underline{a}$ uma forma bilinear definida sobre $V\times V$, isto é:

$$a:\ V\times V \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \to a(u,v)$$

onde $\underline{a}$ é linear com respeito a cada uma das variáveis u e v separadamente:

$$a(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2,v) = \alpha_1 a(u_1,v) + \alpha_2 a(u_2,v) \quad \forall u_1,u_2\in V,\ \alpha_1,\alpha_2\in \mathbb{R}$$

e

$$a(u,\beta_1 v_1+\beta_2 v_2) = \beta_1 a(u,v_1) + \beta_2 a(u,v_2) \quad \forall v_1,v_2\in V,\ \beta_1,\beta_2\in \mathbb{R}.$$

V.2 - O Teorema de Lax-Milgram

Damos a seguir condições suficientes para que o problema (3) tenha solução única. Salientamos que tais condições se apresentam efetivamente numa grande maioria dos problemas variacionais equivalentes a equações diferenciais lineares, que descrevam apropriadamente fenômenos físicos.

Teorema 1 (Lax-Milgram):

Seja V um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|$ e produto escalar $(.,.)$, e V^* seu dual que não consideraremos necessariamente identificado a V. Se a forma bilinear $\underline{a}$ satisfaz às condições:

1ª.) $\underline{a}$ é contínua no sentido que: $\exists\, M>0$, constante tal que:

$$(4)\quad |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u,\ v\in V$$

2ª.) $\underline{a}$ é coerciva (ou V-elítica), isto é:

$$(5)\quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \ {}^{(*)} \quad \forall v\in V$$

e se, além disso, a forma linear L é contínua; i.e. $L\in V^*$, então

(*) Se $a(v,v)\geq 0$ $\forall v\in V$ e $a(v,v)=0 \Rightarrow v=\vec{0}$, então $\underline{a}$ é dita positiva definida. Deduz-se pois, imediatamente, que se $\underline{a}$ é coerciva, então $\underline{a}$ é positiva definida. A recíproca no entanto nem sempre é verdadeira.

$$(P)\quad \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \\ \quad \text{tal que} \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

tem solução única:

<u>Demonstração</u>: Para cada u fixo, podemos dizer que existe um funcional linear contínuo, dependendo de u, $\mathcal{A}(u)$, tal que:

$$\mathcal{A}(u): \; V \to \mathbb{R}$$
$$\qquad v \mapsto a(u,v)$$

A linearidade decorre da bilinearidade de <u>a</u>.
A continuidade é verificada com:

$|<\mathcal{A}(u),v>| = |a(u,v)| \leq \|u\| \; \|v\| \quad \forall v \in V$, ou seja

$|<\mathcal{A}(u),v>| \leq C \; \|v\| \quad \forall v \in V \quad$ com $\; C = M\|u\|$.

Agora, como V é um espaço de Hilbert, de acordo com o Teorema de Riesz, existe um elemento único $A(u) \in V$, igualmente dependendo de u, tal que:

$$<\mathcal{A}(u),v> = (A(u),v) \quad \forall v \in V, \quad u \in V.$$

Mostraremos agora que o operador A

$$A: \; V \to V$$
$$\qquad u \mapsto A(u) \quad \text{é:}$$

1º) <u>Linear</u>: De fato temos:

$$(A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2),v) = a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) \quad \forall v, u_1 u_2 \in V, \; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Como a é bilinear:

$$(A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2),v) = \alpha_1 a(u_1,v) + \alpha_2 (u_2,v)$$
$$= \alpha_1 (A(u_1),v) + \alpha_2 (A(u_2),v)$$

Agora, pela linearidade do produto escalar temos:

$$(A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)v) = (\alpha_1 A(u_1) + \alpha_2 A(u_2),v) \quad \forall v \in V$$

o que implica em

$$A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 A(u_1) + \alpha_2 A(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

2º) <u>Contínuo</u>: Para isso basta provar que $\|A(u)\| \leq M\|u\| \quad \forall u \in V$, ou seja:

$$\sup_{u\neq\vec{0}} \frac{\| A(u) \|}{\| u \|} \leq M$$

Como V é espaço de Hilbert temos:

$$\sup_{u\neq\vec{0}} \frac{\| A(u) \|}{\| u \|} = \sup_{u\neq\vec{0}} \frac{\sup\limits_{v\neq\vec{0}} \frac{|(A(u),v)|}{\| v \|}}{\| u \|} = \sup_{u\neq\vec{0}} \frac{\sup\limits_{v\neq\vec{0}} \frac{|a(u,v)|}{\| v \|}}{\| u \|}$$

Logo

$$\sup_{u\neq\vec{0}} \frac{\| A(u) \|}{\| u \|} \leq \sup_{u\neq\vec{0}} \frac{\sup\limits_{v\neq\vec{0}} \frac{M\| u \| \; \| v \|}{\| u \|}}{} = M \text{ como queríamos:}$$

3º) Bijetivo: a cada elemento $\bar{v}\in V$ deve corresponder um e um só $v\in V$, tal que $\bar{v} = A(v)$.

Aqui precisamos provar duas coisas:

a) A é injetivo: $A(u_1)=A(u_2) \Rightarrow u_1=u_2$.

De fato, nesse caso, como $A(u_1-u_2) = \vec{0}$ temos:

$(A(u_1-u_2),v)=0$, ou seja, $a(u_1-u_2,v)=0 \quad \forall v\in V$.

Logo, em particular; $a(u_1-u_2,u_1-u_2)=0$

Mas, como é coerciva devemos ter:

$$\alpha\| u_1-u_2 \|^2\leq 0 \Rightarrow u_1=u_2.$$

b) A é sobrejetivo: o contradomínio C(A) é o próprio V. Inicialmente provamos que C(A) é denso em V.

Para isso, vamos usar o fato de que qualquer $L_o\in V^*$ pode ser representado por

$L_o(v)=(v_o,v) \quad \forall v\in V$, para certo $v_o\in V$.

Agora se $L_o(v)=0 \quad \forall v\in C(A)$, temos em particular para $v=A(v_o)$, $(v_o,A(v_o))=0$.

Logo $a(v_o,v_o)=0 \Rightarrow \alpha\| v_o \|^2\leq 0 \Rightarrow v_o=\vec{0}$.

Portanto $L_o(v)=0 \quad \forall v\in C(A) \Rightarrow L_o(v)=0 \quad \forall v\in V$.

Essa implicação por sua vez implica na densidade de C(A) em V por um Corolário do Teorema de Hahn-Banach [4].

Em seguida devemos provar que limites de sequências de C(A), pertencem a C(A).

De fato, $\{\bar{v}_n\}$ sequência de Cauchy de C(A) converge para um elemento $\bar{v}\in V$ pois V é completo.

Vamos ver agora que, na verdade, $\bar{v}\in C(A)$. Para cada $\bar{v}_n$

existe um $v_n \in V$ com $\bar{v}_n = A(v_n)$. Por outro lado, $\forall v \in V$:

$$(A(v),v) \geq \alpha \| v \|^2 \Rightarrow \| v \| \leq \frac{1}{\alpha} \| A(v) \| \quad \forall v \in V$$

Em particular:

$$\| v_n - v_m \| \leq \frac{1}{\alpha} \| \bar{v}_n - \bar{v}_m \|$$

Logo, se $\{\bar{v}_n\}$ é uma sequência de Cauchy, $\{v_n\}$ também o é, convergindo portanto para certo $v \in V$.

Enfim, como A é contínuo, se $v_n \to v$ então $A(v_n) \to A(v)$. Mas como $A(v_n) \to \bar{v}$ devemos ter $A(v) = \bar{v}$, ou seja:

$\bar{v} \in C(A)$ o que prova que $C(A)$ é fechado.

A densidade de $C(A)$ em V implica então que $C(A) = V$ e está provada a sobrejetividade.

Para completarmos a demonstração do Teorema, consideramos que, pelo Teorema de Riesz

$$\forall L \in V^* \quad \exists f \in V \quad \text{tal que} \quad L(v) = (f,v) \quad \forall v \in V.$$

Com isso podemos dizer que resolver o problema (P) equivale a achar u tal que

$$(A(u),v) = (f,v) \quad \forall v \in V.$$

Ora, isso implica em resolver o problema:

$$(P') \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \\ \quad \text{tal que} \\ A(u) = f \text{ em } V. \end{cases}$$

Como A é bijetivo podemos dizer que existe um e um só $u \in V$ que resolve (P') e consequentemente (P). c.q.d.

Observações:

1ª) De (P') concluimos imediatamente que se L é o funcional nulo, então a solução do problema variacional (P) é $\vec{0}$.

2ª) Como veremos (P') não será em geral a equação de Euler, mas tão somente outro problema equivalente a (P), sendo de interesse predominantemente teórico, já que exibir $f \in V$ é quase sempre muito difícil. A obtenção da equação de Euler com as correspondentes condições de contorno será mostrada mais adiante com alguns exemplos. Iniciaremos entretanto exemplificando com casos mais simples de problemas variacionais enquadrados na categoria de que trata o teorema de Lax-Milgram.

Exemplo 1 Seja $a(u,v) = v^T Au$

onde $u,v \in \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz (nxn) simétrica, positiva definida e:

$L(v)=(f,v)$ para certo $f \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Então o problema

$$(P) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbb{R}^n \\ \quad \text{tal que} \\ a(u,v)=L(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

tem solução única.

De fato, o produto escalar com um elemento fixo $f \in \mathbb{R}^n$ é uma forma linear contínua sobre esse espaço. Além disso a é claramente bilinear e além disso:

$v^T Au=(Au,v) \leq \| Au \| \, \| v \|$ sendo $\| \;\|$ a norma euclidiana.

Porém: $\| Au \| \leq \lambda_M \| u \| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$

sendo λ_M o maior autovalor de A, donde a continuidade de a com $M=\lambda_M$.

Além disso, a é coerciva: $a(v,v)=(Av,v) \geq \alpha \| v \|^2$, onde $\alpha=\lambda_m$, sendo λ_m o menor autovalor de A, estritamente positivo se A é positiva definida [9].

A solução de (P) é tal que $(Au,v)=(f,v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$, ou seja, é a solução do sistema de equações lineares:

$$(P') \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbb{R}^n \\ \quad \text{tal que} \\ Au=f \end{cases}$$

Com o Exemplo 1 podemos ver claramente que as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram são apenas suficientes para garantir a existência e unidade da solução do problema variacional (P). É sabido que um sistema de equações lineares (nxn) tem solução única se e somente se A é regular. A matriz A ser positiva definida é condição suficiente para A ser regular, mas não é absolutamente necessária.

Exemplo 2: Seja B uma matriz (mxn) e $V=\mathcal{N}(B)$, espaço nulo de B.

Tomamos $V = \{v / v \in \mathbb{R}^n, \; Bv=\vec{0}\}$.

Sejam a e L como no Exemplo 1.

Então o problema:

$$(P)\begin{cases}\text{Econtrar } u\in V\\ \quad\text{tal que}\\ a(u,v)=L(v) \quad \forall v\in V\end{cases}$$

tem solução única.

De fato, V é completo como subespaço de um espaço de dimensão finita. Logo é um espaço de Hilbert com o produto escalar de $\mathbb{R}^n$.

As hipóteses do Teorema 1 sobre a e L foram verificadas no Exemplo 1. Portanto (P) tem realmente uma única solução.

Vamos agora caracterizar a solução de (P).

Como $(Au-f,v)=0 \quad \forall v\in V$, então $Au-f\in V^{\perp}$

Por outro lado, como $V=\mathcal{N}(B)$, temos $V^{\perp}=C(B^{*})$, já que $C(B)$ é fechado [11] (denota-se por $C(B)$ o contradomínio de B).

Porém, como a matriz B^* adjunta de B é simplesmente sua transposta B^T (nxm) temos:

$$\exists\, p\in\mathbb{R}^m \text{ tal que}$$
$$Au-f=B^Tp$$

Nosso problema variacional é novamente equivalente a um sistema de equações lineares:

$Au=f+B^Tp$ para um $p\in\mathbb{R}^m$ adequado.

Só que agora, em geral, p só pode ser determinado a posteriori, isto é, mediante a resolução do próprio problema variacional.

Se dispomos de uma base $\{e_1,e_2,\ldots,e_\ell\}$ de V, onde ℓ é a dimensão de V, $e_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\ldots,\ell$, podemos resolver o problema (P) da seguinte forma (supomos que V é subespaço não trivial de $\mathbb{R}^n$).

Seja $u=\sum_{j=1}^{\ell} u_j\ e_j$

onde u_j são escalares, componentes de u.

Como, v é arbitrário escolhemos sucessivamente.

$v=e_i$, $i=1,2,\ldots,\ell$ e obtemos:

$$(A(\sum_{j=1}^{\ell} u_je_j),\ e_i) = (f,e_i), \quad \text{donde}$$

$$\sum_{j=1}^{\ell} u_j(Ae_j,e_i) = (f,e_i),\ i=1,2,\ldots,\ell.$$

Obtemos assim um sistema de equações

$$C \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_\ell \end{pmatrix} = b$$

onde C é a matriz ($\ell x \ell$) positiva definida com $c_{ij} = (Ae_j, e_i)$ e b é o vetor de $\mathbb{R}^\ell$, $b_i = (f, e_i)$.

Resolvendo esse sistema determinamos a solução única u. De fato, $a(u,e_i) = (Au,e_i) = (f,e_i)$ $\forall i$ e temos por linearidade: $a(u, v_i e_i) = (f, v_i e_i)$ $\forall i$, donde, passando ao somatório $a(u,v) = (f,v)$ $\forall v \in V$ onde os v_i são escalares arbitrários componentes de um elemento v genérico de V.

Passemos agora a exemplos com equações diferenciais.

V.3 - Equações diferenciais com condições de contorno homogêneas.

Exemplo 3: Seja $V = H_0^1(0,1)$

$$a(u,v) = \int_0^1 uv + \int_0^1 u'v' \quad \text{e} \quad L(v) = \int_0^1 fv \quad \text{com } f \in L^2(0,1)$$

Então o problema (P) tem solução única.

Nesse caso podemos tomar $\| v \| = [\int_0^1 |v'|^2]^{1/2}$

a é bilinear pois é o próprio produto escalar de $H^1(0,1)$

a é contínua com M=1 pois $a(u,v) = (u,v) \leq \| u \| \; \| v \|$ pela desigualdade de Schwartz.

a é coerciva pois $a(v,v) = (v,v) = \| v \|^2$, isto é, $\alpha = 1$.

L é linear (fácil verificação) e contínua com

$$|L(v)| = |\int_0^1 fv| \leq [\int_0^1 f^2]^{1/2} [\int_0^1 v^2]^{1/2}, \text{ ou ainda}$$

$$|L(v)| \leq [\int_0^1 f^2]^{1/2} [\int_0^1 |v|^2 + |v'|^2]^{1/2}, \text{ isto é}$$

$$|L(v)| \leq C \| v \| \quad \text{com } C = [\int_0^1 f^2]^{1/2} < \infty.$$

Para interpretarmos o problema (P) em termos de uma equação diferencial usamos o procedimento seguinte:

Tomamos inicialmente $\varphi \in \mathcal{D}(0,1) \subset H_0^1(0,1)$:

Devemos ter :

$$\int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u\varphi = \int_0^1 f\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1). \quad \text{Logo:}$$

$$<\varphi',u'> + <\varphi,u> = <\varphi,f> \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1), \text{ donde:}$$

$$-<\varphi,u''> + <\varphi,u> = <\varphi,f> \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1).$$

Logo: $-u''+u=f$ no sentido das distribuições

Mas como $u \in H_0^1(0,1)$, então u resolve a equação diferencial:

$$\begin{cases} -u''+u=f & \text{em } \mathcal{D}'(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

Com relação ao Exemplo 3 devemos fazer as seguintes observa ções:

1ª.) Da equação de Euler $-u''+u=f$ conclui-se que $u'' \in L^2(0,1)$ já que $u \in L^2(0,1)$ e $f \in L^2(0,1)$. Portanto a igualdade em $\mathcal{D}'(0,1)$ é na verdade igualdade em $L^2(0,1)$ (tratava-se na verdade de distribuições regulares).

2ª.) Conclui-se então que $u \in H^2(0,1)$. Esse fato no entanto foi ignorado no problema variacional o que permite reduzir para 1 a ordem de derivadas envolvidas no problema a resolver, mesmo sendo a equação diferenciala de 2ª. ordem. Voltaremos a discutir esse aspecto na seção V.5.

3ª.) As condições de contorno $u(0)=u(1)=0$ estão implícitas no espaço $V=H_0^1(0,1)$ de funções admissíveis e são por isso ditas essenciais. Como veremos no exemplo seguinte, há condições de contorno que valem para a solução u mas não necessariamente para as demais funções admissíveis. Tais condições serão obtidas como consequência da própria formulação variacional e são por isso ditas condições de contorno naturais. O importante é que não precisam ser levados em conta no problema variacional.

Exercício 1: Explicar porque no Exemplo 3 o operador $I-D^2$ sendo $D=\frac{d}{dx}$ e I identidade, não é o operador A do Teorema de Lax-Milgram como poderia parecer .

Exemplo 4: Sejam $\underline{a}$ e L como no Exemplo 3, tomando-se agora $V=H^1(0,1)$.

Nesse caso como V é um espaço de Hilbert com a mesma norma usada no Exemplo 3 o problema variacional deve ter ainda solução única.

Análise análoga nos leva ainda a concluir que

$$-u''+u=f \quad \text{em} \quad L^2(0,1).$$

Porém agora as condições de contorno não estão dadas explicitamente. Para obtê-las precisamos reconstituir o problema, variacional a partir da equação de Euler e compará-lo com o que tínhamos que resolver:

Como $u''\in L^2(0,1)$ temos $u\in H^2(0,1)$. Assim, tomando-se $v\in H^1(0,1)$ devemos ter:

$$-\int_0^1 u''v + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv \qquad \forall v\in H^1(0,1)$$

Tais integrações tem sentido por se tratar de funções de $L^2(0,1)$. Como $u\in C^1[0,1]$ e $v\in C^0[0,1]$ obtemos por integração por partes comum:

$$u'(1)v(1)-u'(0)v(0)+\int_0^1 uv = \int_0^1 uv = \int_0^1 fv \qquad \forall v\in H^1(0,1)$$

Logo, como devemos ter:

$$\int_0^1 uv + \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \qquad \forall v\in H^1(0,1) \quad \text{concluimos que:}$$

$$u'(1)v(1)-u'(0)v(0) = 0 \ \forall v\in H^1(0,1)$$

Por outro lado, como v é arbitrário, podemos escolhê-lo tal que $v(0)=0$ e $v(1)\neq 0$. Daí vem:

$$u'(1)=0.$$

Escolhendo-se agora $v(0)\neq 0$ e $v(1)=0$ concluimos que

$$u'(0)=0.$$

A equação diferencial é então: $\begin{cases} -u''+u=f & \text{em } L^2(0,1) \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases}$

cujas condições de contorno só são necessariamente satisfeitas pela solução do problema variacional, sendo por isso naturais.

Exercício 2: Considere $\underline{a}$ e L como Exemplo 3 tomando agora

$$V = H^1_E(0,1) = \{v/v \in H^1(0,1),\ v(0)=0\}$$

Provando que V é um subespaço completo de $H^1(0,1)$ concluir que o problema (P) tem solução única nesse caso, e interpretar o mesmo.

Exercício 3: Seja V e $\underline{a}$ como no Exercício 2 e

$$L(v) = v(c) \quad \forall v \in V, \text{ sendo } c \in (0,1].$$

Pede-se: 1ª) Verificar que o problema (P) tem solução única nesse caso;

2ª) Interpretar (P) no sentido das distribuições precisando em que espaço se encontra efetivamente a solução;

3ª) Justificar porque nesse caso não podemos deduzir com absoluta segurança as condições de contorno naturais.

Exercício 4: Verificar que se no exercício anterior tivéssemos

$$L(v) = v'(c)$$

não poderíamos garantir que (P) teria solução única.

Sugestão: Considere $v \in H^1_E(0,1)$ tal que $v(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-c)^2} & \text{se } c \le x \le 1 \\ 0 & \text{se } 0 \le x < c \end{cases}$

Observamos a propósito do Exemplo 3, que é possível considerar uma variante tomando:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'$$

permanecendo V e L idênticos.

Porém, nesse caso com a norma

$$\| v \| = \| v \|_{1,2} = [\int_0^1 |v|^2 + |v'|^2]^{1/2}$$

só poderíamos verificar a coercividade lançando mão do Teorema 5 do Capítulo 4:

$$|v|_{1,2} \geq c_1 \; \| v \|_{1,2}$$

sendo c_1 neste caso deduzida de 4.(10): $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Desse modo teríamos

$$a(v,v) \geq \alpha \; \| v \|^2 \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{1}{5} > 0.$$

O problema variacional teria agora a interpretação:

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{em } L^2(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

Agora a resolução da equação diferencial é simples pois:

$$u'(x) = \int_0^x - f + c, \text{ e;}$$

$$u(x) = \int_0^x u' + c' \text{ , onde } c \text{ e } c' \text{ são cons-}$$

tantes a determinar de modo que $u(1)=u(0)=0$.

Por outro lado, se no Exemplo 4 tomássemos

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'$$

o problema variacional não teria mais necessariamente solução única. De fato, nesse caso bastaria tomarmos v=constante para termos:

$$a(v,v)=0 \quad \text{com} \quad \| v \|_{1,2} \neq 0$$

Logo não pode existir $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha \; \| v \|_{1,2}^2$$

Observe-se que se o problema variacional correspondente tivesse solução, esta seria dada por:

$$\begin{cases} -u''=f \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases}$$

Mas, se essa equação diferencial tiver uma solução u qualquer função da forma u + constante a resolverá também.

Quando o problema tem solução é porque a função f dada satisfaz a uma condição de compatibilidade dada por:

$$\int_0^1 f = -\int_0^1 u'' = u'(0) - u'(1) = 0$$

Muitas vezes para se determinar unicamente a solução de uma equação desse tipo que satisfaz à condição de compatibilidade acima arbitra-se um valor de u em certo ponto de $(0,1)$.

Exercício 5: Verificar que

$$\begin{cases} -u'' = \cos \pi x & \text{em } (0,1) \\ u'(1) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma infinidade de soluções e que

$$\begin{cases} -u'' = \operatorname{sen} \pi x & \text{em } (0,1) \\ u'(1) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

não tem solução.

Exercício 6: No Exemplo 3 modificar a para

$$a(u,v) = \int_0^1 uv + u'v + u'v'$$

e refazer o estudo da existência e unicidade da solução de (P). Verificar que a equação diferencial correspondente é:

$$\begin{cases} -u'' + u' + u = f \text{ em } L^2(0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Sugestão: Para a coercividade usar integração por partes.

Exercício 7: Refazer o Exercício 6 tomando agora $V = H^1(0,1)$.
Sugestão: Minorar $-\left|\int_0^1 vv'\right|$ pela desigualdade de Schwartz.

Exemplo 5: Seja $V = H_0^2(0,1)$,

$$a(u,v) = \int_0^1 u''v'' \quad \text{e} \quad L(v) = \int_0^1 fv \ , \quad f \in L^2(0,1)$$

Neste caso podemos tomar $\| v \| = [\int_0^1 |v|^2 + |v'|^2 + |v''|^2]^{1/2}$ e a continuidade de a e de L é verificada sem maiores problemas como nos Exemplos 3 e 4.

Quanto à coercividade basta usar 4.(10) e temos
$a(v,v) = |v|^2_{2,2} \geq \alpha \| v \|^2$ sendo $\alpha = c_2^2 = 1/21$.

O problema tem pois solução única que se interpreta com

$$< \varphi'', u'' > = < \varphi, f > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1)$$

dónde
$$< \varphi, u^{iv} > = < \varphi, f > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1),$$

ou seja; $u^{iv} = f$ no sentido das destribuições

Como $f \in L^2(0,1)$ temos na realidade $u \in H^4(0,1)$

A equação diferencial é pois $\begin{cases} u^{iv} = f \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$

sendo todas condições de contorno implícitas em V e, por isso, essenciais.

A rigor, para nos certificarmos de que não há outras condições de contorno, devemos recompor o problema variacional a partir da equação de Euler com

$\int_0^1 u^{iv} v = \int_0^1 fv \quad \forall v \in H_0^2(0,1)$, o que dá, após duas integrações por partes (todas tem sentido pois $u \in H^4(0,1)$ e $v \in H^2(0,1)$):

$$u'' v \Big/_0^1 - u''v' \Big/_0^1 + \int_0^1 u''v'' = \int_0^1 fv \quad \forall v \in H_0^2(0,1)$$

Obtemos, de fato, o problema variacional, já que os termos integrados acima são nulos.

<u>Exercício 8</u>: Verificar que o problema do exemplo anterior teria ainda solução única se

$$L(v) = \langle v, \delta_c' \rangle$$

Verifique diretamente que essa solução seria

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{8}(2x-1) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{(1-x)^2}{8}(2x-1) & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

<u>Exercício 9</u>: Verifique que o problema (P) com

$$a(u,v) = \int_0^1 (uv + u'v' + u''v'')$$

$$L(v) = \int_0^1 fv \quad \text{com } V=H^2(0,1) \quad \text{e } f \in L^2(0,1)$$

tem solução única que se interpreta com:

$$\begin{cases} u^{iv} - u'' + u = f \quad \text{em } L^2(0,1) \\ u'(0) = u'''(0) \quad \text{e} \quad u'(1) = u'''(1) \\ u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

e que temos $u \in H^4(0,1)$.

Outro exemplo clássico de equações de quarta órdem é o seguinte:

<u>Exemplo 6</u>: Seja $V=H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$; <u>a</u> e L como no Exemplo 5. Verificamos que (P) tem solução única.

Novamente o problema se resume em verificar a coercividade de a, como no Exemplo 5. Entretanto agora não e possível usar 4.(10) pois não temos um espaço $H_0^m(0,1)$.

Provemos, no entanto, que se $v \in V$, existe ainda uma constante $C > 0$, tal que:

$$|v|_{2,2} \geq C|\ v\ |_{2,2}$$

Temos:

$$\int_0^1 |v'|^2 = vv'\Big/_0^1 - \int_0^1 v''v = -\int_0^1 vv'' \quad \forall v \in V$$

Logo, pela desigualdade de Schwartz: $\| v' \|_2^2 \leq \| v \|_2 \; \| v'' \|_2$.

Porém de 4.(10):

$$\int_0^1 |v|^2 \leq 4 \int_0^1 |v'|^2.$$

Donde: $\| v \|_2 \leq \| v \|_2^2 \leq 4 \; \| v \|_2 \; \| v'' \|_2$.

Logo temos:

$$\| v \|_2 \leq \| v'' \|$$

$$\| v' \|_2 \leq 2 \| v'' \|_2$$

o que dá:

$$\| v \|_{2,2}^2 = \| v \|_2^2 + \| v' \|_2^2 + \| v'' \|_2^2 \leq 21 \; \| v'' \|_2^2 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

Está então verificado a coercividade de <u>a</u> ainda neste caso com $\alpha = \frac{1}{21}$.

A interpretação do problema variacional se dá agora com:

$$< \varphi'', u'' > = < \varphi, f > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1) \Rightarrow u^{iv} = f \text{ em } L^2(0,1)$$

Como condições de contorno essenciais temos

$$u(0) = u(1) = 0.$$

No entanto, comparando-se o problema inicial com o refeito partindo da equação de Euler, temos:

$$\int_0^1 u^{iv} v = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in V \Rightarrow$$

$$u''' v \Big/_0^1 - u'' v' \Big/_0^1 + \int_0^1 u'' v'' = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in V$$

O primeiro termo integrado é nulo. No entanto o segundo só o será se:

$$u''(0) = u''(1) = 0 .$$

Estas são as condições de contorno complementares de tipo natural.

Em suma temos: $\begin{cases} u^{iv} = f \quad \text{em} \quad L^2(0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$

V.4. Equações diferenciais com condições não homogêneas

Vejamos agora alguns casos em que as condições de contorno são do tipo

$$\vec{R}u\big/_{x=a} = \vec{\alpha} \quad \text{e} \quad \vec{S}u\big/_{x=b} = \vec{\beta}, \ \vec{\alpha} \text{ e/ou } \vec{\beta} \neq \vec{0}, \quad \text{isto é} \ ,$$

não homogêneas.

Aqui também é conveniente distinguir as condições essenciais das naturais. Vejamos um caso típico com condições essenciais.

Exemplo 7: Seja a equação diferencial com condições essenciais não homogêneas

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } (0,1) \\ u(a) = \alpha & \\ u(b) = \beta & f \in L^2(0,1) \end{cases}$$

A primeira vista poderíamos pensar que tal problema é uma variante do Exemplo 3 com uma conveniente mudança do espaço de funções admissiveis $H_0^1(0,1)$ de forma a atender $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$. Porém o subconjunto de $H^1(0,1)$ de funções v para as quais $v(0) = \alpha$ e $v(1) = \beta$ não é um espaço vetorial mas tão somente uma variedade linear de $H^1(0,1)$.

Usa-se então o seguinte artifício para termos um problema variacional bem colocado:

Arbitramos $u_0 \in H^1(0,1)$ tal que $u_0(a) = \alpha$ e $u_0(b) = \beta$ e consideramos que, se existe solução u para a equação diferencial acima temos

$$\tilde{u} = u - u_0 \in H_0^1(0,1).$$

Consideramos agora o problema variacional:

Achar $\tilde{u} \in H_0^1(0,1)$ tal que $a(\tilde{u},v) = L(v)$, $\forall v \in H_0^1(0,1)$ onde

$$L(v) = -a(u_0,v) + \int_0^1 fv \qquad \text{e}$$

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv$$

Pelo Teorema 4.7 deduz-se que $L \in H^{-1}(0,1)$ com

$$g_0 = f - u_0 \quad e \quad g_1 = u_0' \quad , \; g_0, g_1 \in L^2(0,1)$$

A forma bilinear <u>a</u> tem as mesmas propriedades do Exemplo 3.

O problema variacional tem portanto, solução única que se interpreta com:

$$<\varphi', \tilde{u}'> + <\varphi, \tilde{u}> = -<\varphi', u_0'> - <\varphi, u_0> + <\varphi, f> \Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1)$$

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' - u_0'' + \tilde{u} + u_0 = f & \text{no sentido das distribuições} \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0 \end{cases}$$

A solução procurada u é então dada por: $u = \tilde{u} + u_0$ pois nesse caso temos:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = \alpha \quad , \; u(b) = \beta & \text{como desejado.} \end{cases}$$

Poder-se-á argumentar que a solução u não é única pois depende do u_0 arbitrado. Provamos entretanto que a solu - ção $\tilde{u}$ depende de tal modo de u que $\tilde{u} + u_0$ permanece invariante. De fato, sejam u_0 e u_1 duas funções de $H^1(0,1)$ tais que $u_0(a) = u_1(a) = \alpha$ e $u_0(b) = u_1(b) = \beta$ e $\tilde{u}$ e $\bar{\bar{u}}$ as soluções cor - respondentes. Temos:

$$a(\tilde{u},v) = -a(u_0,v) + \int_0^1 fv \;, \quad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

$$a(\bar{\bar{u}},v) = -a(u_1,v) + \int_0^1 fv \;, \quad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Subtraindo membro a membro vem:

$$a(\tilde{u} - \bar{\bar{u}} + u_0 - u_1, v) = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Como $u_0 - u_1 \in H_0^1(0,1)$, temos com

$v = \tilde{u} - \bar{u} + u_0 - u_1 \quad \epsilon \quad H_0^1(0,1)$

$a(\tilde{u} - \bar{u} + u_0 - u_1,\ \tilde{u} - \bar{u} + u_0 - u_1) = 0$, o que pela coercividade de $\underline{a}$ implica em:

$\tilde{u} - \bar{u} + u_0 - u_1 = \vec{0}$, ou seja,

$\tilde{u} + u_0 = \bar{u} + u_1$ como queríamos.

Vejamos agora um caso de condições de contorno naturais não homogêneas:

<u>Exemplo 8</u>: Seja a equação diferencial com as condições naturais não homogêneas

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em} \quad (0,1) \\ u'(0) = \alpha \\ u'(1) = \beta \end{cases}$$

Nesse caso o espaço de funções admissíveis indicado é $H^1(0,1)$. Mas como fazer aparecer as condições de contorno?

Como no exemplo anterior, temos que introduzí-las na própria formulação variacional do problema de forma que só para a solução u tenhamos

$$u'(0) = \alpha \quad \text{e} \quad u'(1) = \beta$$

Isso se consegue simplesmente incorporando-se esses dados à forma linear, isto é:

$$L(v) = \int_0^1 fv - \alpha v(0) + \beta v(1)$$

senão vejamos:

$a(u,v)$ permanece inalterada com respeito ao Exemplo 4 . Por outro lado, $L \in \{H^1(0,1)\}^*$ pois

$$L(v) = \int_0^1 f_0 v + \int_0^1 f_1 v'$$

com $f_0 = f + \beta - \alpha \in L^2(0,1)$
$f_1 = \beta x - \alpha(x-1) \in L^2(0,1)$
(ver exercício 6 do Capítulo IV).

O problema variacional que tem assim solução única que se interpreta com:

$$\langle\varphi', u'\rangle + \langle\varphi, u\rangle = \langle\varphi, f\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1)$$

uma vez que $-\alpha\varphi(0) + \beta\varphi(1) = 0$ se $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$. Isso dá $-u'' + u = f$ em $L^2(0,1)$ uma vez que $u,f \in L^2(0,1)$.

Para verificarmos que as condições de contorno não homogêneas são satisfeitas, refazemos o problema variacional com $v \in H^1(0,1)$ e comparâmo-lo com o inicial. Obtemos:

$$-\int_0^1 u''v + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in H_0^1(0,1) \implies$$

$$\implies -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv, \ \forall v \in H^1(0,1)$$

Como o problema variacional a resolver é

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv - \alpha v(0) + \beta v(1), \quad \forall v \in H^1(0,1)$$

devemos ter:

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \beta v(1) - \alpha v(0) + \int_0^1 fv = \int_0^1 fv$$

$\forall v \in H^1(0,1)$.

Ora, tal condição só é satisfeita se $u'(0) = \alpha$ e $u'(1) = \beta$. A equação diferencial é então efetivamente :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } (0,1) \\ u'(0) = \alpha, \ u'(1) = \beta \end{cases}$$

<u>Exercício 10</u>: Verifique que o problema variacional

$$\int_0^1 u''v'' = \int_0^1 fv + \beta v'(1) - \alpha v'(0), \quad \forall v \in H^2(0,1) \cap H^1(0,1)$$

com $f \in L^2(0,1)$, tem solução única que é a solução de

$$\begin{cases} u^{iv} = f & \text{em } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u''(1) = \beta \quad , \; u''(0) = \alpha \end{cases}$$

Exercício 11: Verifique que o problema variacional

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv + bu(1)v(1) = \int_0^1 fv + \beta v(1) \quad , \; \forall v \in H_E^1(0,1)$$

$f \in L^2(0,1)$ e $|b| < 1/2$

tem solução única que se interpreta com:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) + bu(1) = \beta \end{cases}$$

Sugestão: Para a continuidade e coercividade da forma bilinear usar a desigualdade 4.5.

V.5. Correspondência com Problemas de Minimização

A equivalência de problemas variacionais com equações diferenciais que vimos, não é fruto apenas de artifícios matemáticos. Na realidade, ocorre que, na descrição de muitos fenômenos físicos, a equação diferencial é simplesmente deduzida com base no princípio de determinação de uma função que torne mínima a energia de certo sistema. Ora, pode-se verificar matematicamente que a esse problema de minimização corresponde um problema variacional. É o que procuramos fazer a seguir:

Numa grande gama de problemas, a energia potencial de certo sistema físico pode ser expressa (a menos de constantes multiplicativas) sob a forma de um funcional definido sobre um espaço de funções V.

(6) $$\boxed{E(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - L(v)}$$

Aqui $\underline{a}$ e L são, respectivamente, formas bilinear e linear com as propriedades que já definimos no Teorema V.1.

As funções admissíveis v representam, como sabemos, grandezas da mesma natureza da que nos compete determinar, isto é, têm o mesmo sentido já mencionado na apresentação dos problemas variacionais.

Matematicamente isso se exprime como sendo $v \in V$, espaço sobre o qual $\underline{a}$ e L são bem definidos e cujos elementos satisfazem a determinadas condições de contorno que serão sempre de tipo essencial.

A solução procurada é então aquela que, sendo também admissível, forma mínimo o valor da energia. Tal problema pode ser formulado com:

$$(P'') \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \\ \quad \text{tal que} \\ E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

A seguir damos um Teorema Fundamental de Equivalência, válido no entanto apenas para o caso em que a forma bilinear $\underline{a}$ é simétrica, isto é:

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall u,v \in V.$$

<u>Teorema 2</u>: Seja a forma bilinear simétrica, contínua e coerciva definida sobre V X V, onde V é um espaço de Hilbert. Seja ainda $L \in V^*$. Então resolver o problema variacional (P) equivale a resolver o problema de minimização (P").

<u>Demonstração</u>: Em primeiro lugar, precisamos provar que se (P") tem solução então ela é a solução única de (P).

Consideremos uma perturbação $u + \epsilon v$ de u onde $v \in V$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Devemos ter:

$E(u) \leq E(u + \varepsilon v) \qquad \forall v \in V \quad e \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

Usando (6) vem:

$$E(u+\varepsilon v) = \frac{1}{2} a(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - L(u+\varepsilon v)$$

e com as propriedades de linearidade de a e L vem:

$$E(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2} a(u,u) + \frac{\varepsilon}{2} a(u,v) + \frac{\varepsilon}{2} a(v,u) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,u) - L(u) - \varepsilon L(v)$$

ou seja, usando a simetria de a:

$$(7) \qquad \boxed{E(u + \varepsilon v) = E(u) + \varepsilon\, a(u,v) - L(v) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v)}$$

Por conseguinte devemos ter:

$$\varepsilon\, a(u,v) - L(v) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(v,v) \geq 0 \qquad \forall v \in V \quad e \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Arbitrando-se $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ temos:

$$a(u,v) - L(v) \geq -\frac{\varepsilon_0}{2} a(v,v)$$

Tomando-se agora $\varepsilon = -\varepsilon_0$ vem:

$$a(u,v) - L(v) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} a(v,v)$$

Como $a(v,v)$ é positivo e ε_0 pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluimos que:

$a(u,v) - L(v) = 0 \qquad \forall v \in V$ como queríamos.

Devemos em seguida provar que se u resolve (P) então:

$E(u) \leq E(v) \qquad \forall v \in V.$

Temos $a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in V.$

Em particular $a(u,v-u) = L(v-u) \qquad \forall v \in V.$

Por outro lado de

$$a(u,v-u) + a(v,v-u) - a(v,v-u) = L(v-u) \text{ deduz-se:}$$

$$a(v,v-u) - a(v-u,v-u) = L(v-u) \qquad \forall v \in V$$

Porém $a(v-u,v-u) \geq 0$, donde:

$$(8) \qquad \boxed{a(v,v-u) - L(v-u) \geq 0} \qquad \forall v \in V$$

Seja agora a expressão:

$$2[E(v) - E(u)] = a(v,v) - 2L(v) - a(u,u) - 2L(u) =$$
$$= a(v,v) - L(v) - L(v) - a(u,u) + L(u) + L(u)$$

Como $L(v) = a(u,v)$ e $L(u) = a(u,u)$ temos:

$$2[E(v) - E(u)] = a(v,v) - a(u,v) - L(v) + L(u) = a(v,v-u)-L(v-u)$$

e com (8) temos o resultado desejado. c.q.d.

<u>Observações</u>:

1º) A expressão $a(u,v) - L(v)$ é conhecida como a primeira variação de E. Tal denominação deriva do desenvolvimento (7) na qual ela representa o coeficiente da primeira potência(*) do parâmetro ε da perturbação $u+\varepsilon v$. Em resumo a solução do problema é a função que anula a primeira variação de E.

2º) Como conseqüência direta do Teorema 2, temos que o problema (P") tem solução única para $\underline{a}$ e L satisfazendo as hipóteses usuais.

(*) Análogamente, $\frac{1}{2}$ a(v,v) é dita segunda variação de E.

3º) Se <u>a</u> fosse não simétrica, resolver o problema (P") equivaleria a resolver o problema variacional de <u>solução única</u>:

$$(\tilde{P}) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \\ \quad \text{tal que} \\ \tilde{a}(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V, \text{ onde} \end{cases}$$

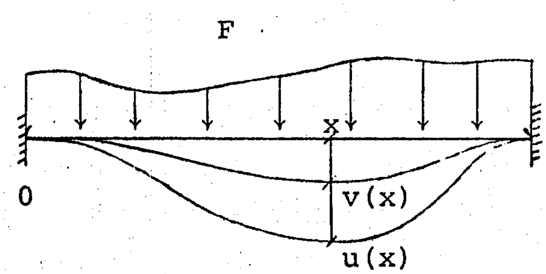
$$\tilde{a}(u,v) = \frac{1}{2}[a(u,v) + a(v,u)] \qquad u,v \in V$$

No entanto, como sabemos, a unicidade e existência da solução de (P) independe da simetria de <u>a</u>.

<u>Exercício 12</u>: Verificar que $(\tilde{P})$ tem solução única se a,L e V satisfazem às hipóteses do Teorema de Lax-Milgram e que $(\tilde{P})$ equivale a (P").

Damos a seguir alguns exemplos ilustrativos do resultado do Teorema 2.

<u>Exemplo 9</u>: Consideremos uma viga homogênea de comprimento unitário perfeitamente engastada nas suas extremidades:



Sobre a viga age uma carga de distribuição F sob cuja ação fletirá e sofrerá deslocamentos verticais v(x) com relação à posição inicial na abcissa x, até atingir a posição de repouso u(x).

A Mecânica Elementar ensina que para uma dada função deslocamento vertical v a energia elástica total do sistema, a menos de constantes multiplicativas e aditivas, é dada por:

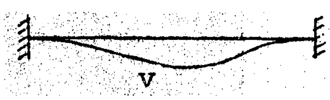
$$E(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v''|^2 - \int_0^1 fv$$

onde $f = \frac{F}{C}$, para uma constante C adequada, supondo-se que $F \in L^2(0,1)$.

Diz ainda que a posição de repouso é dada pela função deslocamento vertical u que tornar mínima a energia. Assim temos:

$$E(u) \leq E(v)$$

para todos os deslocamentos v compatíveis. Isto quer dizer que devem obedecer a restrições impostas pelas condições de apoio da viga:



1º) $v(0) = 0$ e $v(1) = 0$, uma vez que as extremidades da viga são fixas.

2º) $v'(0) = 0$ e $v'(1) = 0$, porque se trata de engastamento perfeito.

Portanto, o espaço V de funções admissíveis que devemos escolher para esse problema é tal que

1º) $E(v)$ seja definida para $v \in V$.

2º) $v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0$ para $v \in V$.

O espaço adequado é pois $H^2_0(0,1)$.

Agora, pelo Teorema 2, u deve resolver também o problema variacional

$$\int_0^1 u''v'' = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in H^2_0(0,1)$$

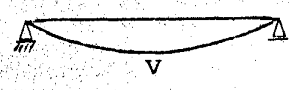
que, como vimos no Exemplo 5, tem solução única, dada por:

$$\begin{cases} u^{iv} = f \quad \text{em } L^2(0,1) \\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

sendo as condições de contorno essenciais, isto é, impostas a priori a todo deslocamento vertical.

<u>Exemplo 10</u>: Imaginemos agora que no Exemplo 9 a viga fosse apenas simplesmente apoiada nas extremidades. Neste caso, nossa

classe de funções admissíveis seria mais ampla pois agora só teríamos que impor:



$$v(0) = v(1) = 0$$

O espaço de funções admissíveis adequado seria agora o subespaço V de $H^2(0,1)$ tal que $v \in V \Longrightarrow v(0) = v(1) = 0$, ou seja:

$$V = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1),$$

e o problema variacional correspondente seria:

$$\int_0^1 u''v'' = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in V$$

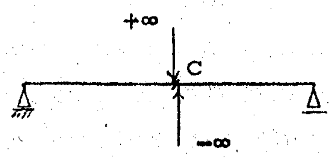
tendo ainda solução única como vimos no Exemplo 6. A equação diferencial correspondente é:

$$\begin{cases} u^{iv} = f \quad \text{em} \quad L^2(0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

As primeiras condições de contorno são essenciais pois devem ser satisfeitas por todo deslocamento vertical considerado. No entanto as condições $u''(0) = u''(1) = 0$ só devem ser obrigatoriamente satisfeitas pela função deslocamento vertical correspondente à posição de repouso. O leitor familiarizado com fundamentos de Estática não terá dificuldades em identificar essas condições com a imposição de que o momento fletor a que está submetida a viga em apoios simples (ou rótulas) seja nulo. Incidentalmente o momento fletor é proporcional à segunda derivada da função deslocamento vertical.

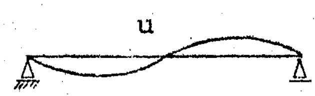
<u>Exemplo 13</u>: Em Estática aplicar uma carga momento num ponto c de uma viga representado por $[0,1]$ corresponde matematicamente a uma "distribuição de carga" com $f = \delta_c'$.

Fisicamente seu efeito é o de duas cargas concentrados de intensidade infinitas e sentidos opostos, agindo em seções "da viga" "imediatamente à esquerda e à direita" do ponto c respectivamente.

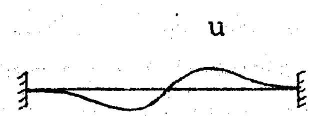


Verifique que se $c = 1/2$ e a viga é considerada simplesmente apoiada em suas extremidades, a função deslocamento vertical é dada por:

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x}{24} & \text{se } 0 \le x \le 1/2 \\[2ex] \dfrac{(x-1)^3}{6} - \dfrac{x-1}{24} & \text{se } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$



Observe-se que a viga fosse engastada nas extremidades, a solução do problema seria a função u do Exercício 8:



(Imagine o que ocorreria com uma régua flexível firmemente apoiada nas extremidades se se lhe aplicasse um "pique" no seu ponto médio com os dedos polegar e indicador).

Exercício 14: Determine a solução u do problema da viga simplesmente apoiada se se lhe aplicasse uma carga concentrada no seu ponto médio (nesse caso $f = \delta_{1/2}$)

Sugestão: Resolva inicialmente a equação diferencial:

$$\begin{cases} w'' = \delta_{1/2} \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases} \quad \text{e em seguida} \quad \begin{cases} u'' = w \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

<u>Exemplo 11</u>: Tomemos agora o caso de um problema formulado em termos de uma equação diferencial com condições de contorno.

Seja a transmissão de calor ao longo de uma barra de comprimento unitário sujeita a uma fonte de calor f. Suponhamos que a temperatura da extremidade esquerda da barra se mantém fixa, a qual, por uma conveniente mudança de escala pode ser considerada nula. Isolando-a termicamente, a extremidade direita da barra impedirá trocas de calor com o meio exterior e portanto o gradiente de temperatura será nulo nesse ponto. Assim, o problema de determinar a distribuição de temperatura u ao longo da barra, devidamente equacionado, é o conhecido <u>problema de Sturm-Liouville</u> [17] :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{em } (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

onde p e q são funções estritamente positivas em $[0,1]$ associadas a propriedades geométricas e térmicas da barra.

Vamos supor inicialmente que $p \in C^0[0,1]$ e $q \in L^\infty(0,1)$.

Gostaríamos agora de verificar se o problema está matematicamente bem colocado. Para tanto, vamos lançar mão de nossos conhecimentos sobre problemas variacionais.

Em última análise, o problema de Sturm-Liouville é uma equação diferencial de segunda ordem. Podemos supor que f, função não necessariamente contínua, é pelo menos integravel em $(0,1)$, digamos $f \in L^2(0,1)$.

Sendo assim conjecturamos que $u'' \in L^2(0,1)$, ou seja, $u \in H^2(0,1)$.

Vamos então ignorar por um momento o que foi feito nos Exemplos 3 e 4 e tentar construir um problema variacional com um espaço de funções admissíveis que satisfaçam às condições a que deve satisfazer nossa solução:

$$V = \{v / v \in H^2(0,1),\ v(0) = 0,\ v'(1) = 0\}$$

V é subespaço fechado de $H^2(0,1)$. Logo é completo para a norma

$$\|v\| = \left[\int_0^1 (|v|^2 + |v'|^2 + |v''|^2) \right]^{1/2} \qquad \forall v \in V$$

Temos então certamente:

$$\int_0^1 -(pu')'v + \int_0^1 quv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in V.$$

Poderíamos analisar diretamente o problema variacional acima. No entanto será mais cômodo usar integração por partes e obter equivalentemente:

$$\int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in V$$

já que $u'(1) = v(0) = 0$.

O que temos agora é uma forma bilinear simétrica:

$$a(u,v) = \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv$$

e a forma linear

$$L(v) = \int_0^1 fv$$

De acordo com as hipóteses feitas, temos $L \in V^*$.

Provemos agora que $\underline{a}$ é contínua sobre $V \times V$; temos:

$$|a(u,v)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |p(x)| \left| \int_0^1 |u'v'| + \sup_{x \in (0,1)} \text{ess} |q(x)| \right| \int_0^1 |uv|$$

$$\leq M \left[\int_0^1 |u'v'| + \int_0^1 |uv| \right] \text{, onde } M = \max\{\|p\|_\infty, \|q\|_\infty\}.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Schwartz:

$$\int_0^1 |u'v'| + \int_0^1 |uv| \leq \|u'\|_{0,2} \|v'\|_{0,2} + \|u\|_{0,2} \|v\|_{0,2}$$

Esta ainda aplicada a $\mathbb{R}^2$ dá enfim:

$$|a(u,v)| \leq M(\|u'\|_{0,2}^2+\|u\|_{0,2}^2)^{1/2}(\|v'\|_{0,2}^2+\|v\|_{0,2}^2)^{1/2} \leq M'\|u\|\,\|v\|$$

Vejamos agora se $\underline{a}$ é coerciva sobre $V \times V$. Temos:

$$a(v,v) = \int_0^1 p|v'|^2 + \int_0^1 qv^2$$

Como p e q são estritamente positivas temos:

$$p(x) \geq p_m > 0 \quad \text{e} \quad q(x) \geq q_m > 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

Assim $a(v,v) \geq m \int_0^1 (|v|^2+|v'|^2)$ onde $m = \min(p_m,q_m)$.
Gostaríamos agora de verificar se existe $\alpha>0$ tal que:

$$m\int_0^1 (|v|^2+|v'|^2) \geq \alpha\int_0^1 (|v|^2+|v'|^2+|v''|^2) \qquad \forall v \in V.$$

Podemos ver que não, considerando a seqüência $\{v_\varepsilon\}$ de funções de V definidas para $\varepsilon < 1/2$ por:

$$v_\varepsilon(x) = \int_0^x v'_\varepsilon$$

$$v'_\varepsilon(x) = \begin{cases} (2x+2\varepsilon)^{1/2} & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}-\varepsilon \\ \dfrac{-2x}{1+2\varepsilon} + \dfrac{2}{1+2\varepsilon} & \text{se} \quad \frac{1}{2}-\varepsilon < x \leq 1 \end{cases}$$

Como $1 \geq v'_\varepsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ temos:

$$v_\varepsilon(x) \leq x \Longrightarrow \int_0^1 |v_\varepsilon|^2 \leq \frac{1}{3} \qquad \forall \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Além disso: $\displaystyle\int_0^1 |v'_\varepsilon|^2 = \frac{(1+2\varepsilon)^3}{24} + \frac{1-4\varepsilon^2}{4} \leq \frac{7}{12} \qquad \forall \varepsilon < \frac{1}{2}.$

Por outro lado, temos:

$$v''_\varepsilon(x) = \begin{cases} (2x+2\varepsilon)^{-1/2} & \text{se} \quad 0 < x < \frac{1}{2}-\varepsilon \\ \dfrac{-2}{1+2\varepsilon} & \text{se} \quad \frac{1}{2}-\varepsilon < x \leq 1 \end{cases}$$

Logo $\int_0^1 |v''_\varepsilon|^2 = \frac{2}{1+2\varepsilon} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(2\varepsilon)$ e portanto:

$\forall\varepsilon>0$ $v_\varepsilon \in H^2(0,1)$ com $v_\varepsilon(0) = 0$ e $v'_\varepsilon(1) = 0$.

Porém, enquanto

$$\int_0^1 (|v_\varepsilon|^2 + |v'_\varepsilon|^2) \leq \frac{11}{12} \qquad \forall\varepsilon<\frac{1}{2}$$

$\int_0^1 |v''_\varepsilon|^2$ cresce indefinidamente quando ε tende a zero.

Então o problema variacional poderá estar mal formulado com esse espaço V.

Para obtermos um problema garantidamente bem colocado devemos ampliar a classe de funções admissíveis de modo a continuar tendo continuidade e passar a assegurar a coercividade.

Verifica-se sem dificuldades que tornando-se

$$V = H^1_E(0,1), \text{ com: } \|v\| = \left[\int_0^1 (|v|^2 + |v'|^2)\right]^{1/2}$$

temos agora: $|a(u,v)| \leq M\|u\|\,\|v\|$ com $M = \max\{\|p\|_\infty, \|q\|_\infty\}$ e $a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$ com $\alpha = \min\{p_m, q_m\}$.

Fomos obrigados a abandonar a condição $v'(1) = 0$ por ser em geral inconsistente com a condição $v \in H^1(0,1)$.

Agora verificamos que o problema variacional de solução única $u \in H^1_E(0,1)$:

$$\int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in H^1_E(0,1)$$

é equivalente ao problema de Sturm-Liouville. De fato:

$$\langle\varphi', pu'\rangle + \langle\varphi, qu\rangle = \langle\varphi, f\rangle \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(0,1) \quad \text{ou seja:}$$

$-(pu')' + qu = f$ no sentido das distribuições o que implica em: $(pu')' \in L^2(0,1)$.

As condições de contorno são:

$u(0) = 0$ (essencial)

$u'(1) = 0$ (natural)

Esta última é deduzida, como nos Exemplos 4 e 6 (verificar).

Apesar de termos verificado que o problema da transmissão de calor ao longo de uma barra está bem colocado matematicamente, cremos que permanece a questão.

Teria solução única o problema:

Dada $f \in L^2(0,1)$, achar $u \in V$ tal que:

$$\int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in V$$

sendo V o subespaço de $H^2(0,1)$ de funções que satisfazem a todas as condições de contorno?

A resposta é negativa no caso geral pelo simples fato que, se p não for suficientemente regular, não temos $u \in H^2(0,1)$ De fato, partindo-se de $u \in H^1_E(0,1)$, como $q \in L^\infty(0,1)$, devemos ter $qu \in L^2(0,1)$. Logo $(pu')' \in L^2(0,1)$ e daí segue que $pu' \in H^1(0,1) \Longrightarrow pu' \in C^0[0,1] \Longrightarrow u' \in C^0[0,1]$.

Isto, no entanto, não é bastante para afirmamos que $u'' \in L^2(0,1)$.

Porém, num caso particular como $p=q=1$ teríamos efetivamente

$$u'' \in L^2(0,1) \Longrightarrow u \in H^2(0,1).$$

Por outro lado, como sabemos, resolver o problema variacional correspondente com $H^1_E(0,1)$, equivaleria a procurar o mínimo de

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (|v'|^2 + |v|^2) - \int_0^1 fv \quad , \quad v \in H^1_E(0,1).$$

Este no entanto é encontrado em V, subespaço de $H^1_E(0,1)$. Logo, a fortiori, o mínimo de E(v) sobre V não pode ser outro senão u e o problema variacional formulado com o espaço de funções admissíveis V tem também solução única, apesar de não serem satisfeitos as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram.

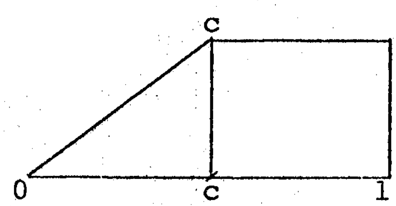
O que se observa, no entanto, é que não ganhamos nada trabalhando com espaços mais restritos. De fato, a utilização de espaços os mais amplos possíveis permite, não só admitir uma classe muito mais abrangente de dados do problema, como também será extremamente útil para a discretização do problema variacional.

Exemplo 15: Verifique que o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -(pu')' = f & \text{em } L^2(0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

tem solução única se $p \in C^0[0,1]$ com $p(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

Exercício 16: Verifique que o problema do exercício anterior teria ainda solução se $f = \delta_c$, $c \in [0,1]$ e que essa solução seria, para $p=1$.



Exercício 17: O que ocorreria com a condição de contorno natural se tivéssemos $f = \delta_1$?

Exercício 18: Verifique que o problema

$$\min_{v \in H_0^1(0,1)} \frac{1}{2} \int_0^1 (|v|^2 + |v'|^2) - v'\left(\frac{1}{2}\right)$$

não tem solução.

Sugestão: Tomar $v = \sqrt[3]{(2x-1)^2} - 1.$

BIBLIOGRAFIA

[1] Adams, R.A - Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] Asplund, E & Bungart L. - A First Course in Integration, Holt, Rinehart and Winston, San Francisco, 1966.

[3] Bartle, R.G. - The Elements of Integration, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[4] Bertrandias, J.P. - Mathématiques pour l'Informatique Vol.1- (Analyse Fonctionnelle), Armand Colin, Paris, 1970.

[5] Chavent, G. - Analyse Fonctionnelle et Discrétisation des Equations aux Dérivées Partielles, IRIA, Rocquencourt, 1971.

[6] Collatz, L. - Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, New York, 1964.

[7] Fernandez, P.J. - Medida e Integração, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1976.

[8] Kolmogórov, A.N. & Fomín, S.V. - Elementos de la Teoria de Funciones y del Análisis Funcional, Editorial MIR, Moscú, 1972.

[9] Lichnerowicz, A - Linear Algebra & Analysis, Holden-Day-Inc., San Francisco, 1967.

[10] Lions, J.L. - Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles, Dunod / Gauthier - Villars, Paris, 1968.

[11] Luenberger - Optimization by Vector Space Methods, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.

[12] Medeiros, L.A. & Rivera, P.H. - Iniciação aos Espaços de Sobolev, Instituto de Matemática da UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[13] Nowosad, P. - Introdução à Análise Funcional, Instituto de Matemática da UFPe, Recife, 1969.

[14] Oden, J.T. & Reddy, J.N. - An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[15] Schwartz, L. - Théorie des Distributions, Hermann e Cie Editeurs, Paris, 1950.

[16] Smirnow,W.I. - Lehrgang der Höheren Mathematik Teil V, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

[17] Strang, G. & Fix, G.J. - An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

[18] Weir, A.J. - Lebesgue Integration & Measure, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.