PUC

Série: Monografias em Ciência da Computação

Nº 3/85

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA MATEMÁTICA DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS

por

Vitoriano Ruas

Departamento de Informática

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 – CEP-22453

RIO DE JANEIRO – BRASIL

PUC/RJ - DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Série: Monografias em Ciência da Computação, Nº 3/85

Editor: Paulo A.S. Veloso   Março, 1985

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA MATEMÁTICA DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MISTOS *

por

Vitoriano Ruas

* Trabalho parcialmente financiado pela FINEP.

ESCLARECIMENTO DO AUTOR

Estas notas completam o texto intitulado "Introdução aos Fundamentos Matemáticos do Método dos Elementos Finitos" correspondente ao curso ministrado pelo autor no LCC/CNPq em julho de 1984, como parte do II Curso de Mecânica Teórica e Aplicada.

ABSTRACT

The aim of this work is to present the essential mathematical aspects related to the study of mixed finite element methods. As it is well-known, such aspects provide a basis for both understanding and analysing most of the finite element methods of this type currently in use.

This material is intendend to be an introduction to another text on the Numerical Analysis of these methods to be edited by this Series of Monographs in the near future. Taking into account the lack of detailed study about this topic in the literature on finite element methods, one of the author's main concern in preparing this text was being didactic, while making it as self-contained as possible.

RESUMO

Este trabalho consiste numa apresentação dos aspectos matemáticos essenciais que regem o estudo dos métodos de elementos finitos mistos, constituindo as bases não somente para a justificativa dos métodos desse tipo mais em uso pelos especialistas, como também, para a respectiva Análise Numérica. Tendo isso em mente, o presente texto será complementado por outro sobre este último assunto, atualmente em preparação.

O material é tratado da forma mais autocontida possível, e com uma preocupação didática, considerando a relativa escassez de estudo aprofundado a respeito, na literatura especializada em métodos de elementos finitos. O essencial dos conhecimentos de Análise Funcional e Problemas Variacionais, necessários para o bom entendimento do assunto, pode ser encontrado nas notas intituladas "Introdução aos Fundamentos Matemáticos do Método dos Elementos Finitos", correspondentes aos curso de mesmo nome que o autor ministrou no LCC/CNPq em julho de 1984, como parte do II Curso de Mecânica Teórica e Aplicada. Para alguns tópicos específicos, as referências indicadas no texto completam esse material.

KEY-WORDS Finite elements, hybrid methods, inf-sup condition, Lagrange multiplier, LBB condition, mixed methods, rank condition, saddle-point.

PALAVRAS-CHAVES Condição inf-sup, condição LBB, condição de posto, elementos finitos, métodos híbridos, métodos mistos, multiplicador de Lagrange, ponto-sela.

CONTEÚDO

I. INTRODUÇÃO

A necessidade de se trabalhar com métodos de elementos finitos mistos, isto é, os métodos em que se calcula simultaneamente, mas com variáveis independentes, aproximações de duas ou mais grandezas interrelacionadas inerentes a certo sistema físico, surge em um bom número de situações na prática. Como caso notável, podemos apontar o de problemas descritos por equações diferenciais parciais em que, mais do que a grandeza representada pela incógnita da equação, está-se interessado em conhecer explicitamente uma ou mais grandezas físicas diretamente associadas à primeira por uma relação matemática, que pode ser igualmente de tipo diferencial. Por outro lado, muitas vezes a formulação natural de alguns problemas físicos é a mista, isto é, envolve naturalmente duas ou mais variáveis acopladas em um sistema de equações diferenciais.

Com a crescente utilização pelos engenheiros de métodos mistos para resolver problemas por volta da passagem da década 60-70, vários matemáticos se interessaram em estudar esse tipo de formulação. Tratava-se, em particular, de explicar certos fenômenos observados na prática, tais como problemas discretos mal colocados, aproximações divergentes, instabilidades numéricas diversas, etc.

Em particular, o matemático I. Babuška da Universidade de Maryland, assim como O.A. Ladyzhenkaya da Academia de Novosibirsk, URSS, e mais tarde F. Brezzi da Universidade de Pavia, Itália, deram contribuições decisivas na análise de existência de soluções de problemas mistos. O objetivo destas notas é apresentar uma introdução a essa teoria matemática.

II. MOTIVAÇÃO

Consideremos uma equação diferencial com condições de contorno em sua forma geral:

$$\mathcal{A}p = f$$

onde f é uma função conhecida, $\mathcal{A}$ é um certo operador diferencial, e p é a grandeza em termos da qual se exprime o modelo matemático de certo problema físico.

Suponhamos que se deseja conhecer uma grandeza u associada a p pela relação,

$$u = \mathcal{B}p$$

onde $\mathcal{B}$ é um certo operador, por exemplo, outro operador diferencial.

O problema a resolver se exprimiria então, equivalentemente pelo sistema de equações:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}u &= f \\ u = \mathcal{B}p &= 0 \end{aligned}$$

a supor que $\mathcal{A}$ admita uma decomposição da forma $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$

Um caso típico é o da equação de Poisson

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} -\Delta p = f & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n \;, \; n=2,3 \\ p = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

a qual, entre outros problemas, descreve a distribuição de temperatura p num meio, sujeito a uma dada fonte de calor f, que ocupa uma região Ω em cujo bordo $\partial\Omega$ a temperatura é conhecida.

Muitas vezes o fluxo de calor $\vec{u}$ dado por

$$\vec{u} = \vec{\nabla} p$$

é mais importante do que a própria distribuição de temperatura no corpo. Assim poderíamos determiná-lo explicitamente, resolvendo o seguinte <u>problema misto:</u>

$$(\mathcal{E}_1) \quad \begin{cases} -\,div\ \vec{u} = f & \text{em} \quad \Omega \\ \vec{u} = \vec{\nabla} p & \text{em} \quad \Omega \\ p = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

observando que $\Delta = div(\vec{\nabla})$, isto é, neste caso $\mathcal{C} = -\,div$ e $\mathcal{B} = \vec{\nabla}$

Podemos colocar o problema $(\mathcal{E}_1)$ numa <u>forma variacional mista</u>, introduzindo os seguintes espaços para $\vec{u}$ e p respectivamente:

$$V_1 = H(div;\Omega) \overset{def}{\equiv} \{\vec{v}/\vec{v} \in [L^2(\Omega)]^n,\ div\ \vec{v} \in L^2(\Omega)\}$$

$$Q_1 = L^2(\Omega).$$

Assim, multiplicando escalarmente em Q_1 a $1^{\underline{a}}$ equação de $(\mathcal{E}_1)$ por $q \in Q_1$ vem:

$$\int_\Omega q\ div\ \vec{u}\, d\vec{x} = \int_\Omega f q\, d\vec{x} \qquad \forall q \in Q_1$$

Por outro aldo, multiplicando a $2^{\underline{a}}$ equação por $\vec{v} \in V_1$ vem, usando o Teorema da Divergência e do fato que $p=0$ sobre $\partial\Omega$:

$$\int_\Omega \vec{u} \circ \vec{v}\ d\vec{x} + \int_\Omega p\ div\ \vec{v}\ d\vec{x} = 0 \qquad \forall \vec{v} \in V_1$$

Em resumo temos o problema variacional:

$$
(P_1) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (\vec{u},p) \in V_1 \times Q_1 \text{ tal que} \\ \int_\Omega \vec{u} \circ \vec{v} \; d\vec{x} + \int_\Omega p \; div \; \vec{v} \; d\vec{x} = 0 \quad \forall \; \vec{v} \in V_1 \\ \int_\Omega q \; div \; \vec{u} \; d\vec{x} = \int_\Omega fq \, d\vec{x} \qquad \forall q \in Q_1 \end{cases}
$$

o qual é equivalente a $(\mathcal{E}_1)$, como se pode provar, escolhendo-se normas adequadas para V_1 e Q_1. Para um estudo detalhado sobre essa equivalência referimo-nos ao trabalho de THOMAS [15]

Outro exemplo que se enquadra neste caso é o da mesma equação de Poisson, mas onde Ω é particionado em N elementos disjuntos K_i, sendo $\bigcup_{i=1}^{N} K_i = \Omega$. Neste caso, deseja-se conhecer não somente $\vec{u}$ e p como no caso acima, mas também os traços de p sobre ∂K_i, a fronteira de cada K_i, respeitadas as coincidências desses traços em porções comuns a dois elementos vizinhos. Denotando por λ a função definida sobre $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} \partial K_i$, que representa o conjunto desses traços, teríamos o problema misto seguinte:

$$
(\mathcal{E}_2) \quad \begin{cases} - \, div \; \vec{u} = f \quad \text{em cada } K_i, \; i = 1,2,\ldots,N \\ \vec{u} = \vec{\nabla} p \quad \text{em } \Omega \\ \lambda = p \quad \text{sobre } \Gamma \\ p = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}
$$

Vejamos agora que, com uma escolha adequada dos espaços para $\vec{u}$ e λ podemos colocar o sistema $(\mathcal{E}_2)$ numa forma variacional análoga à de $(\mathcal{E}_1)$, eliminando-se automaticamente a variável p.

Sejam inicialmente os espaços:

$$V_2 = \{\vec{v} \ / \ \vec{v} \in [L^2(\Omega)]^n, \ div\ \vec{v} = 0 \text{ em } K_i \quad \forall i \ , \ i = 1,2,\ldots,N\}$$

$$Q_2 = \{\mu \ / \ \mu \text{ definido sobre } \Gamma, \text{ tal que } \exists q \in H_0^1(\Omega) \text{ com } q_{/\partial K_i} = \mu, \ 1 \leq i \leq N\}.$$

Denotando por $\vec{n}_i$ o vetor unitário normal externo a ∂K_i, e multiplicando escalarmente em $L^2(\Omega)$ a 2ª equação de $(\mathfrak{E}_2)$ por $\vec{v} \in V_2$, tem-se:

$$\int_\Omega \vec{u} \circ \vec{v} \ d\vec{x} = \int_\Omega \vec{\nabla} p \circ \vec{v} \ d\vec{x} = \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i} \vec{\nabla} p \circ \vec{v} \ d\vec{x}$$

Considerando que

$$\int_{K_i} \vec{\nabla} p \circ \vec{v} \ d\vec{x} = \int_{\partial K_i} p(\vec{v} \circ \vec{n}_i) \ ds - \int_{K_i} p \ div \ \vec{v} \ d\vec{x} \ ,$$

como $\vec{v} \in V_2$, e levando em conta a 3ª equação vem:

$$\int_\Omega \vec{u} \circ \vec{v} \ d\vec{x} - \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial K_i} \lambda(\vec{v} \circ \vec{n}_i) \ ds = 0 \qquad \forall \vec{v} \in V_2$$

Enfim, como o fluxo $\vec{u} \circ \vec{n}_i$ saindo de K_i através de cada porção γ de ∂K_i comum a um elemento vizinho deve compensar o fluxo saindo deste último através de γ, vemos que $\vec{u}$ deve também satisfazer.

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\partial K_i} \mu(\vec{u} \circ \vec{n}_i) ds = 0 \qquad \forall \mu \in Q_2$$

Obtém-se assim o seguinte problema variacional:

$$(P_2) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (\vec{u}_o, \lambda) \in V_2 \times Q_2 \quad \text{tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \vec{u}_o \circ \vec{v} \ d\vec{x} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial K_i} \lambda(\vec{v} \circ \vec{n}_i) ds = -\int_\Omega \vec{w} \circ \vec{v} \ d\vec{x} \qquad \forall \vec{v} \in V_2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_{\partial K_i} \mu \ (\vec{u}_o \circ \vec{n}_i) \ ds = 0 \qquad \forall \mu \in Q_2 \end{cases}$$

onde $\vec{w}$ é um campo vetorial arbitrariamente escolhido entre os que satisfazem: $\vec{w}\in[L^2(\Omega)]^n$, $\vec{w}\in H(div;\ K_i)$ $\forall i$, $i = 1,2,\ldots,N$, e $div\ \vec{w} = f$ em cada K_i, $i= 1,2,\ldots,N$. Desta forma $\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{w}$.

Inversamente, está provado em [15] que se $(\vec{u},\lambda)$ é a solução de (P_2), então $\exists p\in H_0^1(\Omega)$ tal que a trinca $(\vec{u},p,\lambda)$ satisfaz a equação $(\mathcal{E}_2)$, e logo $(\mathcal{E})$.

Tanto o problema (P_1) quanto (P_2) podem ser colocados na forma geral seguinte:

$$(\mathcal{M})\quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u,p)\in V\times Q \text{ tal que} \\ a(u,v)+b(p,v) = L(v) & \forall v\in V \\ b(q,u) = G(q) & \forall q\in Q \end{cases}$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são formas bilineares contínuas sobre $V\times V$ e $Q\times V$, respectivamente, e L e G são formas lineares contínuas sobre V e Q respectivamente

No caso de (P_1), $V=V_1$ e $Q=Q_1$, u é o campo $\vec{u}$ e p é a solução da equação de Poisson $(\mathcal{E})$. Temos:

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \vec{u}\circ\vec{v}\ d\vec{x} \quad ; \quad L(\vec{v})=0 \qquad \forall\vec{v}\in V_1$$

$$b(q,\vec{v}) = \int_\Omega q\ div\ \vec{v}\ d\vec{x} \quad ; \quad G(q) = \int_\Omega fq\ d\vec{x} \quad \forall q\in Q_1$$

No caso de (P_2), $V = V_2$ e $Q = Q_2$, u é o campo $\vec{u}_o$ e p é a variável traço λ. Temos:

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \vec{u}\circ\vec{v}\ d\vec{x} \ ; \ L(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{w}\circ\vec{v}\ d\vec{x} \qquad \forall\vec{v}\in V_2$$

onde $\vec{w}$ satisfaz $div\ \vec{w} = f$ em cada K_i, $i=1,2,\ldots,N$

$$b(\mu,\vec{v}) = \sum_{i=1}^{N}\int_{\partial K_i} \mu(\vec{v}\circ\vec{n}_i)\ ds \ ; \quad G(\mu)=0 \qquad \forall\mu\in Q_2$$

OBSERVAÇÃO 1: Na literatura sobre métodos de elementos finitos (ver p. ex. Oden & Reddy [10]), um método de resolução em que figurem como incógnitas, além de certas funções, suas derivadas, é dito um método misto. Por outro lado se as incógnitas são além das funções e/ou suas derivadas, o traço das primeiras sobre os elementos de uma partição do domínio de definição do problema, então o método de resolução é dito um método híbrido. Parece-nos entretanto ser essa distinção pouco consistente sob o ponto de vista matemático, de forma que neste texto consideramos que o método é misto, sempre que o problema a resolver está colocado sob a forma ($\mathcal{M}$), independentemente do significado das variáveis u e p. □

À primeira vista, tanto o problema (P_1) como o problema (P_2) podem ser considerado formas complicadas de se escrever a equação de Poisson. No entanto, na prática, além da vantagem já mencionada de se obter diretamente como soulução as grandezas em que se está mais interessado, outros benefícios como melhores aproximações dessas mesmas grandezas, ou ainda a simplicidade computacional podem ser alcançados. Por exemplo, o problema (P_2) uma vez discretizado, e após simples manipulações algébricas, poderá ser resolvido localmente, isto é, elemento por elemento, o que se deve ao fato de que os valores de $\vec{u}$ nas interfaces de dois elementos vizinhos são, a priori, completamente independentes. Ora, qualquer usuário de métodos de elementos finitos clássicos (não mistos) sabe que é justamente o acoplamento das incógnitas do sistema de equações lineares a resolver, a nível de vários elementos, devido a imposições de continuidade nas suas interfaces, o fator que encarece esse tipo de resolução.

Antes de concluir estas considerações prévias, é preciso salientar o fato de que a formulação $(\mathcal{M})$ de problemas físicos nem sempre surge apenas por artifícios de cálculo. Muitos desses problemas, com efeito, são naturalmente formulados dessa maneira. Um exemplo notável desse caso é o problema de Stokes, que consiste em encontrar um campo de velocidade $\vec{u}$ de um fluido de viscosidade suposta unitária, e uma pressão p nele reinante, de tal forma que, dado um campo de forças $\vec{f}$ atuando na região de escoamento Ω, tenhamos:

$$(\mathcal{E}_3)\quad \begin{cases} -\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} & \text{em } \Omega \\ div\ \vec{u} = 0 & \text{em } \Omega \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde a indeterminação de p por uma constante aditiva, é levantada impondo-se a condição $\int_\Omega p\ d\vec{x} = 0$.

Sejam os espaços:

$$V_3 = [H_0^1(\Omega)]^n = \{\vec{v}/\vec{v} \in [L^2(\Omega)]^n,\ \vec{\nabla}\ \vec{v} \in [L^2(\Omega)]^{n\times n},\ \vec{v} = \vec{0} \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

$$Q_3 = L_0^2(\Omega) = \{q/q \in L^2(\Omega),\ \int_\Omega q\ d\vec{x}=0\}$$

Multiplicando escalarmente a 1ª equação por $\vec{v} \in V_3$ e aplicando a fórmula de Green, e em seguida multiplicando escalarmente a 2ª equação por $q \in Q_3$, obtemos o problema variacional misto seguinte:

$$(P_3)\quad \begin{cases} \text{Encontrar } (\vec{u},p) \in V_3 \times Q_3 \text{ tal que} \\ \int_\Omega \vec{\nabla}\ \vec{u} \circ \vec{\nabla}\ \vec{v}\ d\vec{x} - \int_\Omega p\ div\ \vec{v}\ d\vec{x} = \int_\Omega \vec{f} \circ \vec{v}\ d\vec{x} \quad \forall\ \vec{v} \in V_3 \\ -\int_\Omega q\ div\ \vec{u}\ d\vec{x} = 0 \qquad \forall q \in Q_3 \end{cases}$$

isto é, o problema $(\mathcal{M})$ com $V=V_3$, $Q=Q_3$ e

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \vec{\nabla}\vec{u} \circ \vec{\nabla} v d\vec{x} \quad ; \quad L(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{f} \circ \vec{v}\, d\vec{x} \qquad \forall \vec{v} \in V_3$$

$$b(q,\vec{v}) = \int_\Omega q \, div\, \vec{v}\, d\vec{x} \quad ; \quad G(q) = 0 \qquad \forall\, q \in Q_3$$

III. A CONDIÇÃO INF-SUP

A questão que surge naturalmente sob o ponto de vista matemático é a da resolubilidade do problema $(\mathcal{M})$, isto é, a de saber sob que condições há existência e eventualmente unicidade de sua solução. A chave da análise que traz uma resposta a essa questão é uma condição de compatibilidade entre os espaços V e Q, conhecida na literatura como condição LBB ,sigla formada pelas iniciais dos três matemáticos que deram contribuições essenciais para a análise de problemas mistos (Ladyzhenshkya-Babuška-Brezzi). Porém, antes de considerarmos o problema $(\mathcal{M})$ especificamente, parece-nos mais natural introduzir outra condição da qual se origina a condição LBB: a condição inf-sup.

Como se sabe, o Teorema de Lax-Milgram (ver p.ex. [11]), estabelece uma condição suficiente para a boa colocação de um problema variacional da forma:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } \mu \in \mathcal{V} \text{ tal que} \\ \mathcal{A}(\mu, v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \end{cases}$$

onde $\mathcal{V}$ é um espaço de Hilbert com produto interno $(.|.)$ e norma $\|.\|$, $\mathcal{L} \in \mathcal{V}^*$, isto é, é uma forma linear contínua sobre $\mathcal{V}$ e $\mathcal{A}$ é uma forma bilinear contínua sobre $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$.

Tal condição é a coercividade de $\mathcal{A}$, isto é:

$$\exists\ \alpha>0 \text{ tal que } \mathcal{A}(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \forall v \in \mathcal{V}$$

embora ela não seja uma condição necessária para que o problema $(\mathcal{P})$ tenha solução única.

Assim, por exemplo, se $\mathcal{V} = \mathbb{R}$, $a(\vec{u}, \vec{v}) = (A\vec{u}/\vec{v})_n$ e $\mathcal{B}(\vec{v}) = (\vec{b}|\vec{v})_n$, onde A é uma matriz $n \times n$, $\vec{b}$ é um vetor dado de $\mathbb{R}^n$ e $(\vec{u}|\vec{v})_n$ representa o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$, isto é, $\vec{u}^T\vec{v}$ ou $\vec{u} \circ \vec{v}$, dado por $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, o problema ($\mathcal{P}$) é equivalente ao sistema de equações lineares

$$A\vec{u} = \vec{b}$$

Então, ($\mathcal{P}$) terá solução única se e somente se A é regular, isto é, se $det\ A \neq 0$. No entanto uma matriz regular que não seja positiva definida não é coercia, no sentido que:

$$a(\vec{v}, \vec{v}) = (A\vec{v}|\vec{v})_n \geq \alpha \|\vec{v}\|^2 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \text{ com } \alpha > 0$$

Vamos então usar o problema acima para motivar a introdução de uma condição necessária e suficiente para a boa colocação de ($\mathcal{P}$):

Se $det\ A \neq 0$, então, dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, temos $A\vec{u} \neq \vec{0}$. Logo a todo $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ podemos associar $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $(A\vec{u}|\vec{v})_n > 0$, bastando para isto tomar $\vec{v} = A\vec{u}$.

Mais ainda, existe um real γ_1 estritamente positivo tal que $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, tenhamos $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz.

$$\frac{(A\vec{u}|\vec{v})_n}{\|\vec{v}\|} \geq \gamma_1 \|\vec{u}\|$$

De fato, tomando $\vec{v} = A\vec{u}$ temos

$$\frac{(A\vec{u}|\vec{v})_n}{\|\vec{v}\|} = \frac{(A\vec{u}|A\vec{u})_n}{\|A\vec{u}\|} \geq \frac{(A^T A\vec{u}|\vec{u})_n}{\|A\| \ \|u\|} \geq \frac{\mu\, min \|\vec{u}\|^2}{\sqrt{\mu\ max}\ \|\vec{u}\|} = \gamma_1 \|\vec{u}\|$$

com $\gamma_1 = \mu\, min/\sqrt{\mu\ max}$, onde μ_{min} e μ_{max} são respectivamente o menor e o maior autovalor (estritamente positivos) da matriz simétrica positiva definida A^TA.

Inversamente, se $\exists \gamma_1 > 0$ tal que $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ exista $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz

$$\frac{(A\vec{u}|\vec{v})_n}{\|\vec{v}\|} \geq \gamma_1 \|\vec{u}\|$$

podemos dizer que $det\ A \neq 0$. De fato, se nessas circunstâncias $det\ A = 0$, podemos escolher $\vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{u} = \vec{0}$. Mas neste caso $(A\vec{u}|\vec{v})_n = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, o que torna a minoração acima impossível.

Estabelecemos então outra condição necessária e suficiente para que tenha solução única o sistema $A\vec{u} = \vec{b}$, equivalente à condição $det\ A \neq 0$; tal condição se exprime por:

$$\exists \gamma_1 > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \sup_{\vec{v} \neq \vec{0}} \frac{(A\vec{u}, \vec{v})_n}{\|\vec{v}\|} \geq \gamma_1 \|\vec{u}\|$$

já que $\sup\limits_{\vec{v} \neq \vec{0}} \dfrac{(A\vec{u}|\vec{v})_n}{\|\vec{v}\|} \geq \dfrac{(A\vec{u}\ |\ \vec{v})_n}{\|\vec{v}\|}$, sendo $\vec{v}$ o elemento de $\mathbb{R}^n$ tal que $\dfrac{(A\vec{u}|\vec{v})_n}{\|\vec{v}\|} \geq \gamma_1 \|\vec{u}\|$.

Mas como neste caso temos $\sup\limits_{\vec{v} \neq \vec{0}} \dfrac{(A\vec{u}|\vec{v})_n}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} \geq \gamma_1 > 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \vec{u} \neq \vec{0}$

então nossa condição necessária e suficiente se escreve:

$$(C_1) \qquad \exists \gamma_1 > 0 \text{ tal que } \inf_{\vec{u} \neq \vec{0}} \sup_{\vec{v} \neq \vec{0}} \frac{(A\vec{u}|\vec{v})_n}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} \geq \gamma_1 .$$

Observemos ainda que se $det\ A \neq 0$, então $det\ A^T \neq 0$, e portanto temos também:

(C_2) $\quad \exists \gamma_2 > 0$ tal que $\inf\limits_{\vec{v}\neq\vec{0}} \sup\limits_{\vec{u}\neq\vec{0}} \dfrac{(A\vec{u},\vec{v})_n}{\|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|} \geq \gamma_2$

pois $(A\vec{u}|\vec{v})_n = (A^T\vec{v},\vec{u})_n$ e a condição (C_1) também se aplica a A^T. No caso $\gamma_2 = \nu_{min} / \sqrt{\nu_{max}}$, onde ν_{min} e ν_{max} são respectivamente o menor e o maior autovalor (estritamente positivos) de AA^T, matriz igualmente positiva definida.

Voltando ao caso geral, pode-se considerar condições análogas para a forma $\mathcal{A}$, isto é:

$(\mathcal{C}_1)$ $\quad \exists \gamma_1 > 0$ tal que $\inf\limits_{u\neq\vec{0}} \sup\limits_{v\neq\vec{0}} \dfrac{\mathcal{A}(u,v)}{\|u\| \ \|v\|} \geq \gamma_1$

$(\mathcal{C}_2)$ $\quad \exists \gamma_2 > 0$ tal que $\inf\limits_{v\neq\vec{0}} \sup\limits_{u\neq\vec{0}} \dfrac{\mathcal{A}(u,v)}{\|u\| \ \|v\|} \geq \gamma_2$

que na realidade são as condições mínimas de existência e unicidade do problema variacional $(\mathcal{P})$, sob as hipóteses de linearidade e continuidade de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{L}$, sendo $\mathcal{V}$ um espaço de Hilbert.

<u>OBSERVAÇÃO 2</u>: Naturalmente se a forma $\mathcal{A}$ é simétrica, a condição $(\mathcal{C}_2)$ é desnecessária. □

Para provar essa afirmativa precisamos usar um resultado clássico da Análise Funcional: o Teorema do Inverso de Banach que enunciamos:

<u>Teorema 1</u>: Sejam X e Y dois espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$ e $\| \ \|_Y$ respectivamente. Se um operador A é uma bijeção linear contínua de X em Y, isto é

$\exists C_1>0$ tal que $\|A(x)\|_Y \le C_1 \|x\|_X \quad \forall x\in X$ e

$\forall y\in Y \quad \exists x\in X$ tal que $y=A(x)$,

então existe uma constante $C_2>0$ tal que

$\|x\| \le C_2 \|A(x)\| \qquad \forall x\in X \qquad \square$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em inúmeras obras de Análise Funcional, por exemplo em K. Yoshida [17].

Agora provamos

<u>Teorema 2</u>: Seja $\mathcal{V}$ um espaço de Hilbert com produtos interno $(\cdot|\cdot)$ e norma $\|\cdot\|$, e a uma forma bilinear contínua sobre $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$, isto é, $a(u,v)$ é linear com respeito a cada um dos argumentos $u,v\in\mathcal{V}$, e além disso.

$\exists M>0$ tal que $\quad a(u,v) \le M \|u\| \|v\| \qquad \forall u, v\in\mathcal{V}$

Então dado $\mathcal{L}\in \mathcal{V}^*$, isto é, $\mathcal{L}$ é linear e
$\exists C>0$ tal que $\mathcal{L}(v)\le C\|v\| \quad \forall v\in V$.
o problema variacional ($\mathcal{P}$) tem uma solução única $u\in\mathcal{V}$, se e somente se a satisfaz a condição *inf-sup* $(\mathcal{C}_1)$-$(\mathcal{C}_2)$.

<u>Demonstração</u>: <u>A condição é suficiente</u>:

Referindo-se à demonstração do Teorema de Lax-Milgram, pode-se deduzir que o operador $\mathcal{A}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ tal que

$$a(u,v) = (\mathcal{A}(u)|v) \qquad \forall\ u,v\in\mathcal{V},$$

é linear contínuo com $\|\mathcal{A}(u)\| \le M\|u\| \quad \forall u\in\mathcal{V}$, para o que basta usar a bilinearidade e a continuidade de a .

Provemos agora que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, a imagem de $\mathcal{A}$, é fechada.

Seja então $\{v_n\} \subset \mathcal{R}(\mathcal{A})$ uma seqüência que converge a $v \in \mathcal{V}$, e $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$ a sequência tal que $\mathcal{A}(u_n) = v_n$.

Temos pela condição $(\mathcal{C}_1)$ que

$$\|\mathcal{A}(u_n) - (u_m)\| = \sup_{v \neq \vec{0}} \frac{(\mathcal{A}(u_n) - \mathcal{A}(u_m) \mid v)}{\|v\|} = \sup_{v \neq \vec{0}} \frac{a(u_n - u_m, v)}{\|v\|} \geq \|u_n - u_m\|$$

Por conseguinte, como $\{\mathcal{A}(u_n)\}$ é sequência convergente de $\mathcal{V}$, e logo de Cauchy, $\{u_n\}$ também é seqüência de Cauchy. Então $\exists\, u \in \mathcal{V}$ tal que $u_n \to u$.

Mas pela continuidade de $\mathcal{A}$ temos

$0 \leq \|\mathcal{A}(u_n) - \mathcal{A}(u)\| \leq M \; \|u_n - u\|$, e portanto

$\mathcal{A}(u_n) \to \mathcal{A}(u)$, ou seja $\mathcal{A}(u) = v$, e $u \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, isto é $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é fechada.

Vejamos agora que $\mathcal{A}$ é sobrejetivo, isto é, $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}$, ou equivalentemente que $\mathcal{R}(\mathcal{A})^{\perp}$ é reduzido ao vetor $\vec{0}$.

De fato, seja $w \in \mathcal{R}(\mathcal{A})^{\perp}$, $w \neq \vec{0}$. Temos $(\mathcal{A}(u) \mid w) = a(u, w) = 0$ $\forall\, u \in \mathcal{V}$. Por conseguinte $\sup\limits_{u \neq \vec{0}} \dfrac{a(u, w)}{\|u\|} = 0$. Mas neste caso temos

$$\inf_{v \neq \vec{0}} \; \sup_{u \neq \vec{0}} \frac{a(u, v)}{\|u\| \; \|v\|} \leq 0,$$ o que contradiz $(\mathcal{C}_2)$. Logo $w = \vec{0}$

Enfim, usando o Teorema da Representação de Riesz [17], existe $f \in \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{L}(v) = (f \mid v)$ $\forall v \in \mathcal{V}$. Portanto $(\mathcal{P})$ equivale ao problema:

Encontrar $u \in \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{A}(u) = f$ em $\mathcal{V}$,

problema que tem solução pela sobrejetividade de $\mathcal{A}$.

Finalmente, a unicidade de u decorre da injetividade de $\mathcal{A}$ pois se $\mathcal{A}(u_1) = \mathcal{A}(u_2)$, então tomando $v = u_2 - u_1$, vemos que:

$$a(u_1 - u_2, v) = (\mathcal{A}(u_1 - u_2) \mid v) = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Ora, neste caso $\sup\limits_{v \neq 0} \dfrac{a(u_1 - u_2, v)}{\| v \|} = 0$, o que contradiz $(\mathcal{C}_1)$ se $u_1 \neq u_2$.

<u>A condição é necessária</u>:

Aqui, em benefício da simplicidade; só provaremos a necessidade de $(\mathcal{C}_1)$ - $(\mathcal{C}_2)$ no caso em que a é simétrica, bastando neste caso provar $(\mathcal{C}_1)$. O caso em que a é qualquer pode ser tratado de forma inteiramente análoga, e usando o operador adjunto de $\mathcal{A}$ (*)

Se $(\mathcal{P})$ tem solução única, então como na primeira parte da demonstração temos que

$$\forall f \in \mathcal{V} \qquad \exists u \in \mathcal{V} \text{ único tal que } \qquad \mathcal{A}(u) = f$$

Logo $\dfrac{a(f, u)}{\| u \|} = \dfrac{(\mathcal{A}(u) \mid f)}{\| u \|} = \dfrac{\| f \|^2}{\| u \|}$

Além disso, como $\mathcal{A}$ é contínuo e bijetivo, pelo Teorema 1, $\exists M' > 0$ tal que

(*) A definição de adjunto é relembrada no fim do capítulo seguinte (Lema 1).

$$\| f \| = \| \mathcal{A}(u) \| \geq M' \, \| u \| .$$

Por conseguinte $\forall f \in \mathcal{V}$ $\exists u \in \mathcal{V}$ tal que

$$\sup_{v \neq \vec{0}} \frac{a(f,v)}{\| v \|} \geq \frac{a(f,u)}{\| u \|} \geq \frac{\| f \|^2}{M' \| f \|} = \frac{1}{M'} \| f \| ,$$ ou seja

($\mathcal{C}_1$) se aplica com $\gamma_1 = 1/M'$. c.q.d. □

<u>OBSERVAÇÃO 3</u>: A última passagem da demonstração acima não implica que a é coerciva. No entanto, se a é coerciva, temos $\forall v \in \mathcal{V}$

$$\sup_{u \neq \vec{0}} \frac{a(u,v)}{\| u \|} \quad \text{e} \quad \sup_{u \neq \vec{0}} \frac{a(v,u)}{\| u \|},$$ são minorados por

$$\frac{a(v,v)}{\| v \|} \geq \alpha \, \| v \| ,$$ isto é, a verifica ($\mathcal{C}_1$)-($\mathcal{C}_2$) com $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha$. Por essa razão as condições *inf-sup* ($\mathcal{C}_1$)-($\mathcal{C}_2$) são chamadas de <u>coercividade fraca</u>. □

IV - <u>A CONDIÇÃO LBB</u>

Voltemos agora ao caso do problema ($\mathcal{M}$). Inicialmente observamos que ele nada mais é do que um caso particular do problema ($\mathcal{P}$), onde $\mathcal{V} = V \times Q$, sendo o produto interno $(.\,|\,.)$ e a norma $\| . \|$ dados por:

$$((u,p) \mid (v,q)) = (u \mid v)_V + (p \mid q)_Q \quad \text{e}$$

$$\| (v,q) \| = ((v,q) \mid (v,q))^{1/2} = [\, \| v \|_V^2 + \| q \|_Q^2 \,]^{1/2}$$

Façamos as hipóteses habituais seguintes:

(*H 1*) V e Q são espaços de Hilbert respectivamente com produtos internos. $(.|.)_V$ e $(.|.)_Q$ e normas $\|.\|_V$ e $\|.\|_Q$ respectivamente.

Com isso $V\times Q$ será também um espaço de Hilbert com a norma $\|.\|$. Definindo

$$\mathcal{A}(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \mathcal{A}((u,p),(v,q)) = a(u,v) + b(p,v) + b(q,u)$$

e $\mathcal{L}(\mathcal{V}) = \mathcal{L}((v|q)) = L(v) + G(q)$

as propriedades de linearidade e continuidade de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{L}$ são decorrências imediatas das hipóteses seguintes:

(*H2*) $L\in V^*$, isto é, $\exists E>0$, tal que $L(v)\leq E\ \|v\|_V \quad \forall v\in V$

(*H3*) $G\in Q^*$, isto é, $\exists D>0$ tal que $G(q)\leq D\ \|q\|_Q \quad \forall q\in Q$.

(*H4*) $\underline{a}$ é contínua, isto é, $\exists A>0$ tal que $a(u,v)\leq A\ \|u\|_V\ \|v\|_V \forall u,v\in \mathcal{V}$.

(*H5*) $\underline{b}$ é contínua, isto é, $\exists B>0$ tal que $b(q,v)\leq B\|v\|_V\ \|q\|_Q \quad \forall v\in V, \forall q\in Q$.

Daí se conclui que $\mathcal{L}(\mathcal{V}) \leq C\ \|\mathcal{V}\| \quad \forall \mathcal{V}\in\mathcal{V}$, isto é, $\mathcal{L}\in \mathcal{V}^*$, e que $\mathcal{A}(\mathcal{U},\mathcal{V}) \leq M\ \|\mathcal{U}\|\ \|\mathcal{V}\| \quad \forall \mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{V}$, com $M=max(A,B)$ e $C = \sqrt{D^2+E^2}$.

Estamos então no quadro funcional do Teorema 2. Portanto, se $\mathcal{A}$ satisfaz a condição *inf-sup* $(\mathcal{C}_1)$-$(\mathcal{C}_2)$, o problema $(\mathcal{M})$ tem solução única. Ora, neste caso observamos inicialmente que $\mathcal{A}$ é simétrica se <u>a é simétrica, caso que suporemos daqui em diante</u> (p.ex., problemas (P_1), (P_2) e (P_3)).

Então a condição *inf-sup* se escreve:

$$\exists\gamma>0 \ /\ \forall (u,p)\in V\times Q \qquad \sup_{(v,q)\neq\vec{0}} \frac{a(u,v)+b(q,u)+b(p,v)}{(\|v\|_V^2+\|q\|_Q^2)^{1/2}} \geq \gamma(\|u\|_V^2+\|p\|_Q^2)^{1/2}$$

Escolhendo-se $u=\vec{0}$ e $p\neq\vec{0}$ qualquer, vemos que é uma condição necessária para a boa colocação de $(\mathcal{M})$, que a forma $\underline{b}$ satisfaça a condição *inf-sup* seguinte, dita condição LBB:

$$(\mathcal{D})\quad \exists\beta>0 \text{ tal que } \inf_{q\neq\vec{0}}\ \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{b(q,v)}{\|v\|_V\|q\|_Q} \geq \beta$$

Examinemos agora que implicações para a forma $\underline{a}$ tem a condição *inf-sup* sobre $\mathcal{a}$. Para tanto introduzimos o subespaço U de V dado por

$$U=\{v/\ v\in V\quad ,\quad b(q,v)=0\quad \forall q\in Q\}.$$

Suponhamos que $G=\theta$, e que se deseje resolver o problema $(\mathcal{M})$ com $L=L'$, onde L' é o elemento de U^* associado à projeção ortogonal sobre U do único elemento $f\in V$ que, pelo Teorema de Riesz, satisfaz $L(v)=(f|v)\quad \forall v\in V$.

Claramente também neste caso $(\mathcal{M})$ tem solução única onde u resolve:

$$(\mathcal{M}')\quad \begin{cases} \text{Encontrar } u\in U & \text{tal que} \\ a(u,v) = L'(v) & \forall v\in U \end{cases}$$

uma vez que $b(p,v)=0\quad \forall v\in U$.

Observe que U é um fechado por ser $\underline{b}$ contínua, e logo é também um espaço de Hilbert. Por conseguinte, o problema $(\mathcal{M}')$ tem solução para qualquer $L'\in U^*$ posto que, novamente pelo Teorema de Riesz, U^* pode ser visto como o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos pelas projeções ortogonais sobre dos elementos de V, vale dizer, o próprio U.

Admitindo-se temporariamente a unicidade da solução de $(\mathcal{M}')\ \forall L'\in U^*$, então, pelo Teorema 2, $\underline{a}$ é fracamente coerciva sobre U, ou seja, satisfaz:

$(\mathcal{C})$ $\exists \gamma > 0$ tal que $\inf\limits_{\substack{u \in U \\ u \neq \vec{0}}} \sup\limits_{\substack{v \in U \\ v \neq \vec{0}}} \dfrac{a(u,v)}{\|u\|_V \|v\|_V} \geq \gamma$

Na realidade, a condição LBB, juntamente com a coercividade fraca de a sobre o espaço U , são condições necessárias e suficientes para a existência e a unicidade de (u,p) solução de $(\mathcal{M})$.

Antes de provar esta afirmativa, vamos recapitular um resultado de Análise Funcional:

<u>Lema 1</u>: Sejam X e Y dois espaços de Hilbert com produtos internos e normas $(.|.)_X$ e $\| \|_X$, e $(.|.)_Y$ e $\| \|$, respectivamente. Seja ainda A um operador linear contínuo de X em Y , e A^* seu adjunto, isto é, o operador linear contínuo de Y em dado por

$$(A(x)|y)_Y = (x|A^*(y))_X \qquad \forall x \in X \text{ e } \forall y \in Y$$

Então o fecho da imagem (A^*) de A^* é igual ao ortogonal de $\mathcal{N}(A)$, o espaço nulo de A.

<u>Demonstração</u>: $\mathcal{R}(A^*)$ é o subespaço de X gerado pelos vetores da forma $A^*(y)$, com $y \in Y$.

Se $x \in [\mathcal{R}(A^*)]^{\perp}$ então $(x|A^*(y))_X = 0$ $\forall y \in Y$, ou seja $(A(x)|y) = 0$ $\forall y \in Y$, o que implica que $A(x) = \vec{0}$, ou ainda que $x \in \mathcal{N}(A)$. Logo $[\mathcal{R}(A^*)]^{\perp} \subset \mathcal{N}(A)$

Por outro lado, se $x \in \mathcal{N}(A)$ então $A(x) = \vec{0}$, donde $(A(x)|y) = 0$ $\forall y \in Y$, ou ainda $(x|A^*(y)) = 0$ $\forall y \in Y$,i.e. $x \in [\mathcal{R}(A^*)]^{\perp}$

Logo temos também $[\mathcal{R}(A^*)]^{\perp} \supset \mathcal{N}(A)$, o que prova que $[\mathcal{R}(A^*)]^{\perp} = \mathcal{N}(A)$, e enfim que $[\mathcal{R}(A^*)]^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{R}(A^*)} = [\mathcal{N}(A)]^{\perp}$, de acordo com resultados clássicos (ver p.ex. [9]) c.q.d. □

Podemos agora provar o Teorema Fundamental de Existência e Unicidade de solução do problema misto $(\mathcal{M})$:

<u>Teorema 3</u>: Sob as hipóteses $(H1)$,$(H2)$,$(H3)$,$(H4)$ e $(H5)$, o problema $(\mathcal{M})$ tem solução única se e somente se $\underline{a}$, forma bilinear simétrica sobre $V \times V$, é fracamente coerciva sobre U, e $\underline{b}$, forma bilinear sobre $Q \times V$, satisfaz a condição LBB.

<u>Demonstração</u>: A necessidade da condição *inf-sup* já foi estabelecida e a da coercividade fraca de $\underline{a}$, de acordo com o argumento que precedeu o Lema 1, será conseqüência da unicidade da solução de $(\mathcal{M}')$. Essa unicidade ficará estabelecida com a prova abaixo de que ambas representam uma condição suficiente, para a existência e unicidade da solução de $(\mathcal{M})$, senão vejamos:

Seja o problema variacional seguinte:

$$\begin{cases} \text{Encontrar} \quad u \in U^G \quad \text{tal que} \\ a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in U \end{cases}$$

onde U^G é a variedade linear de U dada por

$$U^G = \{v / v \in V,\ b(q,v) = G(q) \quad \forall q \in Q\}$$

Como $\underline{a}$ é fracamente coerciva, pelo Teorema 2, $(\mathcal{P}')$ tem solução única. Vejamos agora que sob a hipótese $(\mathcal{D})$ resolver $(\mathcal{P}')$ implica em resolver $(\mathcal{M})$.

Como no Teorema 2, introduzimos o operador $A: V \to V$ dados por:

$$a(u,v) = (A(u)|v)_V \quad \forall v\in V, \quad u\in V.$$

O problema $(\mathcal{P}')$ se escreve então:

$(A(u)|v)_V = (f|v)_V \quad \forall v\in U$, onde $f\in V$ associado a L é dado pelo Teorema de Riesz. Isto quer dizer que $f - A(u)\in U^{\perp}$.

Seja agora B o operador linear contínuo de V em Q, dado por:

$$b(v,q) = (B(v)|q)_Q \quad \forall v\in V \text{ e } \forall q\in Q.$$

Na realidade $U = \mathcal{N}(B)$ e portanto, aplicando o Lema 1, temos

$$U^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(B^*)}$$

Provemos que $\mathcal{R}(B^*)$ é um fechado.

Seja $\{v_n\} \subset \mathcal{R}(B^*)$, isto é, $\exists\ \{q_n\}\subset Q$ tal que $B^*(q_n)=v_n$, sequência convergente a $v\in V$. Procedendo como no Teorema 2, vemos que $\forall m,n$

$$0\leq\beta\| q_n-q_m\|_Q \leq \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{(q_n-q_m|B(v))_Q}{\|v\|_V} = \sup_{v\neq\vec{0}} \frac{(B^*(q_n)-B^*(q_m)|v)_V}{\|v\|_V}$$

ou equivalentemente:

$$(1) \qquad 0\leq\beta\| q_n-q_m\|_Q \leq \| B^*(q_n)-B^*(q_m)\|_V$$

Como $\{B^*(q_n)\}$ é seqüência de Cauchy de V ,então $\{q_n\}$ é sequência de Cauchy de Q, e portanto $\exists q\in Q$ tal que $q_n\to q$. Como B^* é contínuo, $v_n= B^*(q_n) \to B^*(q)$, e por conseguinte o limite v de $\{v_n\}$ pertence a $\mathcal{R}(B^*)$, que é então um fechado.

Isto implica na existência de $p\in Q$ tal que

$$(2) \qquad f - A(u) = B^*(p).$$

Tal p é único pois a própria relação (1) indica que se $B^*(q_1) = B^*(q_2)$, necessariamente $q_1=q_2$, isto é, B^* é injetivo.

Agora, multiplicando escalamente a equação (2) por $v \in V$, obtemos:

$$a(u,v)+b(p,v)=L(v) \quad \forall v \in V,$$

o que conjuntamente com a relação $b(q,u)=G(q) \quad \forall q \in Q$, prova que $(\mathcal{P}')$ implica em $(\mathcal{M})$, caso $\underline{b}$ satisfaça a condição LBB. Por outro lado, tomando $v \in U$ em $(\mathcal{M})$, vemos que $(\mathcal{M})$ também implica em $(\mathcal{P}')$, o que prova a equivalência desses dois problemas se $(\mathcal{D})$ se verifica. Enfim, dos argumentos acima relativos a $\underline{u}$ e $\underline{p}$, essa mesma equivalência prova que sob as hipóteses $(\mathcal{C})$ e $(\mathcal{D})$ existe e é única a solução de $(\mathcal{M})$.

Finalmente, vemos que a solução de $(\mathcal{M}')$, caso particular de $(\mathcal{P}')$ para $G = \mathcal{O}$ e $L' \in U^*$, é única pois caso contrário existiriam dois pares (u,p) distintos que resolvem $(\mathcal{M})$ nesse caso particular, o que é um absurdo, e isto completa a demonstração. c.q.d. □

V - ALGUNS EXEMPLOS

Apliquemos agora a Análise da seção precedente a alguns casos particulares.

Exemplo 1: Consideremos o problema (P_1).

Definimos o produto interno de V_1 por

$$(\vec{u}|\vec{v})_V = \int_\Omega \vec{u}\circ\vec{v}\, d\vec{x} + \int_\Omega div\, \vec{u}\; div\, \vec{v}\, d\vec{x}.$$

O espaço V_1 é então normado por

$$\|\vec{v}\|_V = \left[\int_\Omega |\vec{v}|^2\, d\vec{x} + \int_\Omega |div\, \vec{v}|^2\, d\vec{x} \right]^{1/2},$$

Sendo a norma de Q_1 a norma canônica de $L^2(\Omega)$, isto é:

$$\|q\|_Q = \left[\int_\Omega |q|^2 \, d\vec{x} \right]^{1/2}$$

Pode-se provar sem dificuldades que com a norma acima V_1 é um espaço de Hilbert, sabendo-se naturalmente que $L^2(\Omega)$ o é.

A continuidade de $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{L}$ e $\underline{G}$ sendo trivialmente verificada, a boa colocação de (P_1) será garantida se estabelecermos que $\exists \alpha, \beta > 0$ tais que:

$a(\vec{u},\vec{u}) \geq \alpha \|\vec{u}\|_V^2 \quad \forall \vec{u} \in U_1$, onde $U_1 = \{\vec{v} \,/\, \vec{v} \in V_1,\ div\ \vec{v} = 0\}$

isto é, a coercividade (e logo a coersividade fraca) de $\underline{a}$ sobre U_1 e que $\underline{b}$ satisfaz a condição LBB:

$$\inf_{\substack{q \in Q_1 \\ q \neq 0}} \ \sup_{\substack{\vec{v} \in V_1 \\ \vec{v} \neq 0}} \frac{\int_\Omega q \ div\ \vec{v}\ d\vec{x}}{\|\vec{v}\|_V \ \|q\|_Q} \geq \beta \ .$$

A coercividade de $\underline{a}$ sobre U_1 é trivialmente verificada neste exemplo pois $a(\vec{v},\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{v})_V \quad \forall \vec{v} \in U_1$.

A condição LBB por sua vez pode ser provada com os seguintes argumentos:

Seja $q \in L^2(\Omega)$. Definimos o seguinte problema $(\mathcal{E})$ auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta\phi = q & \text{em } \Omega \\ \phi = 0 & \text{dobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Fazendo $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$, temos $div\ \vec{v} = \Delta\phi = q$. Logo tem-se

$$\frac{\int_\Omega q\ div\ \vec{v}\ d\vec{x}}{\|\vec{v}\|_V} = \frac{\|q\|_Q^2}{\left[\int_\Omega |\vec{\nabla}\phi|^2\ d\vec{x} + \|q\|_Q^2\right]^{1/2}}$$

Porém $\int_\Omega \Delta\phi\phi d\vec{x} = \int_\Omega q\phi d\vec{x}$, donde, usando a fórmula de Green:

$$\int_\Omega |\vec{\nabla}\phi|^2 d\vec{x} = \int_\Omega q\phi d\vec{x}, \text{ ou ainda } \int_\Omega |\vec{\nabla}\phi|^2 d\vec{x} \leq \|q\|_Q \left[\int_\Omega |\phi|^2 d\vec{x}\right]^{1/2}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Poincaré, $\exists C>0$ tal que:

$$\int_\Omega \phi^2 d\vec{x} \leq C^2 \int_\Omega |\vec{\nabla}\phi|^2 d\vec{x}\text{ , donde concluimos que}$$

$$\int_\Omega |\vec{\nabla}\phi|^2\ d\vec{x} \leq C^2\|q\|_Q^2$$

Desse resultado, deduzimos que

$$\frac{\int_\Omega q\ div\ \vec{v}\ d\vec{x}}{\|\vec{v}\|_V} \geq \frac{\|q\|_Q^2}{(C^2+1)^{1/2}\|q\|_Q} = \frac{\|q\|_Q}{\sqrt{1+C^2}}$$

Em resumo, provamos a condição LBB com $\beta^{-1}=\sqrt{1+C^2}$, donde se conclui que (P_1) admite solução única $(\vec{u},p)$, $\vec{u}\in H(div,\Omega), p\in L^2(\Omega)$.

<u>Exemplo 2</u>: Consideremos o problema (P_2).

Aqui V_2 será normado pela norma induzida por $[L^2(\Omega)]^n$ e Q_2 da seguinte forma:

$$\|\mu\|_Q = \inf_{\substack{q\in H_0^1(\Omega)\\ q/_\Gamma = \mu}} \|\vec{\nabla} q\|_V$$

Pode-se provar que V_2 é um espaço completo usando a Teoria das Distribuições [16] para definir $div\ v$ para $v \in V_2$, sobre cada K_i, $i=1,2,\ldots,N$. Por outro lado o espaço Q_2 é completo numa norma equivalente à norma acima, sendo a primeira associada ao produto interno canônico do espaço de traços de funções da $H^1(\Omega)$ sobre variedades de Ω de dimensão $n-1$ (*) (curvas se $n=2$, superfícies se $n=3$, etc.). Isto permite aplicar os resultados do Capítulo anterior sem modificações essenciais.

Sendo a coercividade (fraca) de $\underline{a}$ trivialmente verificado sobre V_2, logo sobre U_2, onde

$$U_2 = \{\vec{v} / \vec{v} \in V_2,\quad b(\mu,\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in Q_2\},$$

resta-nos verificar que $\underline{b}$ satisfaz a condição LBB.

Para prová-lo observamos inicialmente que

$$\|\mu\|_Q^2 = \inf_{\substack{q \in H_0^1(\Omega) \\ q/_\Gamma = \mu}} \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i} |\vec{\nabla} q|^2 \, d\vec{x}$$

Como a função $q \in L^2(\Omega)$ tal que $q/_{K_i} = q_i$ pertence a $H_0^1(\Omega)$ se $q_i/_{\partial K_i} = \mu$, $q_i \in H^1(K_i)$, $i=1,2,\ldots,N$, em virtude do Teorema dos Traços [1], concluimos que:

$$\|\mu\|_Q^2 = \sum_{i=1}^{N} \inf_{\substack{q_i \in H^1(K_i) \\ q_i/_{\partial K_i} = \mu}} \int_{K_i} |\vec{\nabla} q_i|^2 \, d\vec{x}$$

(*) Se Γ é essa variedade tal espaço é denotado por $H^{1/2}(\Gamma)$.

Em seguida verificamos que cada ínfimo acima é atingido precisamente pela função $q_i \in H_0^1(K_i)$ que satisfaz:

(3) $\Delta q_i = 0$ em K_i

e

(4) $q_i = \mu_i$ sobre ∂K_i, sendo μ_i a restrição de μ a ∂K_i ,

De fato, o problema de achar $q_i \in H^1(K_i)$ com $q_{i/\partial K_i} = \mu_i$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_{K_i} |\vec{\nabla} q_i|^2 \, d\vec{x} \leq \frac{1}{2}\int_{K_i} |\vec{\nabla} r|^2 \, d\vec{x} \qquad \forall r \;/ r \in H^1(K_i),\; r_{/\partial K_i} = \mu_i$$

admite solução única (ver p.ex. [12]) que é a do problema variacional:

$\int_{K_i} \vec{\nabla} q_i \circ \vec{\nabla} r \, d\vec{x} = 0 \quad \forall r \in H_0^1(K_i)$, ou ainda, aplicando a fórmula de Green, a solução de (3) - (4).

Agora, dado $\mu \in Q_2$ escolhemos $\vec{v} \in V_2$ como sendo o gradiente da função $q \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz:

$$\Delta q = 0 \quad \text{em } K_i$$

$$q_{/\partial K_i} = \mu \text{ sobre } \partial K_i \qquad \forall i,\; i=1,2,\ldots,N.$$

Temos
$$\frac{b(\mu,\vec{v})}{\|\vec{v}\|_V} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \int_{\partial K_i} \mu(\vec{v}\circ\vec{n}_i)\, ds}{\left[\int_\Omega |\vec{\nabla} q|^2 d\vec{x}\right]^{1/2}}$$

Porém:

$$\int_\Omega |\vec{\nabla} q|^2 \, d\vec{x} = \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i} |\vec{\nabla} q|^2 \, d\vec{x} = \sum_{i=1}^{N} \left[-\int_{K_i} \Delta q \; q d\vec{x} + \int_{\partial K_i} (\vec{\nabla} q \circ \vec{n}_i) q \, ds \right]$$

ou seja:

$$\int_\Omega |\vec{\nabla} q|^2 \; d\vec{x} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial K_i} \mu(\vec{v}\circ n_i)\; ds$$

Como também

$$\int_\Omega |\vec{\nabla} q|^2 \; d\vec{x} = \|\mu\|_Q^2 \text{ , vemos que}$$

$$\frac{b(\mu,\vec{v})}{\|\vec{v}\|_v} \geq \|\mu\|_Q \quad \text{, ou seja vale } (\mathcal{D}) \text{ com } \beta=1 .$$

Assim está garantida a existência e a unicidade da solução de (P_2).

<u>Exemplo 3</u>: Consideremos enfim o problema (P_2)

V_3 será normado por

$$\|\vec{v}\|_v = \int_\Omega |\vec{\nabla}\vec{v}|^2 \; d\vec{x} \quad {}^{1/2}$$

norma está oriunda do produto interno

$$(\vec{u}|\vec{v})_V = \int_\Omega \vec{\nabla}\vec{u} \circ \vec{\nabla}\vec{v} \; d\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \vec{\nabla} u_i \circ \vec{\nabla} v_i \, d\vec{x}$$

Sabe-se que $V_3=[H_0^1(\Omega)]^n$ é um espaço de Hilbert com essa norma.

$Q_3 = L_0^2(\Omega)$ por sua vez é normado com a norma induzida por $L^2(\Omega)$. Como Q_3 é um fechado de $L^2(\Omega)$, é um espaço de Hilbert igualmente.

Lembrando que $a(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u}|\vec{v})_V \;\; \forall \vec{u},\vec{v} \in V_3$, a coercividade de $\underline{a}$ sobre V_3 é automaticamente satisfeita, e por conseguinte sobre U_3.

$$U_3 = \{\vec{v} \,/ \vec{v}\in V_3, \;\; b(q,\vec{v}) \overset{def}{=} (q|div\;\vec{v})_Q = 0 \quad \forall q \in Q_3\}$$

Observe que U_3 é o subespaço dos campos de $[H_0^1(\Omega)]^n$ solenoidais, isto é, de divergência nula. De fato, se $\vec{v} \in V_3$, tem-se que:

$\int_\Omega div\ \vec{v}\ d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \circ \vec{n}\ dx = 0$, sendo $\vec{n}$ vetor unitário normal externa a $\partial\Omega$.

Portanto $(q|div\ \vec{v})_Q = 0 \quad \forall q \in Q_3 \Rightarrow div\ \vec{v} = 0$.

Agora, para garantirmos a existência e a unicidade do par velocidade pressão $(\vec{u},p) \in V_3 \times Q_3$ que resolve (P_3), basta provar a condição LBB, o que neste caso equivale a provar que $\exists \beta > 0$ tal que dado $q \in L_0^2(\Omega)$ $\exists v \in V_3$ para o qual

$$\int_\Omega div\ \vec{v}\ d\vec{x} \ /\ \|\vec{v}\|_V \geq \beta\ \|q\|_Q$$

Ora, se provarmos que $\exists\ \vec{v} \in V_3$ que satisfaz para $C>0$ independente de q

(5) $\quad div\ \vec{v} = q$

(6) $\quad \|\vec{v}\|_V \leq C\ \|q\|_Q$, então temos a condição LBB com $\beta = C^{-1}$.

Provar a existência de tal $\vec{v} \in V_3$ equivale a provar que o operador divergência é sobrejetivo de $[H_0^1(\Omega)]^n$ em $L_0^2(\Omega)$, de acordo com os seguintes argumentos:

Em primeiro lugar <u>div</u> é contínuo de $[H_0^1(\Omega)]^n$ em $L_0^2(\Omega)$ pois:

$$\|div\ \vec{v}\|_Q^2 = \int_\Omega \left(\sum_{i=1} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 d\vec{x} \leq n \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2\right] d\vec{x} \leq n\ \|\vec{v}\|_V^2$$

Assim se este mesmo operador é sobrejetivo, então ele é uma bijeção de $U_3^{\perp}$ em Q_3. Por conseguinte, pelo Teorema 1 $\exists C>0$ tal que

$$\|\vec{v}\|_V \leq C \ \|div\ \vec{v}\|_Q \qquad \forall\ \vec{v}\in U_3^{\perp} \ ,$$

Em resumo, se $\underline{div}$ é sobrejetivo de V_3 em Q_3, dado $q\in Q_3$, $\exists\vec{v}\in V_3$ (ou mais especificamente $\vec{v}\in U_3^{\perp}$) tal que (5)-(6) se apli - cam, como desejado.

Vamos provar a sobrejetividade do operador divergência no caso particular $n=2$, no intuito de simplificar a apresentação. Para o caso n qualquer nos referimos a [14]. Suporemos ainda que Ω é suficientemente regular para que a solução da equação de Poisson ($\mathcal{E}$) pertença ao espaço

$$H^2(\Omega) = \{p/p\in H^1(\Omega),\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}\ ,\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_1\partial x_2},\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\in L^2(\Omega)\}.$$

Isto ocorrerá, por exemplo, se Ω for um polígono convexo [8] .

Seja então $q\in L_0^2(\Omega)$ dado. Vamos construir um campo $\vec{v}\in[H_0^1(\Omega)]^2$ tal que $div\ \vec{v} = q$, sendo $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, onde $\vec{v}_1=\vec{\nabla}\phi_1$ e $\vec{v}_2 = \vec{rot}\ \phi_2$. Por sua vez, ϕ_1 e ϕ_2 são funções que satisfazem respectivamente as seguintes condições:

Inicialmente ϕ_1 é a solução da seguinte equação de Poisson:

$$\Delta\phi_1 = q \quad \text{em} \quad \Omega$$

$$\phi_1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

De acordo com a hipótese de regularidade de Ω temos $\vec{\nabla}\phi_1\in[H^1(\Omega)]^2$ e além disso $div\ v_1 = \Delta\phi_1=q$.

Seja agora $\vec{g}$ o traço de $\vec{v}_1$ sobre $\partial\Omega$ isto é: $\vec{g}=\vec{\nabla}\phi_1{}_{/\partial\Omega}$. Associamos a $\vec{g}$ duas funções g_0 e g_1 que pertencem respectivamente aos espaços dos traços de funções de $H^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ (*) (para Ω suficiente regular) por:

$$g_0(s) = \int_0 \vec{g}(\sigma)\circ n(\sigma)\, d\sigma \qquad 0\leq s\leq \ell, \quad \ell=\text{comprimento } (\partial\Omega)$$

$$g_1(s) = -\vec{g}(s)\circ\sigma(s)$$

onde $\vec{n} = (n_1,n_2)$ é o vetor unitário normal externo a $\partial\Omega$ e $\vec{\sigma}$ é o vetor unitário tangente a $\partial\Omega$ dado por $\vec{\sigma} = (-n_2,n_1)$.

Usamos agora o Teorema dos Traços (ver p.ex.) [1] que garante que dadas duas funções g_0 e g_1 definimos sobre $\partial\Omega$, pertencentes respectivamente aos espaços de traços de funções de $H^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, existe ϕ_2 e $H^2(\Omega)$ tal que $\phi_2=g_0$ e $\partial\phi_2/\partial n=\vec{\nabla}\phi_2\circ\vec{n}=g_1$ temos:

$$\vec{\nabla}\phi_2\circ\vec{n} = -\vec{g}\circ\vec{\sigma}$$
$$\vec{\nabla}\phi_2\circ\vec{\sigma} = \vec{g}\circ\vec{n}$$

Como $\vec{v}_2 = \left(-\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\right)$ vem:

$\vec{v}_2\circ\vec{n} = -\vec{\nabla}\phi_2\circ\vec{\sigma}$ e $\vec{v}_2\circ\vec{s} = \vec{\nabla}\phi_2\circ\vec{n}$, o que prova que $\vec{v}_2=\vec{g}$ sobre $\partial\Omega$. Por conseguinte $\vec{v}\in[H_0^1(\Omega)]^2$ e

---

(*) Tais espaços são respectivamente denotados por $H^{3/2}(\partial\Omega)$ e $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Uma definição mais usual, juntamente com um estudo detalhado desses espaços pode ser encontrada em [1].

$$div\ \vec{v} = div\ \vec{v}_1 + div\ \vec{v}_2 = q + div(\vec{rot}\ \phi_2) = q\ ,$$

e está provada a existência e a unicidade da solução do problema de Stokes (P_3).

VI - RELAÇÕES COM PROBLEMAS DE PONTO-SELA.

Os métodos mistos têm uma íntima relação com os problemas de ponto-sela, isto é, os problemas em que se deseja determinar um par (u,p) de um espaço produto $V\times Q$, de tal maneira que dado um funcional $\mathcal{L}: V\times Q \to \mathbb{R}$ tenhamos

$$(\mathcal{S}) \qquad \mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p) \qquad \forall v\in V \text{ e } \forall q\in Q.$$

O par é dito um ponto-sela de $\mathcal{L}$ ou ainda um ponto de min-max, uma vez que minimiza $\mathcal{L}(v,p)$ com relação a $\underline{v}$ para $\underline{p}$ fixo, e maximiza $\mathcal{L}(u,q)$ com relação a q para $\underline{u}$ fixo.

Claramente a existência e a unicidade do ponto-sela depende de certas hipóteses sobre o funcional $\mathcal{L}$

Consideraremos nestas notas uma forma particular de $\mathcal{L}$ diretamente relacionada com o problema $(\mathcal{M})$

Fazendo ainda a hipótese $(H1)$ sobre V e Q, suporemos que:

$$(H\ 6) \qquad \mathcal{L}(v,q) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) + b(q,v) - G(q)\ ,$$

onde $a: V\times V \to \mathbb{R}$, $b: Q\times V \to \mathbb{R}$, $L: V \to \mathbb{R}$ e $G: Q \to \mathbb{R}$ são formas bilineares e lineares que satisfazem as hipóteses $(H2)$-$(H3)$-$(H4)$ $(H5)$, sendo <u>a simétrica</u>.

Se além disso supomos temporariamente que $\underline{a}$ é coerciva sobre V, pode-se deduzir de resultados clássicos que (ver p.ex [12]) para todo $q \in Q$, $\mathcal{L}(v,q)$ admite um mínimo sobre V . Seja $u_q \in V$ o elemento minimizante que é único nesse caso, isto é:

$$\mathcal{L}(u_q,q) \leq \mathcal{L}(v,q) \qquad \forall v \in V$$

Por outro lado, se admitirmos que $\exists p_v \in Q$ único, tal que para dado $v \in V$

$$\mathcal{L}(v,q) \leq \mathcal{L}(v,p_v) \qquad \forall q \in Q,$$

então o par (u,p), onde $u=u_p$, e $p=p_u$, será o ponto-sela de $\mathcal{L}$.

Na realidade tal (u_p,p_u) existe e é único se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ satisfazem as condições ($\mathcal{C}$) e ($\mathcal{D}$) respectivamente, de acordo com os seguintes argumentos:

1º) Se $\exists(u,p)$ ponto-sela de $\mathcal{L}(v,p)$, então u resolve o problema variacional (ver p.ex. [12]):

Encontrar $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = L(v)-b(p,v) \qquad \forall v \in V$$

Por outro lado, p resolve o problema

$$b(q,u)-G(q) \leq b(p,u)-G(p) \qquad \forall q \in Q,$$

ou seja, tornando o simétrico $-q$ de q, $\forall q \in Q$,

$$b(q,u) = G(q) \qquad \forall q \in Q$$

Em outras palavras (u,p) seria necessariamente a solução de ($\mathcal{M}$), e por conseguinte único pelo Teorema 3, sob as hipóteses ($\mathcal{C}$) e ($\mathcal{D}$).

2º) Inversamente, se (u,p) é a solução única de $(\mathcal{M})$, então u minimiza $\mathcal{L}(v,p) = \frac{1}{2}a(v,v) + F(v)$ sobre , onde a forma linear $F:V \to \mathbb{R}$ para $p \in Q$ fixo, é dada por $F(v)=b(v,p)-L(v)$.

De fato: $F(v) \leq (B \; \|p\|_Q + E \;) \; \|v\|_V \qquad \forall v \in V.$

Em outras palavras, temos $\mathcal{L}(u,p) \leq \mathcal{L}(v,p) \quad \forall v \in V.$

Por outro lado temos:

$$b(u,q)-G(q)=b(u,p)-G(p)=0 \qquad \forall q \in Q$$

ou ainda, somando $\frac{1}{2}a(u,u)-L(u)$ a ambos os membros:

$$\mathcal{L}(u,q) \leq \mathcal{L}(u,p) \qquad \forall q \in Q.$$

Logo (u,p) é ponto-sela de .

Em suma, se $\mathcal{L}$ satisfaz $(H6)$ e $\underline{a}$ é coerciva sobre V , a equivalência dos problemas $(\mathcal{M})$ e $(\mathcal{S})$ que acabamos de provar, demonstra que a condição necessária e suficiente para a existência e a unicidade do ponto-sela de $\mathcal{L}$, é que $\underline{b}$ satisfaça a condição LBB.

Em problemas mistos, a segunda variável do par (u,p) é frequentemente interpretada como um <u>multiplicador de lagrange da restrição sobre a primeira variável</u> que representa a condição $u \in U^G$ a variedade linear de U definida por

$$U^G := \{ \; v \; / \; v \in V \quad e \quad b(q,v)=G(q), \quad \forall q \in Q \; \}$$

Na realidade, sob esta ótica, considera-se que o problema a resolver é o de minimizar a energia.

$$E(v)= \frac{1}{2} \; a(v,v)-L(v) \qquad \text{sobre } U^G \; ,$$

problema este que, como se sabe (ver p. ex. [12]), implica em encontrar $u \in U^G$ tal que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in U$$

Ora, em lugar de se trabalhar com um espaço com restrições muitas vezes difíceis de se tratar na prática, relaxamos a condição $v \in U$ e $u \in \overset{G}{U}$, aumentando a energia $E(v)$ em $\mathcal{L}(v,q)$, com o auxílio do multiplicador de Lagrange associado à restrição que caracteriza $\overset{G}{U}$. Assim, podemos procurar u em V, embora não mais minimizando E, mas sim como primeira variável do par que dá o min-max de $\mathcal{L}(v,q)$ sobre $V \times Q$.

Claramente, assim procedendo, temos $E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in \overset{G}{U}$, uma vez que, da condição de máximo de $\mathcal{L}(u,p)$ vem $u \in \overset{G}{U}$, como vimos, e ainda que

$$\mathcal{L}(u,p) = \frac{1}{2} a(u,u) - L(u).$$

Em seguida, da condição de mínimo, deduzimos que

$$\frac{1}{2} a(u,u) - L(u) = \mathcal{L}(u,p) \leq \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \qquad \forall v \in \overset{G}{U}$$

dado que $b(p,v) - G(p) = 0$ se $v \in \overset{G}{U}$.

No quadro funcional acima, o caso da equação de Poisson ($\mathcal{E}$) na formulação (P_1) é significativo: Temos que procurar o mínimo de

$$E(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\vec{v}| \, dx$$

sobre o conjunto $\overset{G}{U} = \{\vec{v} \;/\; \vec{v} \in V_1 \text{ e } \int_\Omega q \, div\, \vec{v} \, d\vec{x} = \int_\Omega fq d\vec{x} \quad \forall q \in Q_1\}$

Nosso funcional $\mathcal{L}$ é dado por

$$\mathcal{L}_1(\vec{v},q) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\vec{v}|^2 \, d\vec{x} + \int_\Omega (div\, \vec{v} - f) \, q \, d\vec{x}$$

e, por conseguinte, $(\vec{u},p) \in V_1 \times Q_1$ satisfaz:

$$\mathcal{L}_1(\vec{u},q) \leq \mathcal{L}_1(\vec{u},p) \leq \mathcal{L}_1(\vec{v},p) \qquad \forall \vec{v} \in V_1 \text{ e } \forall q \in Q_1.$$

Já no caso do problema de Stokes (P_3) temos:

$$U = \{\vec{v} \mid \vec{v} \in V_3,\ div\ \vec{v} = 0\} \text{ e } U^G = U,$$

sendo a energia $E(\vec{v}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\vec{\nabla}\vec{v}|^2\, d\vec{x} - \int_\Omega \vec{f} \circ \vec{v}\, d\vec{x}$

O funcional $\mathcal{L}$ é dado por:

$$\mathcal{L}_3(\vec{v},q) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\vec{\nabla}\vec{v}|^2\, d\vec{x} + \int_\Omega q\ div\ \vec{v}\, d\vec{x} - \int_\Omega \vec{f} \circ \vec{v}\, d\vec{x},$$

e

$(\vec{u},p) \in V_3 \times Q_3$ satisfaz

$$\mathcal{L}_3(\vec{u},q) \leq \mathcal{L}_3(\vec{u},p) \leq \mathcal{L}_3(\vec{v},p) \qquad \forall \vec{v} \in V_3 \text{ e } \forall q \in Q_3.$$

VII - APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Para encerrar a apresentação desses fundamentos matemáticos, vamos considerar alguns aspectos essenciais do estudo da aproximação por elementos finitos mistos do problema ($\mathcal{M}$). Não se trata de um estudo completo e detalhado sobre o assunto, material que reservamos para um texto continuação deste, mas tão somente de preparar o leitor para dificuldades que esse tipo de resolução pode encerrar, e se possível dar alguma indicação de como proceder para remediá-las.

Na aproximação por elementos finitos de $(\mathcal{M})$ introduzimos dois espaços de dimensão finita V_h e Q_h , aproximação de V e Q respectivamente, associados a uma partição $\mathcal{T}_h$ do domínio Ω de definição do problema, em elementos de diâmetro máximo igual a h. Aqui o diâmetro de um elemento é definido como o dobro do raio da menor bola de $\mathbb{R}^n$ que o contém.

O problema aproximado é então

$$(\mathcal{M}_h) \qquad \begin{cases} \text{Encontrar } (u_h,p_h) \in V_h \times Q_h & \text{tal que} \\ a(u_h,v_h)+b(p_h,v_h) = L(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ b(q_h,u_h) = G(q_h) & \forall q_h \in Q_h \end{cases}$$

se considerarmos que $V_h \subset V$ e $Q_h \subset Q$ (aproximação conforme).

Além disso, introduzimos o espaço U_h dado por

$$U_h^G = \{v_h / v_h \in V_h \text{ tal que } b(q_h,v_h)=0 \qquad \forall q_h \in Q_h\}$$

e sua variedade linear U_h^G

$$U_h^G = \{v_h / v_h \in V_h \text{ tal que } b(q_h,v_h) = G(q_h), \quad \forall q_h \in Q_h\} ,$$

e fazemos ainda a seguinte hipótese de coercividade sobre $\underline{a}$:

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(v_h,v_h) \geq \alpha_h \|v_h\|_V^2 \quad \forall v_h \in U_h \text{ , com } \alpha_h > 0.$$

Note que U_h não é subespaço de U em geral e que, por conseguinte, a coercividade de $\underline{a}$ sobre U não implica na coercividade de $\underline{a}$ sobre U_h. Esse fato aliás indica que as constantes de coercividade sobre U e U_h podem ser diferentes.

Além da hipótese acima, é crucial satisfazer <u>a condição LBB discreta</u>, a saber:

Existe uma constante β_h estritamente positiva, eventualmente dependente de h, tal que:

$$(\mathcal{D}_h) \qquad \inf_{\substack{q_h \in Q_h \\ q_h \neq \vec{0}}} \quad \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_h(q_h, v_h)}{\| v_h \|_V \| q_h \|_Q} \geq \beta_h > 0.$$

Sob essas hipóteses, de acordo com o Teorema 3, o problema $(\mathcal{M}_h)$ tem solução única.

Na maioria dos casos práticos, a única condição realmente restritiva é $(\mathcal{D}_h)$, sendo importante observar que aqui também, o fato de que a condição $(\mathcal{D})$ se verificar não implica absolutamente que a primeira também o é para subespaços V_h e Q_h de V e Q escolhidas arbitrariamente.

De fato, se dado $q_h \in Q_h$ tem-se necessariamente

$$\sup_{\substack{v \in V \\ v \neq \vec{0}}} \frac{b(q_h, v)}{\| v \|_V} \geq \beta \, \| q_h \|_Q ,$$

ocorre que em geral $\displaystyle \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(q_h, v_h)}{\| v_h \|_V} < \sup_{v \in V} \frac{b(q_h, v)}{\| v \|_V}$

o que nos impede de afirmar, como no caso da coercividade, que $(\mathcal{D}_h)$ se verifica com $\beta_h = \beta$.

Tal é a dificuldade essencial dos métodos de elementos finitos mistos: V_h e Q_h devem ser escolhidos compativelmente, sendo a <u>condição LBB discreta</u> a condição de compatibilidade. Na realidade, a verificação de $(\mathcal{D}_h)$ com a estimativa mais fina possível de β_h em função de h é bastante complexa e exige muita técnica em geral. Tal estimativa, aliás, é necessária para que se possa chegar a resultadas de convergência de (u_h, p_h) a (u, p) no espaço $V \times Q$. Por todas essas razões vamos concluir estas notas apresentando apenas uma condição necessária para que ($_h$) se verifique; essa condição é extremamente simples de aplicar, e serve como uma excelente indicação pelo menos"do que não se deve fazer na prática".

Com esse intuito, vamos introduzir duas bases $\mathcal{B}_V = \{\phi_j\}_{j=1}^{N}$ e $\mathcal{B}_Q = \{\eta_j\}_{j=1}^{M}$ de V_h e Q_h respectivamente, onde $N = dim\ Q_h$. Seja $\underset{\sim}{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ o vetor de componentes de u_h segundo a base $\mathcal{B}_V$ e $\underset{\sim}{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_M)$ o vetor de componentes de p_h segundo a base $\mathcal{B}_Q$. Temos então:

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j \qquad\qquad p_h = \sum_{j=1}^{M} p_j \eta_j$$

Fazendo $v_h = \phi_i$ e $q_h = \eta_k$, $1 \le i \le N$ e $1 \le k \le M$, em $(\mathcal{M}_h)$, vemos que este problema se escreve, equivalentemente:

Encontrar $\underset{\sim}{u} \in \mathbb{R}^N$ e $\underset{\sim}{p} \in \mathbb{R}^M$ tais que

$$\sum_{j=1}^{N} u_j a(\phi_j, \phi_i) + \sum_{j=1}^{M} p_j b(\eta_j, \phi_i) = L(\phi_i) \ , \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \ b(\eta_k, \phi_j) = G(\eta_k) \ , \ k = 1, 2, \ldots, M.$$

ou ainda

$$A\underset{\sim}{u} + B^T \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{f}$$

$$B\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{g}$$

sendo $\underset{\sim}{f} = [L(\phi_1), L(\phi_2), \ldots, L(\phi_N)]$ e $g = [G(\eta_1), G(\eta_2), \ldots, G(\eta_M)]$

A a matriz $N \times N$ de termo geral $a_{ij}=a(\phi_j,\phi_i)$ e B a matriz $M \times N$ de termo geral $b_{kj}=b(\eta_k,\phi_j)$.

Inicialmente estabelecemos o resultado seguinte:

<u>Teorema 4</u>: A condição LBB discreta ($\mathcal{D}_h$) é verificada se e somente se o posto de B, $rank(B)$, é igual a M.

<u>Demonstração</u>: <u>A condição é suficiente</u>:

Se $rank(B) = M$, dado $q \in \mathbb{R}^M$ com $q \neq \vec{0}$ então $B^T q \neq \vec{0}$.
Portanto, dado $q_h \in Q_h$, e sendo $\underset{\sim}{q}$ o vetor de componentes de q_h segundo $\mathcal{B}_Q$, seja v_h a função de V_h cujo vetor de componentes segundo $\mathcal{B}_V$ é dado por $\underset{\sim}{v} = B^T\underset{\sim}{q}$

Temos assim $b_h(q_h,v_h) = \underset{\sim}{v}^T B^T \underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{q}^T B \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{q}^T B B^T \underset{\sim}{q} \geq \nu_{min} \| \underset{\sim}{q} \|_M^2$,

sendo $\| \cdot \|_K$ a norma canônica de $\mathbb{R}^K$, $K \in \mathbb{R}$, e ν_{min} o menor autovalor de BB^T, estritamente positivo por ser essa matriz positiva definida, já que $\underset{\sim}{q}^T BB^T \underset{\sim}{q} = \vec{0} \Longrightarrow \underset{\sim}{q} = \vec{0}$.

Por outro lado, $\| \underset{\sim}{v} \|_N \leq \sqrt{\nu_{max}} \; \| \underset{\sim}{q} \|_M$, onde ν_{max} é o maior autovalor de BB^T.

Enfim, notando que $\| q_h \|_Q \leq C_1 \| \underset{\sim}{q} \|_M$ e $\| \underset{\sim}{v} \|_N \leq C_2 \| v_h \|_V$, onde C_1 e C_2 só dependem das bases $\mathcal{B}_Q$ e $\mathcal{B}_V$ respectivamente , temos:

$\forall q_h \in Q_h$, $v_h \in V_h$ definido por $\underset{\sim}{v} = B^T \underset{\sim}{q}$ satisfaz:

$$\frac{b(q_h,v_h)}{\| v_h \|_V \; \| q_h \|_Q} \geq \frac{\nu_{min} \; C_2 \| \underset{\sim}{q} \|_M^2}{\| \underset{\sim}{v} \|_N \| q_h \|_Q} \geq \frac{\nu_{min} \; C_2}{\sqrt{\nu_{max}} \; C_1} \quad \text{ou seja}$$

a condição $(\mathcal{D}_h)$ é satisfeita com $\beta_h = \sqrt{\nu_{min}}\, C_2/\sqrt{\nu_{max}}\quad C_1$.

A condição é necessária: Se $(\mathcal{D}_h)$ se verifica mas $rank\,(B) < M$, então existe $\underset{\sim}{q} \neq \vec{0}$ tal que $B^T\underset{\sim}{q} = \vec{0}$. Neste caso para $q_h \in Q_h$ associado a $\underset{\sim}{q}$ temos: $\underset{\sim}{q}^T B\, \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}^T\, B^T \underset{\sim}{q} = 0 \quad \forall \underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}^N$. Por conseguinte, para tal q_h temos:

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{b(q_h, v_h)}{\| v_h \|_V} = 0,$$ o que contradiz $(\mathcal{D}_h)$, e logo $rank(B) = M$. c.q.d. □

Em geral, a condição de posto não é fácil de ser verificada tampouco. No entanto, a condição necessária seguinte é extremamente prática:

Corolário 1: A condição LBB-discreta é verificada somente se $dim\ V_h \geq dim\ Q_h$.

Demonstração: O posto de B é M só se $M \leq N$, donde o resultado. c.q.d. □

Em conclusão, uma condição mínima para a boa colocação de problemas aproximados por métodos de elementos finitos mistos, é que o número de graus de liberdade do multiplicador p_h seja superior ou igual ao número de graus de liberdade da incógnita u_h. Na prática, este último deve exceder substancialmente o primeiro, para que a solução aproximada seja significativa.

Infelizmente a sequência de soluções obtidas para partições cada vez mais finas de Ω, isto é, quando $h \to 0$, só convergirá à solução de $(\mathcal{M})$ no caso em que β_h admite uma estimativa adequada em função de h, e para tanto a condição de posto é longe de ser suficiente.

R E F E R Ê N C I A S

[1] R.A., Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] I. Babuška, The Finite Element Method with Lagrange Multipliers, Numerische Mathematik, Vol. 20, pp. 179-192. 1973.

[3] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers, RAIRO, Analyses Numérique 8-R2, pp. 129-151, 1974.

[4] H. Cartan, Calcult Différentiel, Hermann-Collection Méthodes, Paris 1971.

[5] B. Dupire, Sobre as condições mínimas de existência de soluções de problemas variacionais lineares e aplicações à análise de métodos de elementos finitos mistos, tese de doutoramento, Depto. de Informática da PUC/RJ, 1984, (em impressão)

[6] V. Girault & P.A. Raviart, Finite Element Approximation of Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[7] O.A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon & Breach, New York, 1969.

[8] O.A. Ladyzhenskaya, & N.N. Ual'ceva, Equations aux Derivées Partielles de type Elliptique, Dunod, Paris, 1968.

[9] D.G. Luenberger, Optimization by Vector Space Methods, John Wiley & Sons Inc., New York, 1969.

[10] J.T. Oden & J.N. Reddy, An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[11] P.A. Raviart & J.M. Thomas, Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Derivées Partielles, Masson, Paris, 1983.

[12] V. Ruas, Introdução aos Problemas Variacionais, Ed. Guanabara Dois S/A, Rio de Janeiro, 1979.

[13] V. Ruas, Análise Aplicada, Monografia em Ciências da Computação da PUC/RJ nº 18/83, Rio de Janeiro, 1983.

[14] R. Témam Navier Stokes Equations, North Holland, Amsterdam, 1977

[15] J.M. Thomas, Méthodes d'Eléments Finis Mixtes et Hybrides, Polycopié du Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris VI, 1981.

[16] J.M. Thomas, Sur l'Analyse Numérique des Méthodes d'Eléments Finis Hybrides et Mixtes, Thèse, Université de Paris VI, 1977.

[17] K. Yoshida, Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin, 1965.