PUC

Series: Monografias em Ciência da Computação

Nº 2/87

SOBRE UNA TEORIA ALGEBRAICA DE PROBLEMAS Y EL DESARROLLO DE SOFTWARE

Armando M. Haeberer
Gabriel Baum
Paulo A.S. Veloso

Departamento de Informática

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 — CEP 22453
RIO DE JANEIRO — BRASIL

Series: Monografias em Ciência da Computação

Nº 2/87

SOBRE UNA TEORIA ALGEBRAICA DE PROBLEMAS Y EL DESARROLLO DE SOFTWARE

Armando M. Haeberer

Gabriel Baum

Paulo A.S. Veloso

Departamento de Informática

PUC/RJ - Departamento de Informática

Séries: Monografias em Ciência da Computação
Nº 2/87

October 1987

Séries Editor: Paulo A. S. Veloso

SOBRE UNA TEORIA ALGEBRAICA DE PROBLEMAS Y EL DESARROLLO DE SOFTWARE*

Armando M. Haeberer[1]
Gabriel Baum[1]
Paulo A. S. Veloso[2]

1 ESLAI- Escuela Superior Latinoamericana de Informática - Argentina

2 PUC/RJ - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - Brasil

* Research partly sponsored by the ETHOS Project of the Argentinian Brazilian Program for Research and Advanced Studies in Computer Science

ON AN ALGEBRAIC THEORY OF PROBLEMS AND SOFTWARE DEVELOPMENT

ABSTRACT

This paper is a preliminary report on an algebraic theory of problems and its applications to the software development process. The aim of this ongoing research is providing a formal tool for the description of the various transformations and heuristics involved in the software develoment process. A good starting point for this purpose appears to be the notion of problem. Problems are defined as mathematical structures and their solutions as certain functions. Two operations on problems, sum and product, are introduced and their algebraic properties investigated. The concepts of additive subproblem and of complete additive subproblem are introduced and the algebraic structure of the sets of such subproblems of a given problem is investigated. Finally, these ideas are applied, in a tentative way, to the explication of a strategy for problem solving and program development.

Key words : Theory of problems, problem solving, algebraic properties, problem-solving strategies, software development, top-down decomposition, sum of problems, product of problems, additive subproblem, semilattice, bases.

SOBRE UNA TEORIA ALGEBRAICA DE PROBLEMAS Y EL DESARROLLO DE SOFTWARE

RESUMEN

Este trabajo es un informe preliminar sobre una teorîa algebraica de problemas y sus aplicaciones al proceso de desarrollo de software. Él objetivo de esta investigaciòn, actualmente en curso, es proveer una herramienta formal para la descripciòn de las transformaciones y heurîsticas involucradas en el proceso de desarrollo de software. Un buen punto de partida para el logro de este propòsito es la nociòn de problema. Se define a un problema como una estructura matemàtica y a sus soluciones como ciertas funciones. Se introducen dos operaciones sobre problemas, suma y producto, y se investigan sus propriedades algebraicas. Se introducen tambièn los conceptos de subproblema aditivo y de subproblema aditivo completo y se investiga la estructura algebraica de los conjuntos de tales subproblemas de un problema dado. Finalmente, se aplican tentativamente estas ideas a la explicaciòn de una estrategia para la resoluciòn de problemas y el desarrollo de programas.

Palabras clave : Teorîa de problemas, resoluciòn de problemas, propriedades algebraicas, estrategias para resoluciòn de problemas, desarrollo de software, descomposiciòn top-down, suma de problemas, producto de problemas, subproblema aditivo, semireticulado, bases.

SOBRE UMA TEORIA ALGEBRICA DE PROBLEMAS E O DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMAS

RESUMO

Este trabalho é um relatório preliminar sobre uma teoria algébrica de problemas e suas aplicações ao processo de desenvolvimento de programas. O objetivo desta pesquisa, atualmente em andamento, é fornecer uma ferramenta formal para a descrição das várias transformações e heurísticas envolvidas no processo de desenvolvimento de programas. Um bom ponto de partida para este objetivo parece ser a noção de problema. Um problema é definido como uma estrutura matemática e suas soluções como certas funções. Duas operações sobre problemas, soma e produto, são introduzidas e suas propriedades algébricas investigadas. Os conceitos de subproblema aditivo e de subproblema aditivo completo são introduzidos e a estrutura algébrica dos conjuntos de tais subproblemas de um problema dado é investigada. Finalmente, estas idéias são aplicadas, ainda de maneira tentativa, à explicação de uma estratégia para resolução de problemas e desenvolvimento de programas.

Palavras chave : Teoria de problemas, resolução de problemas, propriedades algébricas, estratégias para resolução de problemas, desenvolvimento de programas, decomposição top-down, soma de problemas, produto de problemas, subproblema aditivo, semi-reticulado, bases.

CONTENIDO

INTRODUCCION.

En los últimos años se han desarrollado una serie de trabajos que traten de modelizar el proceso de desarrollo de software, comunmente conocido como el proceso del software. Estos desarrollos llevan desde tratar de encontrar un paso canónico que aplicado reiteradamente modelice dicho proceso (Lehman et al [1] a [5], Turski [6] y Maibaum [7]), hasta cálculos de diseño y de programas (Sintzoff [8] a [12]).

Los trabajos arriba mencionados coinciden en que se puede considerar al proceso de software como compuesto de transformaciones que van desde la primera verbalización del problema, pasan por la especificación formal y llegan hasta el programa que resuelve dicho problema.

La opinión de los autores es que es necesario desarrollar una herramienta formal que permita describir dichas transformaciones, no solo desde el punto de vista semántico sino también del de las heurísticas asociadas a su aplicación. Si se lograra, mediante una herramienta de este tipo, describir formalmente un número suficiente de metodologías de programación, se podrían encontrar factores comunes a las mismas que representen las ideas fundamentales que guían todo proceso de resolución de problemas y en especial el de resolución de problemas mediante algoritmos.

Es evidente, por ejemplo, que una técnica de resolución ampliamente aplicada es la conocida como "descomposición top-down". Ahora bién, las metodologías que la utilizan producen la descomposición del problema inicial en subproblemas -esencial para su aplicación- según criterios distintos, hecho éste que hace aparecer a cada aplicación de esta técnica como una técnica en si misma.

Sin embargo podría ocurrir que la "descomposición top-down" sea realmente un factor común invariante y que esa supuesta diferencia resida en el enmascaramiento de la misma por las diferentes heurísticas de descomposición asociadas a las distintas aplicaciones.

Siguiendo esta línea de pensamiento, los autores decidieron que podría construirse una herramienta como la arriba mencionada desarrollando, sobre las idéas básicas de la Teoría Matemática de Problemas de P. A. S. Veloso, un Algebra de Problemas utilizando como formalismo la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel [13].

Se han desarrollado hasta el momento las operaciones de suma y producto de problemas; las nociones de subproblema aditivo y subproblema aditivo completo de un problema dado. Se ha demostrado que el conjunto de subproblemas aditivos de un problema dado forma, con la operación suma, un semireticulado superior del cual es supremo dicho problema. Se demostró también que existen bases y bases mínimas (en el sentido de que ninguno de sus elementos poseen subproblemas dentro del semireticulado) de subproblemas aditivos que permiten generar por suma de sus elementos el supremo del semireticulado.

Por último se aplicaron esos resultados a la modelización de la técnica de resolución de problemas conocida como "descomposición top-down".

Todos las definiciones y teoremas estan enunciados en Zermelo-Fraenkel pero en los casos en que se creyó conveniente se acompaña también un enunciado informal. La demostración de los teoremas y lemas se puede encontrar en el apéndice adjunto.

En su libro "How to solve it", G. Polya [14 a 16] establece tres preguntas fundamentales para determinar un problema; éstas son:

.¿Cuál es la incógnita?
.¿Cuáles son los resultados?
.¿Cuál es la condición?

Basándose en éstas ideas P.A.S. Veloso [17 a 24] construyó una teoría matemática de problemas en la que el concepto fundamental es el de "problema irrestricto". Un problema irrestricto es una estructura $P=\langle D,R,q\rangle$ donde D es un conjunto denominado "dominio de datos", R un conjunto denominado "dominio de resultados, y q es una relación binaria de D en R denominada "condición del problema".

Así, q no es otra cosa que la especificación del problema, asociando a cada dato d perteneciente al dominio de datos, uno o más valores r pertenecientes al dominio de resultados. Por ejemplo, la relación "raíz de un polinomio de segundo grado" asocia a cada elemento del conjunto de los polinomios de segundo grado, -que es en éste caso el dominio de datos- con uno o dos elementos del conjunto de los números complejos -que es en éste caso el dominio de los resultados-.

Otro de los conceptos fundamentales de la teoría de Veloso es el de solución. Una solución de un problema irrestricto $P=\langle D,R,q\rangle$ es cualquier función total σ de D en R incluída en la relación q.

Es obvia la necesidad de que la solución de un problema sea una función , ya que de no exigirse la condición de funcionalidad, se estaría en la situación bastante molesta, en que la simple especificación de un problema sería también su solución.

Aquí aparece un primer problema, si una solución es una función total de D en R, entonces aquellos problemas para los que la relación q no está definida sobre todo el dominio de datos D son insolubles. Veloso crea, para dar marco a ésta situación, el concepto de viabilidad.

Un problema es viable síy sólo sí la relación q está definida para todo el dominio de datos D Es decir:

$$P \text{ es viable} \leftrightarrow (\forall d)(d\in D \rightarrow (\exists r)(r\in R \wedge q(d,r)))$$

Ahora bien, de lo dicho se deduce que la viabilidad es una condición necesaria para la solubilidad ya que si el problema no es viable, es decir si la condición no está definida para todo el dominio de datos,no existirá ninguna función total de D en R incluída en dicha relación y por lo tanto no existirá ninguna solución. Si se dice que un problema es soluble sí y sólo sí tiene por lo menos una solución, es decir:

$$P \text{ es soluble} \leftrightarrow (\forall d)(\exists \sigma)(d\in D \wedge \sigma\in R^{D} \rightarrow q(d,\sigma(d))$$

entonces la conclusión es obvia: un problema es soluble sólo si es viable.
Pero ¿será la viabilidad una condición suficiente para la solubilidad?. El axioma de elección asegura que sí. Entonces:

$$P \text{ es soluble} \leftrightarrow P \text{ es viable}$$

Este es un resultado un tanto molesto de la teoría de Veloso ya que asegura que todo problema que pueda ser enunciado tiene solución.

Por otra parte, se puede observar que la condición de solubilidad no es otra cosa que la skolemización de la condición de viabilidad, por lo tanto, las soluciones de un problema no son otra cosa que las funciones de Skolem [25] de su condición de viabilidad.

En su trabajo "Aspetos de uma Teoría Geral de Problemas" [17 a 24] P.A.S.Veloso propone extender el concepto de problema irrestricto en dos sentidos.

El primero de ellos es el de "problemas con instancias". Un problema con instancias es un problema irrestricto en el que se define un subconjunto $\mathbf{I}$ del dominio de datos que se denomina "dominio de instancia de interés" y en el que una solución es toda función total de $\mathbf{D}$ en $\mathbf{R}$ que dentro del dominio $\mathbf{I}$ esta incluída en la condición q definida solo para dicho dominio. Es decir cuando para un problema solo interesa la solución para un subconjunto de los datos. Volviendo al ejemplo de "hallar las raíces de polinomios de segundo grado", un "problema con instancias" de éste problema podría ser "hallar la raíces de polinomios de segundo grado con coeficientes enteros".

La segunda extensión propuesta por Veloso se relaciona con las soluciones de un problema. Es interesante a veces tratar la solución de un problema en un determinado "contexto" dado por una clase de "funciones admisibles"; es decir cuando no cualquier solución es admisible sino solo aquellas que pertenecen a una cierta clase, ya sea por razones constructivas -por ejemplo construír con regla no graduada y compás-, topológicas -por ejemplo funciones contínuas-, de calculabilidad -por ejemplo funciones computables-, etc.

Propone entonces Veloso extender la idea de problema irrestricto a la noción de α-problema, es decir un problema irrestricto en el que las soluciones deben pertenecer a una determinada clase definida por el predicado α.

En este trabajo se partirá de una definición de problema que incluye estas dos extensiones. Un problema será entonces una cuadrupla $P=\langle \mathbf{D},\mathbf{R},q,\mathbf{I}\rangle$ dónde $\mathbf{D}$ se denominará dominio de datos, $\mathbf{R}$ dominio de resultados, $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{D}$ dominio de instancias de interés; q será una relación binaria de $\mathbf{D}$ en $\mathbf{R}$ definida sobre todo el dominio $\mathbf{I}$ y denominada condición del problema.

En los desarrollos subsecuentes se supone la existencia de la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

1-DEFINICIONES BASICAS SOBRE EL CONCEPTO DE PROBLEMA

Primero se deberán definir los objetos de órden 0 es decir los objetos que compondrán los dominios de datos y resultados de los problemas de que tratará la Teoría. El axioma de separación autoriza a hablar de un conjunto $\mathfrak{U}$ de tales objetos mediante el siguiente esquema de definición:

Esquema de definición 1.1-

$$\mathfrak{U}=\{x:x\in\mathfrak{A}\wedge\lambda(x)\}$$

Se puede, entonces, definir el "universo del discurso de los problemas" $\mathfrak{C}_\lambda$ mediante el siguiente esquema de definición:

Esquema de definición 1.2-

$$\mathfrak{C}_\lambda=\{x:x=\langle \mathbf{D}_x,\mathbf{R}_x,q_x,\mathbf{I}_x\rangle\leftrightarrow(x\in\mathfrak{P}(\mathfrak{U})\times\mathfrak{P}(\mathfrak{U})\times\mathfrak{P}(\mathfrak{U}^2)\times\mathfrak{P}(\mathfrak{U})\wedge q_x\subseteq\mathbf{D}_x\times\mathbf{R}_x\wedge\mathbf{I}_x\subseteq\mathbf{D}_x)\}$$

Entonces, una vez definidos los universos del discurso $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{C}_\lambda$, un problema será una cuadrupla $P=\langle \mathbf{D}_P, \mathbf{R}_P, q_P, \mathbf{I}_P\rangle$, donde los dominios de datos $\mathbf{D}_P$ y de resultados $\mathbf{R}_P$ son subconjuntos de $\mathfrak{U}$, el dominio de instancias de interés $\mathbf{I}_P$ es un subconjunto de $\mathbf{D}_P$ y la condición del problema es una relación binaria de $\mathbf{D}_P$ en $\mathbf{R}_P$.

Definición 1.3-

Dos problema P y Q son iguales ssi lo son sus dominios de datos sus condiciones y sus dominios de instancias de interés.

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\lambda \wedge Q\in \mathfrak{C}_\lambda) \rightarrow (P=Q \leftrightarrow \mathbf{D}_P=\mathbf{D}_Q \wedge q_P=q_Q \wedge \mathbf{I}_P=\mathbf{I}_Q))$$

Se puede, ahora, introducir la noción de viabilidad:

Definición 1.4-

Un problema P es viable ssi su condición q_P relaciona a cada uno de los elementos de su dominio de instancias de interés $\mathbf{I}_P$ con por lo menos un elemento r de su dominio de resultados $\mathbf{R}_P$.

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\lambda \rightarrow (P \text{ es viable} \leftrightarrow (\forall d)(d\in \mathbf{I}_P \rightarrow (\exists r)(r\in \mathbf{R}_P \wedge q_P(d,r)))))$$

En éste contexto, se dirá que un problema es viable sí y sólo sí su condición está definida para todo elemento del dominio de instancias de interés de dicho problema.

Entonces se puede, obviamente, demostrar:

Teorema 1.1-

Un problema P es viable ssi su dominio de instancias de interés $\mathbf{I}_P$ esta incluido en el dominio $\mathfrak{D}(q_P)$ de su condición.

$$\vdash (\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\lambda \rightarrow (P \text{ es viable} \leftrightarrow \mathbf{I}_P \subseteq \mathfrak{D}(q_P)))$$

Esta forma de definir la viabilidad será de interés más adelante en el desarrollo de ésta teoría.

Se dirá también que un problema P es soluble si existe una función de $\mathbf{D}_P$ en $\mathbf{R}_P$ definida para todo elemento del dominio de instancias de interés de P, que esté incluída en su condición.

Es decir:

Definición 1.5-

Un problema P se dice soluble ssi existe por lo menos una función total $\delta:\mathbf{D}_P\rightarrow\mathbf{R}_P$ tal que su restricción al dominio de instancias de interés $\mathbf{I}_P$ esta incluida en la condición q_P de dicho problema.

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\lambda \rightarrow (P \text{ es soluble } \leftrightarrow (\exists\sigma)(\sigma\in R_P{}^{D_P} \wedge (\forall d)(d\in I_P \rightarrow q_P(d,\sigma(d))))))$$

Se denomionará "espacio de soluciones" del problema P al conjunto Ω_P de todas sus soluciones, es decir de todas las funciones pertenecientes a $R_P{}^{D_P}$ que están incluídas en la condición q_P. Entonces, Ω_P es el conjunto de todas las funciones pertenecientes a $R_P{}^{D_P}$, cuyas restricciones al dominio de instancias de interés de P serán funciones de Skolem de la condición de viabilidad introducida por la Definición 1.3

Es decir:

Definición 1.6-

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\lambda \rightarrow (\Omega_P=\{\sigma:\sigma\in R_P{}^{D_P} \wedge (\forall d)(d\in I_P \rightarrow q_P(d,\sigma(d)))\})$$

Como ya se dijo, en el caso de la teoría matemática para problemas irrestrictos, se puede deducir de lo hasta aquí expuesto y de la teoría de Zermelo-Fraenkel que la viabilidad es condición necesaria y suficiente para la solubilidad, entonces se puede introducir el siguiente:

Teorema 1.2-

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\lambda \rightarrow (P \text{ es viable} \leftrightarrow P \text{ es soluble}))$$

Desde este punto en adelante el desarrollo de la teoría se llevará a cabo para problemas pertenecientes a la clase $\mathfrak{C}_\phi$ incluída en $\mathfrak{C}_\lambda$ de problemas viables.

Ahora bien, como ya se dijo, el concepto de solubilidad introducido por la Definición 1.5 y por lo tanto la noción simple de problema irrestricto no son suficientes si se quiere tener en cuenta un "contexto de admisibilidad" de la solución. Por ejemplo de nada serviría una solución no computable para un problema que desea resolverse mediante una máquina algorítmica.

Se debe introducir por lo tanto al concepto de α-solubilidad. Se dice entonces que:

Definición 1.7-

Se denomina contexto de admisibilidad a la subclase de todas las funciones $f:\mathfrak{U}\rightarrow\mathfrak{U}$ de la clase $\mathcal{A}_\alpha$ que posean la propiedad α.

$$\mathcal{A}_\alpha=\{f:f\in\mathfrak{U}^{\mathfrak{U}} \wedge \alpha(f)\}$$

Definición 1.8-

Se denomina clase de funciones admisibles de un problema P al conjunto $\mathcal{A}_{\alpha,P}$ de funciones obtenidas restringiendo a cada función f de $\mathcal{A}_\alpha$ al dominio de datos D_P.

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow \mathcal{A}_{\alpha,P}=\{g:(\exists f)(f\in\mathcal{A}_\alpha \wedge g=f|_{D_P})\})$$

Definición 1.9-

Un problema P se dice α-soluble ssi posee alguna solución σ que pertenezca a la clase $\mathcal{A}_{\alpha,P}$ de funciones admisibles.

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (P \text{ es } \alpha\text{-soluble} \leftrightarrow (\exists\sigma)(\sigma\in R_P{}^{D_P} \cap \mathcal{A}_{\alpha,P} \wedge (\forall d)(d\in I_P \rightarrow q_P(d,\sigma(d))))))$$

Se denominará "espacio de soluciones admisibles" de un problema P al conjunto Ψ_P de todas las soluciones de P que pertenezcan a la clase $\mathcal{A}_{\alpha,P}$. Es decir:

Definición 1.10-

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (\Psi_P = \mathcal{A}_{\alpha,P} \cap \Omega_P))$$

Como es notorio, un problema puede ser soluble y no tener ninguna solución que pertenezca a su clase de funciones admisibles; entonces, la viabilidad es una condición necesaria pero no suficiente para la α-solubilidad ya que no es derivable del axioma de elección la necesidad de la existencia de soluciones de P que pertenezcan a su clase de funciones admisibles.

La relación entre la solubilidad y la α-solubilidad puede explicarse mediante el siguiente:

Teorema 1.3-

Un problema P se dice α- soluble ssi su espacio de soluciones admisibles Ψ_P no es vacío.

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (P \text{ es } \alpha\text{-soluble} \leftrightarrow \Psi_P \neq \emptyset))$$

Lo hasta aquí expuesto no es otra cosa que el desarrollo formal de la extensión de la teoría de matemática de problemas desde el concepto de problema irrestrictos al de problema que los autores utilizan como fundamental y que se propone en [24] (de manera informal) como "$\mathcal{A}$-problemas con instancias".

Para seguir en ésta línea de formalización de la extensión de la teoría de problemas irrestrictos a $\mathcal{A}$-problemas con instancias se debería ahora extender los conceptos de "reducción" entre problemas y de "descomposición" de problemas mediante "descompositores n-arios".

Es aquí donde la presente teoría se aparta de lla teoría matemática de problemas ya que se considera que tanto la reducción entre problemas como la descomposición son técnicas de resolución. Por lo tanto, se cree interesante encontrar un conjunto de operaciones mucho más básicas que esas técnicas de manera de poder construir un álgebra que permita "hablar" tanto de éstas como de cualquier otra técnica de resolución.

Se desarrollan a continuación , entonces, las operaciones de: suma, producto y diferencia de problemas .

Estas operaciones se definen a partir de los elementos de las cuadruplas que definen a los operandos, introduciéndose luego teoremas "constructivos" de las soluciones del problema resultante a partir de las soluciones de los operandos en cuestión. Esto último se debe a que, como se intenta utilizar el álgebra para describir técnicas de resolución, se deben poder obtener soluciones del problema a ser resuelto a partir de soluciones de subproblemas del mismo, de problemas análogos, etc.

Antes de pasar a las formalizaciones arriba mencionadas es importante para su desarrollo introducir una formulación de la "versión multiplicativa" -atribuida a Bertrand Russell- del axioma de elección que, como es bién sabido, es equivalente al axioma de Zermelo, en el que se fundamenta la existencia de funciones de Skolem.

La siguiente es una explicación intuitiva para conjuntos finitos de la formulación formal dada en el corolario 1.4.

Sean $\mathbb{B}$ y $\mathbb{A}$ dos conjuntos y $\mathbb{L}$ una relación binaria de $\mathbb{B}$ en $\mathbb{A}$ definida sobre todo $\mathbb{B}$. El conjunto de funciones totales de $\mathbb{B}$ en $\mathbb{A}$ incluído en $\mathbb{L}$ se puede construír de la siguiente forma:

Se parte $\mathbb{L}$ en $\#\mathbb{B}$ clases de equivalencia, una por cada elemento de $\mathbb{B}$ y formada para los pares de $\mathbb{L}$ cuya primera proyección sea ese elemento.

Si se hace ahora el producto cartesiano generalizado de las $\#\mathbb{B}$ clases, cada una de las $\#\mathbb{B}$-uplas que lo componen está formada por los pares ordenados de una de las funciones incluídas en $\mathbb{L}$.

Sólo resta entonces, para cada $\#\mathbb{B}$-upla, obtener sus $\#\mathbb{B}$ proyecciones y construír con los pares ordenados así obtenidos un conjunto que será una de las funciones buscadas.

Se puede, entonces, enunciar el siguiente corolario de la versión "Russelliana" del axioma de elección:

Corolario 1.4-

$$\vdash(\forall B)(\forall A)(\forall \mathbb{L})(\mathbb{L}\subseteq B\times A \wedge \mathbb{D}(\mathbb{L})=B) \rightarrow (\{f: f\in A^{B} \wedge (\forall x)(x\in B \rightarrow \mathbb{L}(x,f(x)))\} =$$
$$\{f:(\exists z)(z\in \mathsf{X}_{y\in B}\{\omega:\omega\in\mathbb{L}\wedge \pi_1(\omega)=y\} \wedge f=\bigcup_{y\in B}\{\pi_y(z)\})\})$$

Para comprender la razón de la introducción de éste corolario es interesante analizar una de sus aplicaciones en el desarrollo de esta teoría.

La Definición 1.6 introduce el concepto de espacio de soluciones de un problema P como el conjunto Ω_P de las funciones de Skolem de la condición de viabilidad de dicho problema.

Pero, dado que, como ya se dijo , en el desarrollo de las operaciones entre problemas se introducirán teoremas constructivos de las soluciones del problema resultante a partir de las de los operandos, es conveniente contar también con una expresión constructiva para Ω_P a partir de q_P.

Se debe, entonces, introducir el siguiente:

Teorema 1.5-

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_{\phi}\rightarrow$$
$$\Omega_P=\{\sigma:(\exists\xi)(\xi\in \mathsf{X}_{d\in D_P}\{x: x\in q_P \vee \neg(\pi_1(x)\in \mathbf{I}_P) \wedge \pi_1(x)=d\} \wedge (\sigma=\bigcup_{d\in D_P}\{\pi_d(\xi)\}))\})$$

Cuya demostración se obtiene reemplazando el definiendum del teorema por el definiens de la Definición 1.6 y aplicando el Corolario 1.4.

2-SUMA DE PROBLEMAS

Antes de definir formalmente la operación de suma, se tratará de justificar informalmente la inclusión de dicha operación.

El resultado de la operación suma de los problemas P y Q es un tercer problema cuyos dominio de datos, dominio de resultados, condición y dominio de instancias de interés son el resultado de la unión de los dominios de datos, de resultados, condiciones y dominios de intancias de interés de P y Q.

En el caso del problema de encontrar las raíces de polinomios de segundo grado, por ejemplo, se podrían conocer soluciones para los problemas: calcular las raíces de polinomios de segundo grado con coeficientes reales y su equivalente para coeficientes imaginarios. El problema general es, como es notorio, la suma de los dos últimos.

Las seis definiciones siguientes introducen formalmente la operación suma:

Definición 2.1-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_{\phi}\wedge Q\in \mathfrak{C}_{\phi})\rightarrow q_{P+Q}=q_P\cup q_Q)$$

Definición 2.2-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_{\phi}\wedge Q\in \mathfrak{C}_{\phi})\rightarrow D_{P+Q}=D_P\cup D_Q)$$

Definición 2.3-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_{\phi}\wedge Q\in \mathfrak{C}_{\phi})\rightarrow R_{P+Q}=R_P\cup R_Q)$$

Definición 2.4-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_{\phi}\wedge Q\in \mathfrak{C}_{\phi})\rightarrow I_{P+Q}=I_P\cup I_Q)$$

Definición 2.5-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_{\phi}\wedge Q\in \mathfrak{C}_{\phi})\rightarrow(P+Q=S\leftrightarrow S=\langle D_{P+Q}, R_{P+Q}, q_{P+Q}, I_{P+Q}\rangle))$$

Ahora bien, de poco serviría saber que un problema es suma de otros dos si no se dan definiciones constructivas de las soluciones del problema a partir de soluciones de los sumandos, ya que lo que se está tratando de explicar con ésta operación es una técnica elemental de resolución, a saber:

Si se determina, analizando sus condiciones respectivas que un problema dado -del cual no se conocen soluciones- es la suma de otros dos, de los que sí se conoce por lo menos una solución para cada uno, se puede, en muchos casos, construir una solución del primer problema a partir de un par de soluciones conocidas de los otros dos.

A continuación se introducirán, entonces, dos teoremas que definen: el conjunto de soluciones correspondientes a la suma de una solución cualquiera de cada uno de los problemas sumandos; el espacio de soluciones del problema suma a partir de los espacios de soluciones de los problemas sumandos y el espacio de α-soluciones del problema suma a partir de los espacios de α-soluciones de los sumandos.

Dadas las funciones f y g, el conjunto $\tau(f,g)$ de funciones incluídas en $f\cup g$ queda definido mediante la introducción de la siguinte:

Definición 2.6-

$$(\forall f)(\forall g)(\forall T)(\forall V)(f\in\mathfrak{U}^T\wedge g\in\mathfrak{U}^V\wedge T\subseteq\mathfrak{U}\wedge V\subseteq\mathfrak{U}\rightarrow \tau(f,g)=\{h:h\in\mathfrak{U}^{T\cup V}\cap(f\cup g)\})$$

Se puede obtener una expresión constructiva de $\tau(f,g)$ aplicando el corolario 1.4 a la relación obtenida mediante la unión de f y g.

Lema 2.1-

$$\vdash(\forall f)(\forall g)(\forall T)(\forall V)(f\in\mathfrak{U}^T\wedge g\in\mathfrak{U}^V\wedge T\subseteq\mathfrak{U}\wedge V\subseteq\mathfrak{U}\rightarrow$$
$$\tau(f,g)=\{\sigma:(\exists\xi)((\xi\in\times_{d\in T\cup V}\{x:x\in(f\cup g)\wedge\pi_1(x)=d\})\wedge\sigma=\bigcup_{d\in T\cup V}\{\pi_d(\xi)\}\}))$$

Definición 2.7-

Se denominará $\eta(f,g)$ *al subconjunto de* $\tau(f,g)$ *formado por aquellas funciones que puedan obtenerse por restricción del dominio de alguna función perteneciente al contexto de admisibilidad* $\mathcal{A}_\alpha$.

$$(\forall f)(\forall g)(\forall T)(\forall V)(f\in\mathfrak{U}^T\wedge g\in\mathfrak{U}^V\wedge T\subseteq\mathfrak{U}\wedge V\subseteq\mathfrak{U}\rightarrow$$
$$\eta(f,g)=\{h:h\in\tau(f,g)\wedge(\exists s)(s\in\mathcal{A}_\alpha\wedge h=s|_{T\cup V})\})$$

Como es notorio, el hecho de que la unión de dos funciones no siempre tenga como resultado una función es el causante de la necesidad de aplicar el corolario 1.4 a dicha unión -es decir de construir el espacio de funciones de Skolem de la misma- para calcular τ.

Ahora bién, dadas dos funciones f y g cuyos dominios sean T y V respectivamente, la eventual falta de funcionalidad de su unión esta producida por la intersección $T\cap V$ de dichos dominios. Por lo tanto se pueden construir funciones de Skolem $(f+_Kg)$ de $f\cup g$ eligiendo un subconjunto $K\subseteq T\cap V$ y tomando $(f+_Kg)(d)=f(d)$ si $d\in T-K$ y $(f+_Kg)(d)=g(d)$ si $d\in V-T\cap V\cup K$.

Entonces se puede enunciar la siguiente:

Definición 2.8-

Se denominará $\zeta(f,g)$ *al conjunto de las funciones* $(f+_Kg)$ *obtenidas tomando cada uno de los subconjuntos* K *de* $T\cap V$.

$$(\forall f)(\forall g)(\forall T)(\forall V)(\forall K)(f\in\mathfrak{U}^T\wedge g\in\mathfrak{U}^V\wedge T\subseteq\mathfrak{U}\wedge V\subseteq\mathfrak{U}\wedge K\subseteq T\cap V\rightarrow$$
$$(f+_Kg)\in\zeta(f,g)\leftrightarrow(\mathfrak{D}(f+_Kg)=T\cup V\wedge\mathcal{R}(f+_Kg)=\mathfrak{U}\wedge$$
$$(\forall d)(d\in T-K\rightarrow(f+_Kg)(d)=f(d)\wedge d\in V-T\cap V\cup K\rightarrow(f+_Kg)(d)=g(d))))$$

Teorema 2.1-

$\zeta(f,g)$ *es el conjunto* $\tau(f,g)$ *de las funciones incluídas en* $f\cup g$.

$$\vdash(\forall f)(\forall g)(\forall T)(\forall V)(f\in\mathfrak{U}^T\wedge g\in\mathfrak{U}^V\wedge T\subseteq\mathfrak{U}\wedge V\subseteq\mathfrak{U}\rightarrow\zeta(f,g)=\tau(f,g))$$

Si f y g son dos soluciones σ_P y σ_Q de dos problemas P y Q, respectivamente, la unión de los dominios $T\cup V$ que aparecen en el Lema incluye al dominio de datos de la suma D_{P+Q}, ya que la condición de solubilidad exige que σ_P y σ_Q sean totales sobre D_P e D_Q respectivamente, y se tiene de la Definición 2.4: $D_{P+Q}=D_P\cup D_Q$.

Por otra parte, si se supone -para facilitar el enunciado de los teoremas siguientes- que las funciones σ_P y σ_Q forman parte de un par ordenado $\psi = \langle\sigma_P, \sigma_Q\rangle$, el Lema se puede reescribir de la forma:

Lema 2.2-

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(P \in \mathfrak{L}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{L}_\phi \rightarrow$$
$$\tau(\psi)=\{\sigma:(\exists\xi)(\xi \in \mathcal{X}_{d\in D_{P+Q}}\{x : x \in (\pi_1(\psi) \cup \pi_2(\psi)) \wedge \pi_1(x)=d\} \wedge (\sigma = \bigcup_{d\in D_{P+Q}}\{\pi_d(\xi)\})\})$$

Que no es otra cosa que la aplicación del corolario 1.4 a la relación $\sigma_P \cup \sigma_Q$.

Siendo obvios los siguientes corolarios:

Corolario 1-

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(P \in \mathfrak{L}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{L}_\phi \rightarrow \zeta(\psi)=\tau(\psi))$$

Corolario 2-

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(P \in \mathfrak{L}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{L}_\phi \rightarrow \eta(\psi)=\zeta(\psi) \cap \mathcal{A}_{\alpha,P+Q})$$

Los conjuntos $\tau(\psi)$ y $\zeta(\psi)$ se denominan conjuntos de soluciones derivadas de σ_P y σ_Q y el conjunto $\eta(\psi)$, conjunto de α-soluciones derivadas de σ_P y σ_Q.

Ahora bien, sería interesante, utilizando este resultado, demostrar que se puede construír el espacio de soluciones de la suma Ω_{P+Q} a partir de los espacios de soluciones Ω_P y Ω_Q de los problemas P y Q respectivamente, uniendo las clases de funciones $\zeta(\psi)$ para todos los posibles pares ψ tales que $\pi_1(\psi) \in \Omega_P$ y $\pi_2(\psi) \in \Omega_Q$.

A tal fin se enuncia el siguiente:

Teorema 2.2-

El espacio de soluciones Ω_{P+Q} de la suma de dos problemas P y Q es la gran unión de los conjuntos ζ de soluciones derivadas de soluciones de P y Q tomadas dos a dos.

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P \in \mathfrak{L}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{L}_\phi) \rightarrow \Omega_{P+Q} = \bigcup_{\psi \in \Omega_P \times \Omega_Q} \zeta(\psi))$$

El mismo caso se tiene para el espacio Ψ_{P+Q} de α-soluciones de la suma, entonces:

Teorema 2.3-

El espacio de soluciones Ψ_{P+Q} de la suma de dos problemas P y Q es la gran unión de los conjuntos η de soluciones derivadas de soluciones de P y Q tomadas dos a dos.

$$\vdash(\forall P)(\forall Q)((P\in\mathfrak{L}_\phi \wedge Q\in\mathfrak{L}_\phi) \rightarrow \Psi_{P+Q}= \bigcup_{\psi\in\ \Omega_P\times\Omega_Q} \eta(\psi))$$

Obsérvese que, a la luz de los Teoremas 2.2 y 2.3, si se tiene un problema S del cual no se conocen soluciones y se determina, analizando su condición que éste se puede "descomponer" en los problemas P y Q cuya suma es S y para cada uno de los cuales se conoce una solución σ_P y σ_Q respectivamente, el conjunto de soluciones $\zeta(\sigma_P,\sigma_Q)$ de S derivado de σ_P y σ_Q, se puede definir constructivamente a partir de σ_P y σ_Q.

2.1-Propiedades de la Suma. Se pasará ahora, a estudiar las propiedades de la operación suma.

La primera propiedad que se debe demostrar es la unicidad de la operación, se demostrará luego que la suma de problemas es conmutativa, asociativa e idempotente, entonces:

Teorema 2.4-

i)Unicidad:

$$\vdash(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{L}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{L}_\phi) \rightarrow(E!S)(S\in \mathfrak{L}_\phi \wedge S=P+Q))$$

ii)Conmutatividad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{L}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{L}_\phi) \rightarrow(P+Q=Q+P))$$

iii)Asociatividad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(\forall R)((P\in \mathfrak{L}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{L}_\phi \wedge R\in \mathfrak{L}_\phi) \rightarrow(P+(Q+R)=(P+Q)+R))$$

iv)Idempotencia:

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{L}_\phi \rightarrow P+P=P)$$

Surge ahora una pregunta, ¿existe un elemento neutro para la operación suma?, si es así ¿que forma tendrá?. Analizando las propiedades de la operación se deduce que: sus dominios de datos y resultados deben ser vacíos ya que la unión de los mismos con los correspondientes a cualquier problema deben dejar invariantes a éstos últimos; por la misma razón su condición debe ser vacía.

Es obvio que el dominio de instancias de interés también debe ser vacío. Entonces, parece que el elemento neutro de la suma de problemas deberá tener la forma $\langle\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset\rangle$.

Ahora bien, antes de introducir un Teorema que demuestre la condición de neutro de este objeto, se debe demostrar que el mismo es un problema, entonces:

Teorema 2.5-

$$\vdash 0=\langle\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset\rangle\rightarrow 0\in \mathfrak{L}_\phi$$

y entonces, ahora sí:

Teorema 2.6-

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{L}_\phi \rightarrow P+0=0+P=P$$

Por último es conveniente, para el desarrollo subsiguiente de la teoría y luego de demostrar la asociatividad de la operación y la existencia de elemento neutro, generalizar el concepto de suma, para lo cual se introduce a continuación la noción de sumatoria de problemas:

Definición 2.9-

Dado un conjunto $\mathbb{L}$ de problemas, se denomina sumatoria sobre $\mathbb{L}$ y se simboliza $\Sigma_{x\in\mathbb{L}} x$, a la suma de todos los problemas que pertenecen a $\mathbb{L}$.

$$(\forall \mathbb{L})(\mathbb{L} \subseteq \mathfrak{C}_\alpha \rightarrow \Sigma_{x\in\mathbb{L}} x = < \dot{\bigcup}_{x\in\mathbb{L}} D_x, \bigcup_{x\in\mathbb{L}} R_x, \bigcup_{x\in\mathbb{L}} q_x, \bigcup_{x\in\mathbb{L}} I_x)$$

3-PRODUCTO DE PROBLEMAS

Como en el caso de la operación suma, antes de introducir formalmente el producto, se tratará de justificar está operación analizandola informalmente.

El resultado de la operación producto de dos problemas P y Q es un tercer problema resultado de "concatenar" los dos anteriores, es decir un problema cuya condicion será el producto relativo de las condiciones de P y Q.

El caso es que una operación como ésta puede modelizar una técnica típica de resolución de problemas que consista en la resolución por partes, donde el dominio del producto relativo de las condiciones de las partes coincida con el dominio de datos del problema original y el rango de dicho producto coincida con el dominio de resultados del problema en cuestión.
Por ejemplo, para invertir una matríz se procede como sigue:
Primera parte: se la transpone, segunda parte: se calcula el adjunto, tercera parte: se divide este último por el determinante de dicha matríz.

Esta técnica podría denominarse "interpolación con un dominio arbitrario" que esta ligada con la heurística propuesta por Polya mediante la pregunta ¿ Existe un problema con solución conocida que tenga la misma incógnita que el que intenta resolver?. Una técnica como ésta es la base del método de reducción planteado por Veloso.

La técnica de interpolación con un dominio arbitrario, puede describirse como la descomposición del problema original en partes que cumplan con la condición de "concatenación" expuesta más arriba y resolverlo mediante el producto de dichas partes.

Las dificultades de esta técnica aparecen como resultado de la naturaleza de la operación producto relativo de relaciones ya que al ser posible la "eliminación" de pares ordenados de la primer relación al no existir en la segunda ningun par ordenador cuya primer proyección coincida con la segunda de dichos pares, el dominio del producto relativo de las condiciones de las partes puede no incluir al dominio de instancias de interés del problema original si no se elige cuidadosamente el dominio de interpolación.

Para definir el producto de dos problemas P y Q se debe ante todo definir los elementos de la pentupla del problema producto, a saber:

Definición 3.1-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow q_{P\circ Q}=q_P/q_Q)$$

Definición 3.2-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow D_{P\circ Q}=\mathfrak{D}(q_P/q_Q))$$

Definición 3.3-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow R_{P\circ Q}=\mathfrak{R}(q_P/q_Q))$$

Definición 3.4-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow \mathbb{I}_{P\circ Q} = \mathbb{D}(q_P|_{\mathbb{I}_P}/q_Q)$$

El dominio de instancias de interés del producto es el dominio de la relación obtenida mediante el producto relativo de la condición del primer factor restringido a su dominio de instancias de interés por la condición del segundo factor.

Entonces, el producto de dos problemas $P\circ Q$ es un tercer problema S de la forma: $S = \langle D_{P\circ Q}, R_{P\circ Q}, q_{P\circ Q}, I_{P\circ Q}\rangle$,formalmente:

Definición 3.5-

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow (P\circ Q = S \leftrightarrow S = \langle D_{P\circ Q}, R_{P\circ Q}, q_{P\circ Q}, I_{P\circ Q}\rangle))$$

El espacio de soluciones del producto se puede derivar de la condición $q_{P\circ Q}$ aplicando el corolario 1.4.

Si se analiza que ocurre cuando se efectúa el producto relativo de una solución cualquiera de P con una de Q es obvio que el dominio de la función resultante de dicho producto, aún siendo vacío está incluído en el dominio de datos del primer factor P, nada impide entonces definir un cierto problema $P_{\sigma P\circ \sigma Q}$ de la forma:

Definición 3.6-

Dados dos problemas P y Q se denomina problema derivado del producto de dos soluciones σ_P y σ_Q, en ese orden, al problema $P_{\sigma P\circ\sigma Q}$ cuyo dominio de datos es el dominio del producto relativo de ambas soluciones, el dominio de resultados igual al dominio de resultados del problema Q, su condición el producto relativo de ambas soluciones y su dominio de instancias de interés el dominio de dicho producto relativo restringido al dominio de instancias de interés del problema P.

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow (\sigma_P\in\Omega_P \wedge \sigma_Q\in\Omega_Q \rightarrow (P_{\sigma P\circ\sigma Q} = \langle \mathbb{D}(\sigma_P/\sigma_Q), R_Q, \sigma_P/\sigma_Q, \mathbb{D}(\sigma_P/\sigma_Q)|_{\mathbb{I}_P}\rangle)))$$

Si se denomina $S_{P\circ Q}$ a un problema obtenido mediante la sumatoria de todos los posibles problemas $P_{\sigma P|\mathbb{I}P\ \circ\sigma Q|\mathbb{I}Q}$ definibles a partir de Ω_P y Ω_Q, es decir:

$$S_{P\circ Q} = \Sigma_{\psi\in\Omega P\times\Omega Q}\, P_{\pi 1(\psi)|\mathbb{I}P\ \circ\ \pi 2(\psi)|\mathbb{I}Q}$$

es interesante observar que :

Teorema 3.1-

$$\vdash(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow \{f: \sigma_P\in\Omega_P \wedge \sigma_Q\in\Omega_Q \wedge f=\sigma_P|_{\mathbb{I}_P}/\sigma_Q|_{\mathbb{I}_Q}\} = \Omega_{S_{P\circ Q}})$$

3.1-Propiedades del producto- Se pasará, ahora, a estudiar las propiedades de la operación producto.

La primera propiedad que se debe demostrar es la unicidad de la operación, se demostrará luego que el producto de problemas es: asociativo y distributivo a la izquierda y a la derecha con respecto a la suma.

Teorema 3.2-

i) Unicidad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{L}_{\alpha.\phi} \wedge Q\in \mathfrak{L}_{\phi}) \rightarrow (E!S)(S\in \mathfrak{L}_{\phi} \wedge S=P\circ Q))$$

ii) Distributividad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(\forall R)((P\in \mathfrak{L}_{\phi} \wedge Q\in \mathfrak{L}_{\phi} \wedge R\in \mathfrak{L}_{\phi}) \rightarrow (P\circ(Q\circ R)=(P\circ Q)\circ R))$$

iii) Asociatividad por la izquierda:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(\forall R)((P\in \mathfrak{L}_{\phi} \wedge Q\in \mathfrak{L}_{\phi} \wedge R\in \mathfrak{L}_{\phi}) \rightarrow (P\circ(Q+R)=P\circ Q+P\circ R)$$

iv) Asociatividad por la derecha:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(\forall R)((P\in \mathfrak{L}_{\phi} \wedge Q\in \mathfrak{L}_{\phi} \wedge R\in \mathfrak{L}_{\phi}) \rightarrow ((P+Q)\circ R)=P\circ R+Q\circ R)$$

Surge ahora la misma pregunta que en el caso de la suma: ¿existe un elemento neutro, en este caso para el producto?. Aquí el problema parece ser más complicado ya que al ser el producto una operación no conmutativa se podrían esperar que existiera un neutro por la izquierda y un neutro por la derecha.

Por otra parte, el o los problemas neutros del producto deberán ser tales que, en el caso izquierdo, por ejemplo, su dominio de resultados deberá ser exactamente el dominio de datos del problema por el que se lo multiplica y su condición debe aplicar cada elemento de ese dominio en sí mismo; algo equivalente debe ocurrir con el neutro por la derecha respecto del dominio de resultados del problema por el que será multiplicado.

Esto parece llevar a la desagradable situación de tener que admitir que existen dos neutros, uno por la izquierda y otro por la derecha para cada problema perteneciente a $\mathfrak{L}_{\phi}$.

Sin embargo, es un hecho que los dominios de datos y resultados de cualquier problema P de $\mathfrak{L}_{\phi}$ están incluídos en el conjunto $\mathfrak{U}$ y que la relación identidad $\acute{I}_{\mathfrak{U}}$ cumple obviamente con la condición de aplicar a todo elemento de $\mathfrak{U}$ -y por lo tanto de cualquier subconjunto de $\mathfrak{U}$- en sí mismo. Entonces, parece que un elemento neutro único, $\mathfrak{I}$, (tanto por la izquierda como por la derecha e igual para todos los problemas de $\mathfrak{L}_{\phi}$) podría tener como elementos: $D_{\mathfrak{I}}=\mathfrak{U}$, $R_{\mathfrak{I}}=\mathfrak{U}$, $q_{\mathfrak{I}}=\acute{I}_{\mathfrak{U}}$, $I_{\mathfrak{I}}=\mathfrak{U}$.

Ahora bien, antes de introducir el teorema que demuestra la condición de neutro del problema $\mathfrak{I}$, se debe demostrar que el mismo es un problema, entonces:

Teorema 3.3-

$$\vdash \mathfrak{I}=\langle \mathfrak{U},\mathfrak{U},\acute{I}_{\mathfrak{U}},\mathfrak{U}\rangle \rightarrow \mathfrak{I}\in \mathfrak{L}_{\phi}$$

y entonces, ahora sí:

Teorema 3.4-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow P \circ 1 = 1 \circ P = P$$

Teorema 3.5-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow P \circ 0 = 0)$$

4-SUBPROBLEMAS ADITIVOS-

En éste punto se analizará uno de los conceptos más importantes de ésta teoría algebráica de problemas, el del subproblema aditivo.

Este concepto es en sí muy sencillo, se dice que P es subproblema aditivo de Q si existe un tercer problema S tal que P+S=Q.

Por ejemplo, calcular las raíces de polinomios de segundo grado con coeficientes reales y calcular las raíces de polinomios de segundo grado con coeficientes imaginarios son subproblemas aditivos de calcular las raíces de polinomios de segundo grado.

El hecho de que P sea subproblema aditivo de Q se escribirá en adelante $P \subseteq Q$. Entonces :

Definición 4.1-

$$(\forall P)(\forall Q)((P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow P \subseteq Q \leftrightarrow (\exists S)(S \in \mathfrak{C}_\phi \wedge P+S=Q))$$

Ahora bien, dentro de la clase de los subproblemas aditivos de un problema dado existe una subclase de sumo interés, la de aquellos subproblemas que tienen la propiedad de que sus soluciones son soluciones del problema original. Este tipo de subproblemas aditivos se denominarán subproblemas completos de un problema dado y se simbolizarán de la forma $P \subseteq_c Q$.

Formalmente:

Definición 4.2-

Dados dos problemas P y Q se dice que P es subproblema completo de Q -que se simboliza $P \subseteq_c Q$ - ssi: P es subproblema de Q, su espacio de soluciones no es vacío y toda solución de P extendida fuera de D_P por cualquier función de D_Q en R_Q pertenece al espacio de soluciones de Q.

$$(\forall P)(\forall Q)((P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow$$

$$P \subseteq_c Q \leftrightarrow (P \subseteq Q \wedge \neg(\Omega_P = \emptyset) \wedge (\forall \sigma_P)(\forall f)(\sigma_P \in \Omega_P \wedge f \in R_Q^{\,DQ} \rightarrow (\sigma_P \cup f|_{DQ-DP}) \in \Omega_Q)))$$

Existe una definición alternativa del concepto de subproblema aditivo que si, como es el caso , se toma 4.2 como definición , se deriva de aquella como teorema:

Teorema 4.1-

Dados dos problemas P y Q, P es subproblema completo de Q ssi: P es subproblema de Q y coinciden sus dominios de instancias de interés.

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow P \subseteq_c Q \leftrightarrow P \subseteq Q \wedge I_P = I_Q))$$

La importancia de ésta clase de subproblemas aditivos reside en que para obtener una solución de un problema dado basta con resolver cualquiera de sus subproblemas completos y en particular cualquiera de aquéllos que no poseen ningún subproblema completo, es decir que poseen una sola solución, o, dicho en otras palabras, cuya condición es funcional y por lo tanto su única solución.

Una aplicación inmediata de éste concepto es la reenunciación de la reductibilidad entre problemas tratada en la teoría matemática de problemas.

En aquella se describe la reducción como una técnica de resolución de problemas en la que se conoce la solución de un segundo problema al que el primero es reducible. En este contexto, reducible significa que existen dos funciones, una a la que Veloso denomina de traduccion (τ) que tiene como dominio el dominio de datos del problema original y como rango el dominio de datos del problema que es reducción del primero y otra que denomina de recuperación (ρ) que tiene como dominio el dominio de resultados del problema alternativo y como rango el dominio de resultados del problema original. Entonces, según Veloso, la condición de reducibilidad es que la composición de la función de traducción con cualquier solución del problema alternativo con la función de recuperación sea una solución del problema original.

A la luz de esta teoría algebraica, la reducción no es más que un caso particular de interpolación con un dominio arbitrario. Si se entienden las funciones de traducción y recuperación como soluciones de sendos problemas, la condición de reducibilidad se puede enunciar como sigue : un problema P es reducible a otro Q sí existen dos problemas P_τ y P_ρ tales que el producto

$P_\tau \circ Q \circ P_\rho$ sea un subproblema completo de P.

Ahora bien, existe un conjunto muy interesante de problemas, el conjunto de subproblemas aditivos -que se denominará P_+ - de un problema dado P, cuya definicion formal es:

Definición 4.3-

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (\exists P_+)(\forall Q)(\, Q \mathrel{\underline{\Subset}} P \leftrightarrow Q\in P_+))$$

Para que un conjunto cualquiera A con una operación * forme un semireticulado superior es condicion necesaria y suficiente que el par $\langle A,*\rangle$ sea un semigrupo abeliano y que la operación * sea idempotente [26].

Si se analiza el par $\langle P_+,+\rangle$ se observara que :

i) $\langle P_+,+\rangle$ es un semigrupo dado que :

$$(\forall P)(\forall Q)((P\in P_+ \wedge Q\in P_+) \rightarrow P+Q\in P_+)$$

y por el Teorema 2.5 la suma es asociativa.

ii) es abeliano ya que por el Teorema 2.4 la suma es conmutativa.

iii) por el Teorema 2.6 la suma es idempontente.

Entonces se puede introducir el siguiente:

Teorema 4.2-

$$\vdash (\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow \langle P_+,+\rangle \text{ es un semireticulado superior})$$

Del cual los puntos i) , ii) e iii) constituyen la demostración.

El teorema siguiente demuestra una primera propiedad interesante de este semireticulado:

Teorema 4.3-

P *es el supremo del semireticulado superior de sus subproblemas aditivos.*

$$\vdash (\forall P)\ (\forall Q)\ (P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in P_+) \rightarrow P+Q=P)$$

Dicho en otras palabras P es el ideal del semigrupo $< P_+ ,+ >$.

Obviamente la suma de todos los elementos de P_+ es el problema P, por lo tanto se puede demostrar el siguiente :

Teorema 4.4-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow \Sigma_{x \in P+}\ x=P)$$

Ya se vió, que la suma de todos los problemas pertenecientes a P_+ es el problema P. Ahora bien, existen subconjuntos de P_+ tales que mantienen la propiedad de que su suma es P pero para los que ninguno de sus subconjuntos la mantiene. Dichos subconjuntos que se simbolizarán en adelante $\mathfrak{B}_{P_+}$ se denominarán "bases de P_+".

Para poder hablar formalmente de dichas bases se debe demostrar su existencia, por lo tanto:

Teorema 4.5-

Para todo problema P *existe por lo menos una base de su conjunto de subproblemas aditivos.*

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (\exists \mathfrak{B}_{P_+})(\mathfrak{B}_{P_+} \subseteq P_+ \wedge (\forall Q)(Q \in \mathfrak{B}_{P_+} \leftrightarrow$$
$$\neg(Q \trianglelefteq \Sigma_{x \in (\mathfrak{B}_{P+}) - \{Q\}}\ x) \wedge P = \Sigma_{x \in \mathfrak{B}_{P+}}\ x)))$$

Nada impide que los problemas pertenecientes a una base $\mathfrak{B}_{P_+}$ cualquiera tengan subproblemas aditivos, sin embargo existe una base tal que ninguno de sus problemas tiene subproblemas aditivos . Dicha base se denominará en lo sucesivo "base mínima" de P_+ y se simbolizará como ${}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$.

Como en el caso anterior se debe demostrar formalmente la existencia de dicha base mínima:

Teorema 4.6-

Para todo problema P *existe exactamente una base mínima de su conjunto de subproblemas aditivos.*

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (E!\ \mathfrak{B}_{P_+})(\mathfrak{B}_{P_+} = {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \leftrightarrow$$
$$(\forall Q)(\forall R)(R \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \wedge Q \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (Q \trianglelefteq R \rightarrow Q=R \vee Q=\emptyset))))$$

El siguiente teorema demuestra que la base mínima ${}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$, está formada por los subproblemas aditivos de P cuya condición y por lo tanto su única solución tiene un solo arco:

Teorema 4.7-

$$\vdash(\forall P)(P\in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_{N+}} \leftrightarrow \Omega_P=\{\sigma\} \wedge \#\sigma=1)$$

Teorema 4.8-

Todo problema perteneciente a una base $\mathfrak{B}_{P_+}$ tiene algún subproblema que pertenece a la base mínima ${}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$.

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_{\phi} \to (\forall S)(S\in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \to (\forall \mathfrak{B}_{P_+})(\exists R)(R\in\mathfrak{B}_{P_+})\wedge(S\leqq R))$$

Existe un subconjunto de P_+ que se introducirá formalmente, el de los subproblemas completos de P, que se denotará P_{C+}

Entonces:

Definición 4.5-

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_{\phi} \to (\exists P_{C+})(\forall Q)(P_{C+}\in \wp(\mathfrak{C}_{\phi}) \wedge Q\in \mathfrak{C}_{\phi} \to (Q\leqq_c P\leftrightarrow Q\in P_{C+})))$$

El siguiente teorema demuestra que P_{C+} mantiene la propiedad de que su sumatoria tenga como resultado P, entonces:

Teorema 4.9-

Dado un problema P la sumatoria de sus subproblemas completos es P.

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_{\phi} \to \Sigma_{x\in P_{C+}} x=P)$$

El semireticulado $\langle P_{C+},+\rangle$ también tiene bases, que se denominarán $\mathfrak{B}_{P_{C+}}$, lo que queda demostrado mediante el siguiente:

Teorema 4.10-

Dado un problema P existe por lo menos una base de su conjunto de subproblemas completos.

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_{\phi} \to (\exists \mathfrak{B}_{P_{C+}})(\mathfrak{B}_{P_{C+}} \subseteq P_{C+} \wedge$$
$$(\forall Q)(Q\in \mathfrak{B}_{P_{C+}} \leftrightarrow \neg(Q\leqq_c \Sigma_{x\in(\mathfrak{B}_{P_{C+}})-\{Q\}} x) \wedge P=\Sigma_{x\in\mathfrak{B}_{P_{C+}}} x)))$$

Como en el caso de P_+, existen bases $\mathfrak{B}_{Pc+}$ -salvo que en éste caso son varias- tales que ninguno de sus elementos posee subproblemas completos. Estas son obviamente las bases formadas por subproblemas completos de P cuyas condiciones son funcionales y por lo tanto tienen exactamente una solución. Formalmente:

Teorema 4.11-

Dado un problema P existe por lo menos una base mínima de su conjunto de subproblemas completos.

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (\exists \mathfrak{B}_{Pc+})(\mathfrak{B}_{Pc+} = {}^{\mu}\mathfrak{B}_{Pc+} \leftrightarrow (\forall R)(R\in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{Pc+} \rightarrow \#\Omega_R = 1)))$$

5-UNA PRIMERA APROXIMACION DE LA APLICACION DE LA TEORIA A LA EXPLICACION DE UNA TECNICA DE RESOLUCION DE PROBLEMAS.

Una de las técnicas de resolución de problemas más conocida y muy aplicada en la resolución mediante algoritmos, es la descomposición "top down".
Esta técnica se basa en descomponer el problema en subproblemas que se supone resueltos y encontrar una solución "abstracta" que los utilice.

Por ejemplo en el caso del problema del cálculo de las raíces de polinomios de segundo grado, se puede suponer que se cuenta con la solución problema del subproblema "calcular el discriminante". Entonces se encuentra una solución para el problema original "módulo" el subproblema "calcular el discriminante" -es decir sumándolo en un caso y restándolo en el otro- y luego se reemplazan la especificación de "calcular el discriminante" por un solución del mismo, quedando así resuelto el problema original de calcular las raíces de polinomios de segundo grado.

Esta técnica de resolución de problemas es utilizada en programación por otras técnicas como por ejemplo "programación con tipos abstractos de datos", la metodología de Jackson, "programación orientada a objetos", etc.
En cada uno de estos casos lo que se hace en realidad, es inducir mediante un predicado ad-hoc una partición de la condición del problema original en conjuntos de arcos con lo cuál se obtiene un subconjunto del conjunto de P_+ de subproblemas aditivos del problema original. Los subproblemas de este subconjunto tienen como condición cada uno de los subconjuntos de arcos pertenecientes a la partición inducida de la condición del problema original -obsérvese que esta partición genera un subsemireticulado de $\langle P_+,+\rangle$-.

Ahora bien, el problema abstracto que se plantea (por ejemplo el programa abstracto que utiliza a un tipo abstractos de datos) no es otra cosa que un problema cociente del problema original construído de la siguiente forma:

. La condición de éste problema tiene un arco por cada elemento de la partición inducida en la condición del problema original.
. El dominio de datos tiene un elemento por cada preimagen de cada uno de los elementos de la partición inducida en la condición del problema original.
. El dominio de resultados tiene un elemento por cada rango de cada uno de los elementos de la partición inducida en la condición del problema original.
. EL dominio de instancias de interés es el domino de datos.
. La clase de funciones admisibles es la clase funciones cociente de la clase del problema original respecto de la partición inducida por la nueva condición en el dominio de datos original.

Formalmente, éste problema abstracto , que se simbolizará como P_δ se define de la siguiente forma:

Definición 5.1-

$$(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (P_\delta =< D_{P\delta}, R_{P\delta}, q_{P\delta}, I_{P\delta} > \wedge \mathfrak{L}\subseteq P_+ \wedge \delta(\mathfrak{L}) \wedge$$
$$D_{P\delta} =\{x_Q : Q\in\mathfrak{L} \rightarrow x_Q=\mathfrak{I}_Q\} \wedge$$
$$R_{P\delta} =\{x_Q : Q\in\mathfrak{L} \rightarrow x_Q=\mathcal{R}(q_Q)\} \wedge$$
$$q_{P\delta} =\{<x_Q,y_Q> : Q\in\mathfrak{L} \rightarrow x_Q=\mathfrak{I}_Q \wedge y_Q= \mathcal{R}(q_Q)\} \wedge$$
$$I_{P\delta} =\{x_Q : Q\in\mathfrak{L} \rightarrow x_Q=\mathfrak{I}_Q\} \wedge)$$

El predicado δ es el que induce la partición q_P que genera el conjunto de subproblemas $\mathfrak{L}$ de P y contiene la parte "heurística" de la descomposición, en el caso de programar con tipos abstractos de datos dicha heurística consiste en establecer cuáles son los tipos convenientes para obtener un programa abstracto para problema dado; en el caso de la metodología de programación de Jackson esta heurística reside en la elección de las estructuras de datos de entrada y de salida y la relación entre ellas; en el caso de la solución del problema del cálculo de las raíces de polinomios de segundo grado, en la identificación del cálculo del discriminante como el subproblema de mayor relevancia dentro de dicho problema, etc.

Ahora bien, la justificación teórica de que el resultado de la solución del problema abstracto en la que se reemplazaron las especificaciones de los subproblemas por alguna solución de los mismos (el "cluster" en el caso de los tipos abstractos de datos, el código que corresponde a las hojas del árbol de Jackson, o el cálculo del discriminante en el caso del problema de cálculo de raíces) es una solución del problema original reside en el siguiente:

Teorema 5.1-

Dado un problema P y uno de sus problemas abstractos P_δ la sumatoria de los subproblemas de P representados por un "arco" de una solución de P_δ es un subproblema completo de P si el conjunto de subproblemas $\mathfrak{L}$ inducido por δ contiene una base $\mathfrak{B}_{P_+}$ del conjunto de subproblemas aditivos de P.

$$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge (\exists\, \mathfrak{B}_{P_+})(\mathfrak{B}_{P_+} \subseteq\mathfrak{L}) \rightarrow (\forall \sigma)(\sigma\in \Omega_{P\delta} \rightarrow (\Sigma_{Q\in J} Q) \;\underline{\triangleleft}_c P))$$

donde: $J=\{Q\in\mathfrak{L}\wedge <x_Q,y_Q>\in\sigma\}$

Obsérvese que esta fundamentación teórica de la descomposición "top down" permite dividir a la misma en una parte invariante formalizable y una parte heurística representada por el predicado δ que depende de cada una de las técnicas que utilizan dicha descomposición.

Si se desea explicar totalmente la descomposición "top-down" es evidente que se deberán obtener resultados como los aquí expuestos pero para subproblemas multiplicativos resultantes de la interpolación con dominios arbitrarios.

6-CONCLUSIONES.

En este trabajo se han tratado exhaustivamente las ideas fundamentales de problema, dominio de instancias de interés y contexto de admisibilidad; la de que una solución es una función total del dominio de datos en el dominio de resultados y que dentro del dominio de instancias de interés no es otra cosa que una función de Skolem de la condición del problema.

De esta última aseveración se infiere que resolver un problema es construir una función total de su dominio de datos en su dominio de resultados cuya restricción al dominio de instancias de interés sea una función de Skolem de su condición restringida también a ese dominio. Desgraciadamente el axioma de elección, que fundamenta la existencia de tal función, es solo eso, un axioma de existencia y por lo tanto no trata de la construcción de tales funciones.

Es por ello que se ha desarrollado un álgebra de problemas sobre las operaciones suma y producto para fundamentar: la descomposición de un problema en subproblemas basándose en su condición y la posterior composición de las soluciones de estos últimos, según la solución de un problema cociente, para obtener una solución del primero.

Como se habrá observado, si bién la operación suma y las nociones de subproblema aditivo y subproblema aditivo completo han sido tratadas en profundidad, falta desarrollar al mismo nivel la operación producto y la noción de subproblema multiplicativo.

Cuando se cuente con dichos desarrollos -que estan actualmente siendo llevados a cabo- se contará también con generalizaciones del torema 5.1 que no son otra cosa que explicaciones de como se construyen soluciones para estructuras cociente -abstracciones- de problemas obtenidas mediante la aplicación de predicados de descomposición resultantes de las distintas heurísticas de resolución de problemas.

Los autores creen que el problema de la programación es el de construir una solución recursiva y eficiente - en el sentido de la complejidad- para la condición -especificación- del problema que se desea resolver mediante un programa.

Que, por lo tanto, el proceso de desarrollo de software se compone de una serie de: traducciones entre modelos de un sistema formal del cual la teoría algebraica aqui expuesta constituye el modelo standard, descomposiciones, construcción de soluciones para los subproblemas obtenidos asi como para el correspondiente problema abstracto y composiciones con nuevas traducciones.

Que la interpretación de, por ejemplo, la operación suma en cada uno de dichos modelos especifica la secuencialidad o paralelismo de la especificación asi como la secuencialidad o concurrencia de la solución -programa- de dicha especificación.

Amén de los desarrollos tendientes a completar esta teoría algebraica, los autores se hallan actualmente abocados al desarrollo de un cálculo -basado en la misma- con el que se intenta construir un metamodelo del proceso de desarrollo de software.

APENDICE-DEMOSTRACION DE TEOREMAS:

Teorema 1.1

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_{\lambda} \rightarrow (P \text{ es viable} \leftrightarrow \mathfrak{I}_P \subseteq \mathfrak{D}(q_p)))$$

Demostración: Trivial

Teorema 1.2-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_{\lambda} \rightarrow (P \text{ es viable} \leftrightarrow P \text{ es soluble}))$$

Demostración: Trivial

Teorema 1.3-

$$(\forall P)(P \in \mathfrak{C}_{\phi} \rightarrow (P \text{ es } \alpha\text{-soluble} \leftrightarrow \Psi_P \neq \emptyset))$$

Demostración: Trivial

Corolario 1.4-

$$\vdash (\forall B)(\forall A)(\forall \mathfrak{l})(\mathfrak{l} \subseteq B \times A \wedge \mathfrak{D}(\mathfrak{l}) = B) \rightarrow (\{f : f \in A^B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow \mathfrak{l}(x, f(x)))\} =$$
$$\{f : (\exists z)(z \in \mathsf{X}_{y \in B} \{\omega : \omega \in \mathfrak{l} \wedge \pi_1(\omega) = y\} \wedge f = \bigcup_{y \in B} \{\pi_y(z)\})\})$$

Demostración: Ver texto.

Teorema 1.5-

$\vdash(\forall P)(P\in \mathfrak{C}_{\phi}\rightarrow$

$$\Omega_P=\{\sigma:(\exists\xi)(\xi\in \times_{d\in D_P}\{x:x\in q_P \vee \neg(\pi_1(x)\in I_P)\wedge \pi_1(x)=d\}\wedge(\sigma=\bigcup_{d\in D_P}\{\pi_d(\xi)\})))\})$$

Demostración: Ver texto.

Lema 2.1-

$\vdash(\forall f)(\forall g)(\forall T)(\forall V)(f\in \mathfrak{U}^T\wedge g\in \mathfrak{U}^V\rightarrow$

$$\tau(f,g)=\{\sigma:(\exists\xi)((\xi\in \times_{d\in T\cup V}\{x:x\in(f\cup g)\wedge \pi_1(x)=d\})\wedge \sigma=\bigcup_{d\in T\cup V}\{\pi_d(\xi)\}))\}$$

Demostración: Trivial

Teorema 2.1-

$$\vdash(\forall f)(\forall g)(\forall T)(\forall V)(f\in \mathfrak{U}^T\wedge g\in \mathfrak{U}^V \wedge T\subseteq \mathfrak{U} \wedge V\subseteq \mathfrak{U}\rightarrow \zeta(f,g)=\tau(f,g))$$

Demostración:

i) Sea $h\in\zeta(f,g)$. Entonces $h\in \mathfrak{U}^{T\cup V}$ y para cada $x\in h$, $x\in f$ o $x\in g$, de donde.

Luego, por la Definición 2.6, $h\in\zeta(f,g)$ y en consecuencia $\zeta(f,g)\subseteq\tau(f,g)$.

ii)Sea $h\in\zeta(f,g)$. Entonces $h\in \mathfrak{U}^{T\cup V}$ y

$h(x)=f(x)$ para $x\in T-V$

$h(x)=g(x)$ para $x\in V-T$.

Sea $W=V\cap T$ y $K=\{x:x\in W\wedge h(x)=g(x)\}$.

Asi,

$h(x)=g(x)$ para $x\in K$ y

$h(x)=f(x)$ para $x\in W-K$.

En consecuencia :

$h(x)=f(x)$ para $x\in T-K$ y

$h(x)=g(x)$ para $x\in V-T\cup K$

de donde

$h=f+_K g$

luego $h\in\zeta(f,g)$ y en consecuencia $\tau(f,g)\subseteq\zeta(f,g)$

De (i) y (ii) se sigue $\tau(f,g)=\zeta(f,g)$

Q.E.D.

Lema 2.2-

$\vdash(\forall P)(\forall Q)(P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow$

$$\tau(\psi)=\{\sigma:(\exists\xi)(\xi\in \mathbb{X}_{d\in D_{P+Q}}\{x:x\in(\pi_1(\psi)\cup\pi_2(\psi))\wedge\pi_1(x)=d\}\wedge(\sigma=\bigcup_{d\in D_{P+Q}}\{\pi_d(\xi)\}))\})$$

Demostración: Trivial

Corolario 1-

$$\vdash(\forall P)(\forall Q)(P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow \zeta(\psi)=\tau(\psi))$$

Demostración: Trivial

Corolario 2-

$$\vdash(\forall P)(\forall Q)(P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow \eta(\psi)=\zeta(\psi)\cap \mathcal{A}_{\alpha,P+Q})$$

Demostración: Trivial

Teorema 2.2-

$$\vdash(\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow \Omega_{P+Q}=\bigcup_{\psi\in\Omega_P\times\Omega_Q}\zeta(\psi))$$

Demostración: Siendo como es notorio equivalente utilizar $\tau(\psi)$ en lugar de $\zeta(\psi)$ se debe demostrar la doble inclusión entre Ω_{P+Q} y $\bigcup_{\psi\in\Omega_P\times\Omega_Q}\tau(\psi)$.

Se denominará A_d al conjunto $\{x:x\in(\sigma_P\cup\sigma_Q)\wedge\pi_1(x)=d\}$ y B_d al conjunto $\{x:(x\in q_{P+Q}\vee\neg\pi_1(x)\in I_{P+Q})\wedge\pi_1(x)=d\}$.

i) Dado $\sigma\in\tau(\psi)$, para $\psi\in\Omega_P\times\Omega_Q$, se tiene que existe $\xi\in\mathbb{X}_{d\in D_{P+Q}}A_d$ y $\sigma=\bigcup_{d\in D_{P+Q}}\{\pi_d(\xi)\}$. Así, si se muestra que $\xi\in\mathbb{X}_{d\in D_{P+Q}}B_d$ entonces quedará demostrado que $\sigma\in\Omega_{P+Q}$ y en consecuencia $\tau(\psi)\subseteq\Omega_{P+Q}$.

Puesto que dadas dos familias $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, se cumple que:

$$(\forall i)((i\in I\wedge X_i\subseteq Y_i)\rightarrow \mathbb{X}_{i\in I}X_i\subseteq\mathbb{X}_{i\in I}Y_i).$$

basta mostrar que, para cada $d\in D_{P+Q}$ se cumple que $A_d\subseteq B_d$

Ahora bién:

$$x\in A_d\rightarrow(\exists\sigma_P)(\exists\sigma_Q)(\sigma_P\in\Omega_P\wedge\sigma_Q\in\Omega_Q\wedge(x\in\sigma_P\vee x\in\sigma_Q))$$

y como:

$$x\in\sigma_P\rightarrow x\in q_P\vee\neg\pi_1(x)\in I_P \quad \text{y}$$

$$x\in\sigma_Q\rightarrow x\in q_Q\vee\neg\pi_1(x)\in I_Q$$

se tiene que $x\in B_d$, de donde $\mathbb{X}_{d\in D_{P+Q}}A_d\subseteq\mathbb{X}_{d\in D_{P+Q}}B_d$.

Como ψ es arbitrario, se tiene que:

$$(\forall \psi)(\tau(\psi) \subseteq \Omega_{P+Q})$$

Luego $\bigcup_{\psi \in \Omega P \times \Omega Q} \tau(\psi) \subseteq \Omega_{P+Q}$

ii) Sea $X \in B_d$. Por definición de q_{P+Q} e I_{P+Q} se tiene:

a) $(X \in q_P \vee \neg\pi_1(X) \in I_P) \wedge \pi_1(X)=d$

o

b) $(X \in q_Q \vee \neg\pi_1(X) \in I_Q) \wedge \pi_1(X)=d$

de (a) se sigue:

$$(\exists \sigma_P)(\sigma_P \in \Omega_P \wedge X \in \sigma_P \wedge \pi_1(X)=d)$$

y de (b):

$$(\exists \sigma_Q)(\sigma_Q \in \Omega_Q \wedge X \in \sigma_Q \wedge \pi_1(X)=d)$$

En consecuencia:

$$B_d \subseteq \{X:(\exists \sigma_P)(\exists \sigma_Q)(\sigma_P \in \Omega_P \wedge \sigma_Q \in \Omega_Q \wedge (X \in \sigma_P \vee X \in \sigma_Q) \wedge \pi_1(X)=d)\}$$

de donde:

$$B_d \subseteq \bigcup_{\langle \sigma P, \sigma Q\rangle \in \Omega P \times \Omega Q} \{X: X \in (\sigma_P \cup \sigma_Q) \wedge \pi_1(X)=d\}$$

Como:

$$\mathop{\times}_{d \in D_{P+Q}} \bigcup_{\langle \sigma P, \sigma Q\rangle \in \Omega P \times \Omega Q} \{X: X \in (\sigma_P \cup \sigma_Q) \wedge \pi_1(X)=d\} = \bigcup_{\langle \sigma P, \sigma Q\rangle \in \Omega P \times \Omega Q} \mathop{\times}_{d \in D_{P+Q}} \{X: X \in (\sigma_P \cup \sigma_Q) \wedge \pi_1(X)=d\}$$

Entonces:

$$\mathop{\times}_{d \in D_{P+Q}} B_d \subseteq \bigcup_{\langle \sigma P, \sigma Q\rangle \in \Omega P \times \Omega Q} \mathop{\times}_{d \in D_{P+Q}} A_d$$

De donde:

$$\Omega_{P+Q} \subseteq \bigcup_{\psi \in \Omega P \times \Omega Q} \tau(\psi)$$

Q.E.D.

Teorema 2.3-

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow \Psi_{P+Q} = \bigcup_{\psi \in \Omega P \times \Omega Q} \eta(\psi))$$

Demostración: Trivial

Teorema 2.4-

i) Unicidad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow (E!S)(S \in \mathfrak{C}_\phi \wedge S=P+Q))$$

ii) Conmutatividad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow (P+Q=Q+P))$$

iii) Asociatividad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(\forall R)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi \wedge R\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow (P+(Q+R)=(P+Q)+R))$$

iv) Idempotencia:

$$\vdash (\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow P+P=P)$$

Demostración: Trivial

Teorema 2.5-

$$\vdash \mathbf{0}=\langle \emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset\rangle \rightarrow \mathbf{0}\in \mathfrak{C}_\phi$$

Demostración: Trivial

Teorema 2.6-

$$\vdash (\forall P)(P\in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow P+\mathbf{0}=\mathbf{0}+P=P$$

Demostración: Trivial

Teorema 3.1-

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow \{f:\sigma\in \Omega_{P\circ Q} \wedge f=\sigma|_{I_P}\}=\Omega_{S_{P\circ Q}})$$

Demostración: Trivial

Teorema 3.2-

i) Unicidad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P\in \mathfrak{C}_{\alpha,\phi} \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow (E!S)(S\in \mathfrak{C}_\phi \wedge S=P\circ Q))$$

ii) Distributividad:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(\forall R)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi \wedge R\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow (P\circ(Q\circ R)=(P\circ Q)\circ R))$$

iii) Asociatividad por la izquierda:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(\forall R)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi \wedge R\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow (P\circ(Q+R)=P\circ Q+P\circ R)$$

iv) Asociatividad por la derecha:

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)(\forall R)((P\in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q\in \mathfrak{C}_\phi \wedge R\in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow ((P+Q)\circ R)=P\circ R+Q\circ R)$$

Demostración: Trivial

Teorema 3.3-

$$\vdash \mathbf{1}=\langle \mathfrak{U},\mathfrak{U},I_{\mathfrak{U}},\mathfrak{U}\rangle \rightarrow \mathbf{1}\in \mathfrak{C}_\phi$$

Demostración: Trivial

Teorema 3.4-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow P\circ \mathbf{1} = \mathbf{1}\circ P = P$$

Demostración: Trivial

Teorema 3.5-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow P\circ \mathbf{O} = \mathbf{O})$$

Demostración: Trivial

Teorema 4.1-

$$\vdash (\forall P)(\forall Q)((P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in \mathfrak{C}_\phi) \rightarrow P \trianglelefteq_c Q \leftrightarrow P \trianglelefteq Q \wedge \mathcal{I}_P = \mathcal{I}_Q))$$

Demostración: Trivial

Teorema 4.2-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow \langle P_+, + \rangle \text{ es un semireticulado superior})$$

Demostración: Ver texto.

Teorema 4.3-

$$\vdash (\forall P)\ (\forall Q)\ (P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge Q \in P_+) \rightarrow P + Q = P)$$

Demostración: Trivial

Teorema 4.4-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow \Sigma_{x \in P+}\ x = P)$$

Demostración: Trivial

Teorema 4.5-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (\exists \mathfrak{B}_{P+})(\mathfrak{B}_{P+} \subseteq P_+ \wedge (\forall Q)(Q \in \mathfrak{B}_{P+} \leftrightarrow$$

$$\neg(Q \trianglelefteq \Sigma_{x \in (\mathfrak{B}P+) - \{Q\}}\ x) \wedge P = \Sigma_{x \in \mathfrak{B}P+}\ x\ )))$$

Demostración:

Sea $q_P \neq \varnothing$ y $\Pi(q_P)$el conjunto de todas sus particiones. Es bién conocido [26] que $\langle \Pi(q_P), \subseteq \rangle$ es un reticulado con $\mathbf{inf}\ \Pi(q_P) = \bigcap_{x \in \Pi(q_P)} x$ (i.e. la partición más fina de q_P). Sea $^{\mu}q_P = \mathbf{inf}\ \Pi(q_P)$.

Considérese el conjunto de problemas

$^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} = \{R\colon (\forall q)(q \in {}^{\mu}q_P \rightarrow R = \langle \mathfrak{D}(q), \mathcal{R}(q), q, \mathcal{I}_P \cap \mathfrak{D}(q)\rangle)\}$.

Entonces:

i) Como es notorio $^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \subseteq P_+$

ii) Sea $Q \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$, $L = {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} - \{Q\}$ y $S = \Sigma_{x \in L}\ x$. Entonces $\neg(q_Q \subseteq q_S)$, pues $q_S = \bigcup_{x \in L} q_x$ y $^{\mu}q_P$ es una partición de q_P.

iii) Sea T la sumatoria de todos los problemas pertenecientes a ${}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$.

Por ser q_p total y ${}^{\mu}q_p$ una de sus particiónes, se tiene $T=P$.

Luego ${}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$ es una base de P_+

Q.E.D.

Teorema 4.6-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{L}_\phi \to (E!\,\mathfrak{B}_{P_+})(\mathfrak{B}_{P_+} = {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \leftrightarrow$$

$$(\forall Q)(\forall R)(R \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \wedge Q \in \mathfrak{L}_\phi \to (Q \subseteqq R \to Q=R \vee Q=\emptyset))))$$

Demostración:

Considérese ${}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$ del teorema 4.5 y sea $Q \in \mathfrak{L}_\phi$.

Supóngase que $Q=\emptyset$ y $Q \subseteqq R$ para $R \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$. Entonces debe existir $S \in \mathfrak{L}_\phi$, tal que $Q+S=R$.

Luego $q_S \subseteq q_R$ y $q_Q \subseteq q_R$ y obviamente $q_S \subseteq q_P$ y $q_Q \subseteq q_P$, pero siendo $q_R \in {}^{\mu}q_P$ debe ocurrir $q_S = \emptyset$ y $q_Q = q_R$.

Se sigue de inmediato que $Q=R$.

La unicidad de ${}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$ se sigue de la de ${}^{\mu}q_P$.

Q.E.D.

Teorema 4.7-

$$\vdash (\forall P)(P \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_{N+}} \leftrightarrow \Omega_P = \{\sigma\} \wedge {}^{\#}\sigma = 1)$$

Demostración: Trivial, razonando sobre ${}^{\mu}q_p$.

Teorema 4.8-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{L}_\phi \to (\forall S)(S \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \to (\forall \mathfrak{B}_{P_+})(\exists R)(R \in \mathfrak{B}_{P_+}) \wedge (S \subseteqq R))$$

Demostración:

$$S \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \wedge (\exists \mathfrak{B}_{P_+})(\forall R)(R \in \mathfrak{B}_{P_+}) \wedge \neg(S \subseteqq R)$$

De los Teoremas 4.6 y 4.7 se deduce que para todo problema S incluído en ${}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}$, q_S tiene un solo arco, entonces:

$$\neg(S \subseteqq \Sigma_{x \in \mathfrak{B}_{Pn+}} x)$$

luego, por el Teorema 4.5:

$$\neg(S \trianglelefteq P)$$

por lo tanto:

$$\neg(S \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+})$$

Q.E.D.

Teorema 4.9-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow \Sigma_{x \in P_{c+}} x = P)$$

Demostración: Trivial

Teorema 4.10-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \rightarrow (\exists \mathfrak{B}_{P_{c+}})(\mathfrak{B}_{P_{c+}} \subseteq P_{c+} \wedge$$

$$(\forall Q)(Q \in \mathfrak{B}_{P_{c+}} \leftrightarrow \neg(Q \trianglelefteq_c \Sigma_{x \in (\mathfrak{B}_{P_{c+}}) - \{Q\}} x) \wedge P = \Sigma_{x \in \mathfrak{B}_{P_{c+}}} x)))$$

Demostración:

Si $I_P = \emptyset$, del teorema 4.1 se sigue que toda base de P_+ es una base de subproblemas completos.

Si $I_P \neq \emptyset$, considérese la función $h: {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \rightarrow P_+$ definida por:

$$h(Q) = C \text{ si } I_Q \neq \emptyset$$

$$h(Q) = Q \text{ si } I_Q = \emptyset$$

donde $C = \Sigma_{x \in L} x$ para $L = \{x : x \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \wedge I_x \neq \emptyset\}$

Entonces:

i) Como es notorio $h({}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}) \subseteq P_+$

ii) $(\forall Q)(Q \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} \rightarrow Q \trianglelefteq h(Q) \rightarrow (\Sigma_{Q \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P+}} Q = P \rightarrow \Sigma_{Q \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P+}} h(Q) = P))$

iii) Llamando $\mathfrak{B}'_{P_+} = h({}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+}) = \{C\} \cup \{Q : Q \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_+} - L\}$, se tiene que $\{q_Q : Q \in \mathfrak{B}'_{P_+}\}$ es una partición de q_P.

Razonando igual que en la demostración del teorema 4.5 se sigue que $\mathfrak{B}'_{P_+}$ es una base de P_+ .

iv) C es un subproblema completo de P, pues $C \trianglelefteq P$ y $I_C = I_P$.

Defínase, ahora, el conjunto

$\mathfrak{B}''_{P_+} = \mathfrak{B}'_{P_+}$ si $\mathfrak{B}'_{P_+} = \{C\}$

$\mathfrak{B}''_{P_+} = \{Q + C : Q \in \mathfrak{B}'_{P_+} - \{C\}\}$ si $\mathfrak{B}'_{P_+} \neq \{C\}$

Si $\mathfrak{B}''_{P_+} = \{C\}$ entonces $C = P$ y se obtiene la tesis. En caso contrario se tiene:

a) Razonando análogamente que en (i) y (ii) se sigue que $\Sigma_{x\in \mathfrak{B}''_{P+}} x = P$

b) De (iv) se sigue que todo R en $\mathfrak{B}''_{P+}$ es un subproblema completo de P

c) Puesto que $\{q_R - q_C : R \in \mathfrak{B}''_{P+}\}$ es una partición de $q_P - q_C$ se tiene que ,

para todo $R \in \mathfrak{B}''_{P+}$ se cumple que $\neg(\, q_R \subseteq \bigcup_{x\in \mathfrak{B}''_{P+} - \{R\}} x)$, de donde

$\neg(R \trianglelefteq \Sigma_{x\in \mathfrak{B}''_{P+} - \{R\}} x)$.

Luego, $\mathfrak{B}''_{P+}$ es una base de subproblemas completos de P_+ .

Q.E.D.

Teorema 4.11-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \to (\exists \mathfrak{B}_{P_{C+}})(\, \mathfrak{B}_{P_{C+}} = {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_{C+}} \leftrightarrow (\forall R)(R \in {}^{\mu}\mathfrak{B}_{P_{C+}} \to \# \Omega_R = 1)))$$

Demostración:

Considérese el conjunto de funciones $\mathfrak{F}_{q_P}$ de todas las funciones incluídas en q_P y

el conjunto de problemas $K = \{P_\sigma : \sigma \in \mathfrak{F}_{q_P} \wedge P_\sigma = \langle D_P, R_P, \sigma, I_P \rangle\}$.

Demostrar el teorema 4.11 es equivalente a demostrar que existe un subconjunto de K que es una base de P_{C+}. Es entonces trivial que el enunciado de teorema es equivalente a:

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \to$$

$$(\exists \mathfrak{X})(\forall f)(\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_{q_P} \wedge f \in \mathfrak{X} \to (\bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}} \sigma = q_P \wedge \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}-\{f\}} \sigma \subset \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}} \sigma)))$$

Supóngase que el consecuente es falso, entonces será verdadero que:

$$(\forall \mathfrak{X})(\exists f)(\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_{q_P} \wedge f \in \mathfrak{X} \wedge (\bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}} \sigma \neq q_P \vee \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}-\{f\}} \sigma = \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}} \sigma))$$

O, lo que es equivalente:

$$(\forall \mathfrak{X})(\exists f)(\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_{q_P} \wedge f \in \mathfrak{X} \wedge (\bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}} \sigma = q_P \to \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}-\{f\}} \sigma = \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}} \sigma))$$

Ahora bién, por modus ponens es:

$$(\forall \mathfrak{X})(\exists f)(\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_{q_P} \wedge f \in \mathfrak{X} \wedge (\bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}-\{f\}} \sigma = \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{X}} \sigma)$$

Sea $P \in K$, entonces q_P es a la vez un conjunto unitario y vacío.

Q.E.D.

Teorema 5.1-

$$\vdash (\forall P)(P \in \mathfrak{C}_\phi \wedge (\exists \mathfrak{B}_{P_+})(\, \mathfrak{B}_{P_+} \subseteq \mathfrak{L}) \to (\forall \sigma)(\sigma \in \Omega_{P_S} \to (\Sigma_{Q\in J} Q) \trianglelefteq_c P))$$

donde: $J = \{Q \in \mathfrak{L} \wedge \langle x_Q, y_Q \rangle \in \sigma\}$

Demostración:

Negando el consecuente se tiene:

$$(\exists \sigma)(\sigma \in \Omega_{P_S} \wedge (\Sigma_{Q\in J} Q) \neg \trianglelefteq_c P\,)$$

por el Teorema 4.1 y la Definición 2.9, la expresión anterior implica:

$$(\exists \sigma)(\sigma \in \Omega_{P\delta} \wedge \bigcup_{Q \in J} I_Q \neq I_P)$$

como P es el supremo de semireticulado $\langle P_{C+}, + \rangle$, se tiene:

$$\bigcup_{Q \in J} I_Q \neq I_P \rightarrow \bigcup_{Q \in J} I_Q \subset I_P$$

ahora bién, como J es un subconjunto de $\mathcal{L}$ tal que los pares $\langle x_Q, y_Q \rangle$ inducidos por la Definición 5.1 pertenecen a una solución de P_δ y por lo tanto a una función total sobre $I_{P\delta}$ entonces:

$$\bigcup_{Q \in J} I_Q = \bigcup_{Q \in \mathcal{L}} I_Q$$

por lo tanto la negación del consecuente del Teorema 5.1 implica:

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{L}} I_Q \subset I_P$$

entonces:

$$(\exists d)(d \in I_P \rightarrow \neg(d \in \bigcup_{Q \in \mathcal{L}} I_Q))$$

por lo tanto, se puede construir un problema atómico (es decir, perteneciente a la base mínima de P_+) que cumpla:.

$$(\exists S)(\forall Q)(S \in {}^{\mu}\mathcal{B}_{P_+} \wedge \pi_1(q_S) = d \wedge Q \in \mathcal{L} \rightarrow \neg(S \trianglelefteq Q))$$

pero de la expresión anterior y del Teorema 4.8 se tiene:

$$(\forall \mathcal{B}_{P_+})(\forall K)(K \subseteq \mathcal{L} \rightarrow K \neq \mathcal{B}_{P_+})$$

Q.E.D.

REFERENCIAS-

[1] **Lehman M., M.**, "The Role of Executable Metric Models in the Programming Process", Proc. IEEE Workshop on Rapid Prototyping, Columbia, Maryland, Apr. 1982. Publ. Software Eng. Notes, Vol. 7, N° 5, Dec. 1982, pp. 106-111.

[2] **Lehman M., M.**, "Program Evolution", ICST Res. Rep.,82/1.

[3] **Lehman M., M., Stenning V.** and **Turski W., M.**, "Another Look at Software Desing Methodology", ICST DoC Res. Rep., 83/13, London SW7 2BZ, Jun 1983, 25 p.

[4] **Lehman M., M.**, "Program Evolution, Programming Process, Programming Support", Sonderdruck Attached to Programmierungmgebungen und Compier, Bericht 18a, Tagung 1/1984, German Chapter ACM, 2-4 May 1984, Munich, 12 p.

[5] **Lehman M., M.**, "A Further Model of Coherent Programming Process", IEEE Proceedings of Software Process Workshop, UK Feb 1984, IEEE Comp. Soc.,1984.

[6] **Turski, W., M.**, "The Design of Large Programms", Software Engineering Entwurf und Spezifikation, Floyd and Kopetz, Teubner Ver. 1981, pp. 94-126.

[7] **Maibaum, T., S., E.** and **Turski, W., M.**, "On What Exactly is Going On When Software is Developed Step by Step", Proc. 7th ICSE, Orlando, FA. March 1984. Publ. IEEE Comp. Soc., Silver Spring, MA. IEEE cat. no. 84ch2011-5, pp 525-533.

[8] **Sintzoff, M.**, "Exploratory Proposals for a Calculus of Software Development", Rep. 84/2, Unité d' Informatique, Univ. Louvain, 1984.

[9] **Sintzoff, M.**, "Understanding and Expressing Software Construction", ASI F8. Springer, Berlin, 1984.

[10] **Sintzoff, M.**, "Desiderata for a Design Calculus", UCL, T3 Memo, Unité d' Informatique, Univ. Louvain, June 1985.

[11] **Sintzoff, M.**, "Playing With a Recursive Design Calculus", UCL, T3 Memo, Unité d' Informatique, Univ. Louvain, 1986.

[12] **Jähnichen, S.**, **Ali Hassain, F.** and **Weber, M.**, "Program Development Using a Design Calculus", GMD Forschungsstelle an der Universität Karlsruhe, 1986.

[13] **Suppes, P.**, "Axiomatic Set Theory", D. Van Nostrand Company Inc., New York, 1961.

[14] **Polya, G.**, "How to Solve it: a new Aspect of the Mathematical Method", Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.

[15] **Polya, G.**, "Mathematics and Plausible Reasoning", Princeton Univ. Press, Princeton, 1954.

[16] **Polya, G.**, "Mthematical Discovery: on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving", Wiley, New York, 1962.

[17] **Veloso, P., A., S.**, "Divide and Conquer via Data Types", Anales de la VII Conferencia Latinoamericana de Informática, Caracas, Venezuela, Jan. 1980, pp. 530-539.

[18] **Veloso, P., A., S.**, "A Problem-Theoretical Equivalent of AC", Spring Meeting of the Association for Symbolic Logic, San Francisco, USA, Jan. 1981.

[19] **Veloso, P., A., S.**, "On a Mathematical Theory of Problems", 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Salzburg, Aust., Jun. 1983.

[20] **Veloso, P., A., S., Lopes, M., A.**, "A Framework for Problem Solving: Theory and Methodology", G. E. Lasker Editor, Applied Systems and Cybernetics, Pergamon Press, Oxford, Engl., 1981.

[21] **Veloso, P., A., S., Lopes, M., A.**, "Problem Solvability via Homomorphism and Analogy", Proc. 10th International Congress on Cybernetics, Namur, 1983.

[22] **Veloso, P., A., S., Martins, R., C., B.**, "On Reductibilities Among General Problems", R. Trappl Editor, Cybernetics and Systems Research 2, North Holland, Amsterdam, 1984, pp. 21-25.

[23] **Veloso**, P., A., S., **Veloso**, S., R., M., "Problem Decomposition and Reduction: Applicability, Soundness, Completeness", R. Trappl, J. Klir, F. Pichler Editors, Progress in Cybernetics and Systems Research, Vol. VIII, Hemisphere, Washington, 1981, pp. 199-203.

[24] **Veloso**, P., A., "Aspetos de uma Teoría Geral de Problemas", Tech. Rep., Dep. Inf., Pontificia Universidad de Rio do Janeiro, Brasil, 1982.

[25] **Shoenfield**, J., R., "Mathematical Logic", Reading, Mass., Addison-Wesley, 1967.

[26] **Burris**, S., and **Sankappanavar**, H., P., "A Course in Universal Algebra", Springer Verlag, 1980.