

PUC

---

Séries: Monografias em Ciência da Computação,  
No. 14/89

FÓRMULAS DE GREEN PARA OPERADORES LINEARES RELACIONADAS COM UMA  
OU DUAS INTEGRAIS DE CONTOURNO

Fernando S. Lima

Departamento de Informática

---

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO  
RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 - CEP-22453  
RIO DE JANEIRO - BRASIL

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO  
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

SÉRIE: MONOGRAFIAS EM CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO  
N. 14/89 *pub.*  
EDITOR: Paulo A. S. Veloso

FÓRMULAS DE GREEN PARA OPERADORES LINEARES  
RELACIONADAS COM UMA OU DUAS INTEGRAIS  
DE CONTORNO

*Por*

*Fernando Soares de Lima*

*Trabalho parcialmente subvencionado pelo  
Conselho Nacional de Pesquisas  
CNPq.*

RIO DE JANEIRO  
1989

Responsável pelas Publicações:

Rosane T. L. Castilho

Assessoria de Biblioteca, Documentação e Informação.  
PUC-RJ - Departamento de Informática  
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea.  
22453 Rio de Janeiro  
BRASIL

### Abstract

A detailed survey on the construction of the 1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> Green's formulas is presented. The Gauß Theorem is given, to prove systematically all of the formulas in order to collect them in a set of basic concepts which can be applied in theoretical and practical development of Continuum Mechanics, Physics and Computational Mathematics (Finite Element Method). To the variational formulation for Diaz and Greenberg's method of inclusion a special treatment is carried out in detail, where Green's Formulas with two boundary integrals are applied.

Key-Words: Green's formulas, Gauß Theorem, Continuum Mechanics, Physics, Computational Mathematics, Finite Element Method, Variational Formulation, Diaz and Greenberg's Method.

### Resumo

Um estudo detalhado sobre construção das 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> fórmulas de Green é apresentado. Foi considerado o Teorema de Gauß, para provar sistematicamente todas as fórmulas, com a finalidade de reuni-las numa coleção de conceitos básicos que podem ser aplicados em desenvolvimentos teóricos e práticos da Mecânica do Contínuo, Física e Matemática Computacional (Método dos Elementos Finitos). À formulação variacional do método do confinamento de Diaz e Greenberg é dado um tratamento especial detalhado, onde fórmulas de Green com duas integrais de contorno são empregadas.

Palavras Chaves: Fórmulas de Green, Teorema de Gauß, Mecânica do Contínuo, Física, Matemática Computacional, Método dos Elementos Finitos, Formulação Variacional, Método de Diaz e Greenberg.

## Prefácio

As fórmulas de Green, que não devemos confundir com funções de Green, são ferramentas fundamentalmente necessárias para o tratamento da Física Matemática e naturalmente também da Matemática Aplicada.

A aplicação particular das fórmulas de Green abrange, obviamente, a Mecânica do Contínuo em casos, por exemplo, do princípio do mínimo da energia potencial ou do valor estacionário da energia complementar, básicos no desenvolvimento da formulação variacional de problemas de valor de contorno. A formulação variacional é ponto de partida de vários procedimentos numéricos para encontrar a solução aproximada de um dado problema.

Parece-nos, entretanto, não ser comum uma formação regular nesse assunto para muitos que trabalham com problemas de Engenharia, envolvendo Mecânica do Contínuo, por exemplo, para os quais o conhecimento da Matemática Computacional é de fundamental valor. Nesse enfoque aparecem os problemas computacionais de grande porte, que, ao nosso ver, podem apresentar, em geral, obstáculos ou até mesmo podem constituir um desafio à capacitação individual em relação ao reconhecimento das características de aplicabilidade e de aproveitamento eficiente das metodologias disponíveis (Elementos Finitos e outros).

Assim sendo resolvemos já em 1986 iniciar essa pesquisa, que a partir de 1987 foi parcialmente subvencionada pelo CNPq com o objetivo de constituir esta monografia para levar conceitos básicos de análise, de maneira direta e sucinta ao conhecimento daqueles que usam técnicas fundamentadas nos assuntos ora desenvolvidos e que não tenham tido a oportunidade de passar por uma formação regular na matéria.

Este trabalho trata de fornecer conceitos analíticos básicos sobre a construção das 1ª, 2ª e 3ª fórmulas de Green, as quais são aqui estudadas minuciosamente e reunidas num inventário, onde inúmeros teoremas são apresentados e demonstrados.

A nossa principal contribuição se liga, entretanto, à construção da 3ª fórmula de Green com duas integrais de contorno para a solução fundamental da placa delgada engastada e o estudo teórico sobre confinamento de funcionais lineares, onde a formulação variacional do método de Diaz-Greenberg foi o principal objeto de aplicação.

Deixamos aqui registrados os nossos sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. V. Ruas<sup>1</sup> pela leitura e correção do manuscrito bem como pelo incentivo que nos tem dado. Somos gratos ao CNPq pelo apoio financeiro parcial e queremos ressaltar a nossa gratidão ao Cel. Av. Dr. R. dos Santos<sup>2</sup> e ao Dr. A. Menezes<sup>3</sup>, por haverem

<sup>1</sup>Instituto de Informática - PUC - Rio de Janeiro; Université Pierre et Marie Curie - Paris.

<sup>2</sup>Diretor do IEAv - Instituto de Estudos Avançados - CTA São José dos Campos

<sup>3</sup>Chefe da ENU - Divisão de Energia Nuclear do IEAv - CTA

encorajado e possibilitado a publicação deste trabalho.

Transmitimos também a nossa gratidão ao Dr. R. Marinho<sup>4</sup> pelos conselhos e permanente apoio no uso do Latex e Tex utilizados eficientemente por M. H. Vicente<sup>5</sup> a quem agradeço pelo longo processamento de texto.

---

<sup>4</sup>Divisão de Física Teórica FTE do IEAv - CTA.

<sup>5</sup>Programadora da ENU -IEAv.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Conceituação Básica e Notações</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Descrição das Notações e Simbologia . . . . .	2
1.3	Contorno Regular, Domínio Normal, Traço. . . . .	3
1.4	Espaços de Hilbert $H$ e Relação com $L_2$ . . . . .	3
1.4.1	Espaços $L_2(\Omega)$ , $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ . . . . .	4
1.5	Operadores Lineares . . . . .	7
1.5.1	Problemas Lineares de Contorno e Equações de Operadores. . . . .	8
1.6	Teorema de Gauß . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Desenvolvimento das Fórmulas de Green</b>	<b>11</b>
2.1	1ª e 2ª Fórmulas de Green . . . . .	11
2.2	3ª Fórmula de Green . . . . .	14
2.2.1	3ª Fórmula de Green - Solução Fundamental da Equação da Placa Delgada. . . . .	16
2.3	Aplicação . . . . .	17
2.3.1	3ª Fórmula de Green - duas Integrais de Contorno . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Confinamento de Funcionais Lineares</b>	<b>21</b>
3.1	Confinamento nas equações variacionais . . . . .	21
3.1.1	Confinamento Para o Funcional . . . . .	24
3.2	Aplicações . . . . .	25
3.2.1	Problema de Dirichlet para Placa Delgada . . . . .	25
3.2.2	Método de Diaz-Greenberg . . . . .	27

# Capítulo 1

## Conceituação Básica e Notações

### 1.1 Introdução

Apresentamos na oportunidade do presente trabalho um estudo minucioso sobre as fórmulas de Green, com o objetivo de construirmos um inventário, para o qual partimos do Teorema de Gauß e provamos sistematicamente, sob nossa versão, todas as fórmulas, na tentativa de reuni-las em uma coleção de conceituações básicas para aplicação em desenvolvimentos teóricos e práticos da Mecânica dos Meios Contínuos (Engenharia), Física e da própria Matemática Computacional. Em diversos tópicos da Física Matemática ocorrem frequentes aplicações das fórmulas de Green. As investigações da teoria do potencial, por exemplo, têm sido efetivadas com a ajuda indispensável das fórmulas de Green. Elas são consideradas ferramentas importantes no desenvolvimento daquela teoria (veja p.ex. Courant-Hilbert [17]). Como aplicações práticas nessa área encontramos o teorema sobre potenciais de camadas duplas constantes, o Princípio do Máximo e o teorema da variação de potenciais de distribuição de massa e suas derivadas (potencial de uma camada simples e suas derivadas tangenciais, por exemplo). O Princípio do Máximo (Courant-Hilbert [17]) é usado num amplo spectrum de aplicações no campo dos modelos representados por problemas elípticos; especialmente no tratamento de teoremas de existência e unicidade de solução desses problemas.

As fórmulas de Green são ampla e frequentemente usadas também na formulação variacional (fraca) de problemas de valor de contorno, sendo ela o ponto de partida de inúmeros procedimentos numéricos na busca de solução de tais problemas. A formulação variacional de um dado problema é baseada no princípio do mínimo da energia potencial ou no valor estacionário da energia complementar, onde as fórmulas de Green são frequente e necessariamente aplicadas. Como um importante método computacional de procedimento variacional, mencionamos o Método dos Elementos Finitos.



Desenvolvimentos analíticos são aqui apresentados para o estabelecimento das fórmulas de Green nas suas diversas versões, como por exemplo as 1<sup>ª</sup>, 2<sup>ª</sup> e 3<sup>ª</sup> fórmulas de Green para o gradiente escalar, e operadores diferenciais lineares sobre volumes e superfícies planas. À terceira fórmula de Green da solução fundamental da placa delgada com duas integrais de contorno e à formulação variacional do método de Diaz e Greenberg é dado um destaque particular nesta monografia, o que constitui a substância principal da nossa contribuição.

## 1.2 Descrição das Notações e Simbologia

Consideremos  $\chi$  um espaço linear (real). Para exemplificar  $\chi$  definimos  $C(a, b)$  - espaço das funções contínuas em  $(a, b) \rightarrow \mathcal{R}$ .;  
 $C[a, b]$  - espaço das funções contínuas em  $[a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ .;  
 $C^k(a, b)$  ou  $C^k[a, b]$  espaços das funções contínuas em  $(a, b)$  ou  $[a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ , com derivadas contínuas até ordem  $k$ , sendo  $k \geq 1$ .

O espaço  $C(a, b)$  ou  $C[a, b]$  é representado frequentemente na forma  $C^{(0)}(a, b)$  ou  $C^{(0)}[a, b]$ , o superíndice (0) indicando derivada de ordem zero. O elemento nulo será representado por  $u = 0$ , isto é, a função constante de valor zero  $u(x) = 0$ ,  $\forall x$ . O vetor  $x \in \mathcal{R}^N$  será dado pelas suas componentes  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , na expressão  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . No lugar dos intervalos  $(a, b)$  e  $[a, b]$  escrevemos os domínios  $\Omega$  e  $\bar{\Omega}$ , sendo  $\Omega$  um conjunto aberto e conetado de pontos e  $\bar{\Omega}$  é o conjunto  $\Omega$  fechado, definido por  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , sendo  $\partial\Omega$  o contorno de  $\Omega$ , também designado por  $\Gamma$ .  $\Gamma$  será preferencialmente usado para a decomposição de  $\partial\Omega$  em segmentos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$ .

Vamos considerar funções  $u : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$  numa variável ( ou  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{R}$ ) da mesma forma. A função  $u$  é espaçadamente contínua (contínua por pedaço) quando construímos uma partição de  $(a, b)$  ou  $(\Omega)$  num número finito de subintervalos cotados por  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  na forma  $(\xi_{j-1}, \xi_j)$  sob a relação de ordem  $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_r = b$ . A função  $u$  é contínua em todo  $(\xi_{j-1}, \xi_j)$  podendo ser estendida numa função contínua em  $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ . As funções espaçadamente contínuas admitem em seus pontos de descontinuidade somente salto finito. Assim podemos definir os espaços lineares:

$E_c[a, b]$  - espaço de funções espaçadamente contínuas em  $[a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ .

$E_c^k[a, b]$  - espaço de funções em  $C^{k-1}[a, b]$ ,  $k \geq 1$ , com a  $k$ -ésima derivada em  $E_c[a, b]$ .

Analogamente se definem os espaços  $E_c(\Omega)$  e  $E_c^k(\bar{\Omega})$ , observando a decomposição de  $\Omega$  em subdomínios  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ .

$D(A)$  é um símbolo que designa domínio do operador linear  $A$  no mapeamento  $A : D(A) \rightarrow \chi$ , onde  $\chi$  é o espaço linear, já considerado.

### 1.3 Contorno Regular, Domínio Normal, Traço.

De importância prática são as partições nas quais os subdomínios  $\Omega$  são chamados domínios normais, para os quais o Teorema de Gauß e suas consequências são válidos, ou admitidos (Nečas [15]).

Domínio normal aqui é definido (Agmon [1]) como sendo uma região com contorno espaçadamente regular, onde vale o Teorema de Gauss.

Domínio com fronteira regular tem que possuir a propriedade do segmento que tem papel importante na indagação: em que sentido podemos falar em funções que pertencem a  $H^k(\Omega)$ , espaço de Hilbert, com valores de contorno sobre  $\partial\Omega$ ? Sob uma região  $\Omega$ , com contorno regular  $\partial\Omega$  devemos subentender o seguinte: o contorno  $\partial\Omega$  pode ser coberto por um número finito arbitrário de pedaços  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$  com a propriedade do segmento, conforme Nečas [15], traduzida pelo conceito de contorno Lipschitz - contínuo (Ciarlet [2]), ou seja,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$  são espaçadamente suaves. Assim sendo, se um certo pedaço  $\Gamma$  do contorno  $\partial\Omega$  é representado por  $x_1 = f(x_2)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2$ , podemos admitir a existência de um vetor normal a  $\Gamma \subset \partial\Omega$  se  $\Gamma$  é espaçadamente suave ( $f \in E_c^1(\Omega)$ ).

### 1.4 Espaços de Hilbert H e Relação com $L_2$

Seja  $\chi[(, ), \|\cdot\|]$  um espaço linear munido de produto interno  $(, )$  e norma  $\|\cdot\|$ . Os símbolos  $H$  e  $\tilde{H}$  se referem a espaços de Hilbert e pré-Hilbert respectivamente.

O espaço  $\chi[(, ), \|\cdot\|]$  é o espaço de Hilbert  $H$  se  $\chi$  é completo em relação à norma  $\|\cdot\|$ ; caso contrário  $\chi[(, ), \|\cdot\|]$  é simplesmente o espaço pré-Hilbert  $\tilde{H}$ .

Resumindo, temos as definições

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \{u : u \in \chi[(, ), \|\cdot\|]\} \\ H &= \{u : u \in \tilde{H} \text{ completo}\} = \{\text{completação de } \tilde{H}\}\end{aligned}$$

Ao tratarmos as tarefas de confinamento da solução de problemas de valor de contorno usaremos o espaço  $\chi[(, ), \|\cdot\|]$  podendo ser este o espaço  $\tilde{H}$  ou  $H$ . Os métodos de confinamento da solução de problemas lineares de valor de contorno num dado ponto  $x_0 \in \Omega$  foram, além de Collatz [3], desenvolvidos por diversos autores; entre eles Diaz e Greenberg [6],[7], Maple [9] e Synge [16]. Esses métodos apresentam, todos, uma característica comum: eles se baseiam na solução fundamental, [17], da equação diferencial governante do problema de valor de contorno dado e sobre a aplicação de fórmulas de Green com as quais o valor da função procurada  $u(x_0)$  é dado por uma soma de integrais de domínio e de contorno, que de uma maneira adequada permite o confinamento de  $\bar{u}$  entre dois extremos ou cotas. Com base nos trabalhos citados [5], [6], [9], [16] será formulada aqui uma versão análoga, porém diferente, pois o presente desenvolvimento será procedido com base em uma formulação variacional ao invés da correspondente formulação operacional.

**1.4.1 Espaços  $L_2(\Omega)$ ,  $H^k(\Omega)$  e  $H_0^k(\Omega)$ .**

Definimos  $L_2(\Omega)$  como sendo o espaço das funções mensuráveis no sentido de Lebesgue e de quadrado integrável, de tal forma que se  $u \in L_2(\Omega)$ , então vale

$$\int_{\Omega} u^2 dx < \infty \quad , \quad \forall x \in \Omega.$$

O espaço  $L_2(\Omega)$ , também designado por  $H^0(\Omega)$  é um espaço de Hilbert em relação ao produto interno e norma

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} u v dx \quad , \quad \|u\|_0^2 = \int_{\Omega} u^2 dx. \quad (1.1)$$

O símbolo  $D^\alpha$  representa um operador diferencial de ordem  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ , definido por

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i}} \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \quad , \quad i = 1(1)N, \quad (1.2)$$

no sentido das distribuições ou derivadas generalizadas. Da mesma forma,  $L(\cdot)$  designa um operador linear diferencial de ordem  $k$  dado pela forma

$$L(\cdot) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha \quad (1.3)$$

O espaço  $H^k(\Omega)$  é o espaço de Hilbert dito de Sobolev de ordem  $k$ , definido como sendo a completção do espaço linear  $C^k(\bar{\Omega})$ , já definido anteriormente, munido do produto interno

$$(u, v)_k = (u, v)_0 + \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0 \quad , \quad |\alpha| \geq 1 \quad (1.4)$$

e norma

$$\|u\|_k = (u, u)_k^{1/2}. \quad (1.5)$$

**Definição 1.1**

- $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  se e só se
- (i)  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$
  - (ii)  $\exists \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$  tal que  $\varphi(x) = 0 \quad \forall x \notin \bar{\Omega}_0$ ,  
( $\bar{\Omega}_0$ , suporte de  $\varphi$ , é compacto)

O espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  é o espaço de funções teste, munido também do produto interno (1.4) e norma (1.5).

$C_0^\infty(\Omega)$  é, claramente, subespaço de  $C^\infty(\Omega)$ . O espaço de Hilbert  $H_0^k(\Omega)$  é a completção do espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  em relação à norma (1.5). E portanto  $H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$  se verifica.

Há funções, porém, que são de muito valor prático nas aplicações de problemas variacionais. Elas não pertencem a  $C^k(\bar{\Omega})$ , mas pertencem a  $E_c^k(\bar{\Omega})$ , definido como o espaço de funções cujas  $k$ -ésimas derivadas em  $\bar{\Omega}$  são espaçadamente contínuas em relação a uma discretização ou partição de  $\Omega$ , em uma certa quantidade finita de subregiões  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ , de fronteiras regulares. Por isso podemos aplicar também o Teorema de Gauß nessas subregiões, conforme já foi analisado.

O espaço  $E_c^k(\bar{\Omega})$  na sua relação com o espaço de Sobolev  $W_p^{(k)}$  ou mais particularmente  $H^k(\Omega)$  envolve a noção de derivadas fortes e fracas as quais têm origem no conceito de convergências forte e fraca [11], [14].

### Definição 1.2

(j) Uma seqüência  $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots\}$  em  $\chi$  é de convergência forte ou fortemente convergente se para algum  $u \in \chi$  valer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \quad (1.6)$$

(jj) Uma seqüência  $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots\}$  em  $\chi$  é de convergência fraca, se para algum  $u \in \chi$  valer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u, v) = 0 \quad \forall v \in \chi. \quad (1.7)$$

No caso (j)  $u$  é o limite forte de  $u_n$  e no caso (jj)  $u$  é o seu limite fraco. Uma seqüência de convergência forte é sempre de convergência fraca, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

Com ajuda da integração por parte pode-se verificar que a derivada espaçadamente contínua  $D^\alpha u$ , com  $|\alpha| = k$ , é a derivada fraca  $u^{(\alpha)}$  definida por

$$\int_{\Omega} u^{(\alpha)} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx \quad , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observe-se que para  $u \in L_2(\Omega)$  a expressão acima é unicamente determinada, ou seja,  $u^{(\alpha)}$  existe e é única [11], [12].

Para responder à indagação feita acima, na seção 1.3, sobre as funções que pertencem ao espaço de Hilbert  $H^k(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ , com relação a valores de contorno bem como às derivadas de  $u$ , de ordem  $|\alpha| \leq k - 1$ , ou seja,  $D^\alpha u|_{\partial\Omega}$ , é fundamental o resultado seguinte : seja  $\Omega$  uma região limitada de contorno regular. Então existe uma constante  $c$  dependente de  $\Omega$  para a qual vale escrever

$$\left( \int_{\partial\Omega} u^2 ds \right)^{1/2} \leq c \|u\|_1 \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (1.8)$$

Com (1.8) podemos estender para  $u \in C^k(\bar{\Omega})$  e  $|\alpha| \leq k - 1$  a desigualdade:

$$\left( \int_{\partial\Omega} |D^\alpha u|^2 ds \right)^{1/2} \leq c \|D^\alpha u\|_1,$$

com  $c$  dependente só de  $\Omega$ . Existe assim um único mapeamento linear contínuo (Traço)

$$T^\alpha : C^k(\bar{\Omega}) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$$

definido por

$$T^\alpha u := D^\alpha u | \partial\Omega \quad , \quad \forall u \in C^k(\bar{\Omega}) \quad e \quad |\alpha| \leq k - 1.$$

Para  $u \in C^k(\bar{\Omega})$ , vemos que  $T^\alpha u$  são os valores de contorno no sentido ordinário. Os valores de contorno para  $u \in H^k(\Omega)$  são definidos, em geral, como sendo  $T^\alpha u := D^\alpha u | \partial\Omega$  para  $|\alpha| \leq k - 1$ , da seguinte forma: Seja  $\{\varphi_n\} \subset C^k(\bar{\Omega})$  com  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  em  $H^k(\Omega)$ . Então por definição vale

$$D^\alpha \varphi | \partial\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi_n \quad , \quad em \quad L_2(\partial\Omega).$$

Observamos em (1.8) que  $\|\cdot\|_1$  é uma norma de  $H^1(\Omega)$  e que  $(\int_{\partial\Omega} u^2 ds)^{1/2}$  é a norma do espaço de funções pertencentes ao espaço  $L_2(\partial\Omega)$ , definidas no contorno de  $\Omega$ . Toda sequência de Cauchy em  $C^1(\Omega)$  com a norma  $\|\cdot\|_1$  é portanto, segundo (1.8), também uma sequência de Cauchy de  $L_2(\partial\Omega)$ . O fato de que uma sequência de Cauchy  $\{D^\alpha \varphi_n\}$  em  $H^1(\Omega)$  converge para  $D^\alpha \varphi \in H^1(\Omega)$  se  $\varphi_n \in C^k(\bar{\Omega}) \quad \forall n$ , e que por conseguinte  $T^\alpha \varphi_n \rightarrow v$  em  $L_2(\partial\Omega)$ , é que permite usar a definição acima, ou seja:

$$v = T^\alpha \varphi \quad para \quad \varphi \in H^k(\Omega).$$

Para concluir vamos considerar o 1º Teorema de Sobolev, (veja por exemplo Ciarlet [2], Heuser [8] e Adams [10]) cujo enunciado é o seguinte:

**Teorema 1.1 (Sobolev)** *Seja  $\Omega \subset \mathcal{R}^N$  uma região limitada e seja  $k > \frac{N}{2}$ . Então vale*

$$H_0^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}),$$

*no sentido da injeção contínua, com*

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \leq c \|u\|_k \quad , \quad \forall u \in H_0^k(\Omega).$$

*Para uma região de contorno regular vale também*

$$H^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}),$$

*no sentido da injeção contínua, com*

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \leq c \|u\|_k \quad , \quad \forall u \in H^k(\Omega),$$

*onde  $c$  depende somente de  $\Omega$ .*

## 1.5 Operadores Lineares

Um mapeamento  $A$  de um espaço linear  $\chi$  num outro espaço  $\chi'$  em geral também linear é designado, da mesma forma, como operador linear: Aqui é definido, sob certas circunstâncias, somente para elementos pertencentes ao subconjunto  $D(A) \subset \chi$ , que é o domínio de definição de  $A$ .

### Definição 1.3

Um mapeamento

$$A : D(A) \rightarrow \chi'$$

é linear se

- (i)  $D(A)$  é um espaço linear e se, para
  - (ii)  $\forall u, v \in D(A)$  e  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$
- vale escrever

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av.$$

### Definição 1.4

Um mapeamento

$$A : \chi \rightarrow \chi'$$

se denomina uma injeção de  $\chi$  em  $\chi'$  quando toda imagem  $Au \in \chi'$  possuir uma única pré-imagem  $u \in \chi$ . A injeção é linear, se  $A$  é, ao mesmo tempo, um operador linear.

### Definição 1.5

O subconjunto  $W \subset \chi$  é um subespaço linear de  $\chi$  se com  $u, v \in W$  toda combinação linear de  $u$  e  $v$  pertence também a  $W$ . Um subespaço linear  $W$  contém sempre o elemento nulo.

### Definição 1.6

Um subconjunto  $M \subset \chi$  é uma variedade linear de  $\chi$ , se para  $M$  existe um subespaço

$W \subset \chi$  com as seguintes propriedades [8] [11]:

$$(1) \quad v \in M, \omega \in M \Rightarrow v - \omega \in W \quad (1.9)$$

$$(2) \quad v \in M \quad \Rightarrow u + v \in M, \quad \forall u \in W. \quad (1.10)$$

O subespaço linear  $W$  pertencente a  $M$  é unicamente determinado.

Consideremos aqui dois espaços lineares normados com as normas  $\| \cdot \|_1$  e  $\| \cdot \|_2$ . Um operador

$$A : \chi_1 \rightarrow \chi_2$$

é dito limitado, se existe um constante  $c > 0$  tal que

$$\|Au\|_2 \leq c\|u\|_1 \quad \forall u \in \chi_1. \quad (1.11)$$

O operador  $A$  será contínuo se para uma sequência qualquer arbitrária  $u_1, u_2, \dots$  de  $\chi_1$  que converge para  $u$  na norma  $\| \cdot \|_1$ ;  $u \in \chi_1$  ou seja  $\|u_n - u\|_1 \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ , então resultar que  $\|Au_n - Au\|_2 \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , (veja [3], [8], [10], [11]).

Seja agora  $\chi$  um espaço linear pré-hilbertiano com produto interno  $(\cdot, \cdot)$  e norma  $\| \cdot \|$  e seja  $A$  um operador linear que mapeia  $\chi$  nele próprio.  $A$  pode apresentar as seguintes propriedades:

(i)  $A$  é simétrico se

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in \chi; \quad (1.12)$$

(ii)  $A$  é não negativo se

$$(Au, u) \geq 0 \quad \forall u \in \chi; \quad (1.13)$$

(iii)  $A$  é positivo definido

$$(Au, u) > 0 \quad \forall u \in \chi, \quad u \neq 0. \quad (1.14)$$

(iv)  $A$  é coercivo se  $\exists \alpha > 0$ ,  $\alpha$  constante com

$$(Au, u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \forall u \in \chi. \quad (1.15)$$

### 1.5.1 Problemas Lineares de Contorno e Equações de Operadores.

Mais adiante vamos considerar problemas de valor de contorno, também frequentemente conhecidos como equações operacionais que representamos da seguinte forma: Seja dado um espaço linear  $\chi$  e o operador linear  $A$  tal que  $A : D(A) \rightarrow \chi$ . Consideremos o subespaço linear  $W \subset D(A)$  bem como  $f \in \chi$  e  $u_0 \in D(A)$ . Procuramos  $u \in D(A)$  que seja a solução da equação operacional [3] [4]

$$Au = f, \quad u - u_0 \in W. \quad (1.16)$$

#### Definição 1.7

A equação operacional (1.16) se denomina

- a) Não-homogênea se  $u_0 \neq 0$ ;
- b) Semihomogênea se  $u_0 = 0$  mas  $f \neq 0$ ;
- c) Homogênea se  $u_0 = f = 0$ .

Com a substituição  $v = u - u_0$  uma equação não-homogênea (1.16) se transforma numa equação semi-homogênea [3],[4]

$$Av = \tilde{f} \quad , \quad v \in W, \quad (1.17)$$

com  $\tilde{f} = f - Au_0$ .

Exemplo 1.1

Seja  $\Omega \subset \mathcal{R}^N$  com contorno regular. O problema linear de valor de contorno

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega \quad (1.18)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (1.19)$$

pode ser, por exemplo, semihomogêneo com  $u \in W$  e  $f \neq 0$ , apresentando os seguintes casos especiais:

(i)  $\alpha = 0$  ,  $\beta = 1$  ou problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega \\ u &= g \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

(ii)  $\alpha = 1$  ,  $\beta = 0$  ou problema de Neumann

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

O problema (1.18) (1.19) está aqui considerado com  $u$  admissível em  $H^2(\Omega)$ . Em geral  $D(A)$  é maior do que  $H^2(\Omega)$  mas se o contorno é regular então  $u$  é admissível em  $H^2(\Omega)$ :  $f \in L_2(\Omega)$  e  $\exists u_0 \in H^2(\Omega)$  que satisfaz a condição de contorno. O problema pode ser escrito na forma operacional (1.16), onde

$$\chi = L_2(\Omega) \quad , \quad D(A) = H^2(\Omega) \quad e \quad A = -\Delta$$

e

$$W = \{u \in H^2(\Omega) : \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 \quad \text{s/} \quad \partial\Omega\}.$$



## 1.6 Teorema de Gauß

Em análise se consideram domínios normais  $\Omega \subset \mathcal{R}^N$  aqueles para os quais o Teorema de Gauß é analítico:

Para  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  vale a igualdade

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u n_j ds \quad (1.20)$$

e para o campo vetorial  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N)$  com componentes em  $C^1(\Omega)$  vale também a expressão

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \vec{n} ds \quad (1.21)$$

onde  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_N)$  é o vetor externo normal ao contorno  $\partial\Omega$  da região  $\Omega$ , sendo  $\vec{v} \vec{n}$  dado por  $\vec{v} \vec{n} = v_1 n_1 + \dots + v_N n_N$ .

Os domínios com contorno regular introduzidos anteriormente, na página 5, são domínios normais (Necas [15]). Se  $u_1, u_2, \dots$  é uma sequência de funções de  $C^1(\Omega)$  que converge na norma  $\|\cdot\|_1$  para uma função  $u \in H^1(\Omega)$ , então resulta a equação (1.20) também para o limite  $u \in H^1(\Omega)$ . A convergência da integral de contorno do lado direito de (1.20) resulta em virtude da desigualdade (1.8).

## Capítulo 2

# Desenvolvimento das Fórmulas de Green

### 2.1 1ª e 2ª Fórmulas de Green

Substituindo em (1.20)  $u$  por  $uv$ ,  $u \in H^1(\Omega)$  e  $v \in H^1(\Omega)$ , ganhamos a fórmula (2.1) abaixo, que constitui o Teorema de Green obtido através das etapas seguintes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial uv}{\partial x_j} dx &= \int_{\partial\Omega} uv n_j ds \\ \int_{\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j} v \right) &= \int_{\partial\Omega} uv n_j ds \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx &= \int_{\partial\Omega} uv n_j ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Em seguida, escrevemos, para  $v \in H^2(\Omega)$ , no lugar de  $v$  a derivada  $\frac{\partial v}{\partial x_j}$  e introduzimo-la em (2.1) de onde, depois de alguns cálculos de integração por parte, obtemos a expressão (2.5) na página seguinte. Vejamos o andamento:

$$\begin{aligned} a) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) dx &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ b) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} dx &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \end{aligned}$$

onde são válidas as expressões

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} n_j = \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_N} n_N, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N} \frac{\partial v}{\partial x_N}.$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_N^2} = \Delta v. \quad (2.2)$$

Se  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$  são vetores de base canônica de  $\mathcal{R}^N$ , temos  $n_j = \cos(\vec{n}, \vec{x}_j)$ . Considerando a notação de somatório do cálculo tensorial podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j = \frac{\partial v}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, \vec{x}_j) = \frac{\partial v}{\partial x_1} \cos(\vec{n}, \vec{x}_1) + \\ &\frac{\partial v}{\partial x_2} \cos(\vec{n}, \vec{x}_2) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_N} \cos(\vec{n}, \vec{x}_N). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mas por outro lado

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \text{grad } u &= (n_1 \vec{x}_1 + n_2 \vec{x}_2 + \dots + n_N \vec{x}_N) \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \vec{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \vec{x}_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N} \vec{x}_N \right) \\ &= n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + n_N \frac{\partial u}{\partial x_N} = \frac{\partial u}{\partial n}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad } u. \quad (2.4)$$

Com as expressões b), (2.2) e (2.3) obtemos

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx. \quad (2.5)$$

Observando que

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

e substituindo (2.6) em (2.5) obtemos a forma mais usual, em função do gradiente escalar, denominada 1ª fórmula de Green para o gradiente escalar

$$\int_{\Omega} (u \Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds. \quad (2.7)$$

Introduzindo (2.4) em (2.7) obtemos a expressão (2.8), denominada 1ª fórmula de Green modificada pelo gradiente de  $v$ :

$$\int_{\Omega} (u \Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) \, dx = \int_{\partial\Omega} u \text{grad } v \cdot \vec{n} \, ds. \quad (2.8)$$

Fazendo em (2.7) uma permutação de  $v$  por  $u$ , escrevendo primeiro (2.7) e depois invertendo o sinal, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) \, dx &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - \int_{\Omega} u \Delta v \\ - \int_{\Omega} (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) \, dx &= - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\Omega} v \Delta u, \quad u \in H^2(\Omega). \end{aligned}$$

Somando essas duas últimas igualdades membro a membro obtemos a 2ª fórmula de Green

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (2.9)$$

Obs: Podemos generalizar as duas fórmulas de Green (2.7) e (2.9) para a forma geral do operador diferencial linear

$$L(u) = - \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \quad (2.10)$$

onde  $a_{jk} \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$  sendo aqui o vetor conormal com componentes

$$\nu_k = \sum_{j,k=1}^N n_j a_{jk},$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j,$$

sendo a derivada direcional relativa à conormal. Com (2.10) a 1ª fórmula de Green (2.7) será dada por

$$- \int_{\Omega} uL(v)dx + \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^N a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds, \quad (2.11)$$

que é a 2ª Fórmula de Green para o Operador  $L(\ )$ .

No caso em que  $a_{kj} = a_{jk}$ ,  $\forall j, k$  (simetria) chegamos a uma outra forma especial da 2ª fórmula de Green para o operador  $L$ :

$$- \int_{\Omega} [uL(v) - vL(u)]dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds, \quad (2.12)$$

que é a 2ª Fórmula de Green para o operador  $L(u)$ , onde  $a_{jk} = a_{kj}$ , sendo  $\nu$  o vetor conormal com componentes dadas acima:

$$\nu_k = \sum_{j,k=1}^N n_j a_{jk}$$

e  $a_{jk}$  sendo os elementos de uma matriz simétrica  $(a_{jk})$ .

Podemos obter também a 2ª fórmula de Green para o operador bilaplaciano  $\Delta\Delta$ , bastando fazer em (2.9) a substituição de  $v$  por  $\Delta v$ . Assim obtemos (2.13):

$$\int_{\Omega} (u\Delta\Delta v - \Delta u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \Delta v}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (2.13)$$

muito usada na teoria linear da placa delgada, com a qual podemos derivar a formulação variacional fraca do problema de valor de contorno a ela correspondente.

## 2.2 3ª Fórmula de Green

**Teorema 2.1** *Dado um volume  $V$  limitado por uma superfície  $S$ , seja  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$  um campo escalar contínuo, com derivadas parciais contínuas até 2ª ordem, inclusive. Então o valor de  $\varphi$  em qualquer ponto interior  $M_0 \in V$  é dado pela expressão*

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \Delta \varphi dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS \quad (2.14)$$

onde

$$r = [(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2]^{1/2}$$

e

$$M_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \quad , \quad M = (x_1, x_2, x_3).$$

Prova:

Seja, na figura 2.2.1 abaixo, a distância  $\overline{M_0 M'}$  dada pela expressão

$$\overline{M_0 M'} = \rho$$

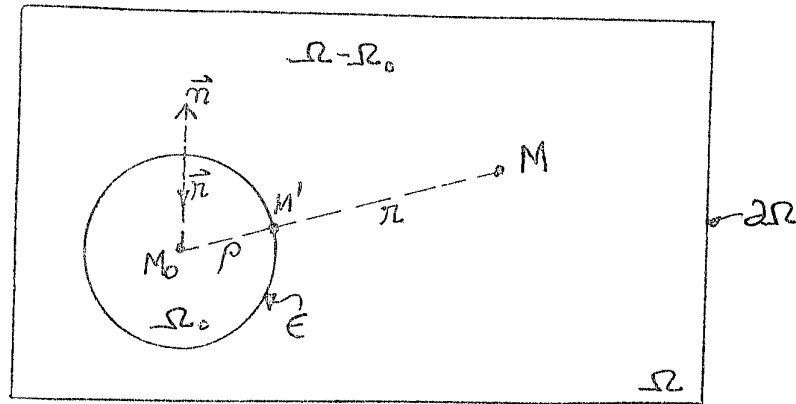


Fig. 2.2.1

com  $\rho$  sendo o raio da esfera de centro  $M_0$  e superfície  $\epsilon$ . Seja o volume dado por

$$V' = V - V_0$$

sendo  $M_0$  fixo e  $M$  variável.  $V'$  é o espaço entre todo  $V$  e a esfera  $V_0$ . A 2ª fórmula de Green para o volume total  $V$  é dada por (2.9) fazendo  $u = \varphi$  e  $v = \psi$ ; fornecendo assim a expressão

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (2.15)$$

Fazendo, na fórmula (2.15) acima,  $\psi = \frac{1}{r}$  e sendo  $\Delta \frac{1}{r} = 0$ , exceto em  $M_0$  ponto singular, obtemos a seguinte expressão para a integral sobre  $V'$

$$\int_{V'} \left( -\frac{1}{r} \Delta \varphi \right) dV' = \int_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \int_{\epsilon} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\epsilon. \quad (2.16)$$

A normal interior à superfície interna de  $V'$  é a mesma normal exterior à superfície  $\epsilon$  e tem a mesma direção de  $\vec{r}$ . A segunda integral do membro direito de (2.16) será dada pela expressão

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\epsilon &= \int_{\epsilon} \left( -\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) d\epsilon = \\ &= \int_{\epsilon} \left( \frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) d\epsilon. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, considerando (2.17), existe  $M_\rho \in \epsilon$  tal que

$$\int_{\epsilon} \left[ \frac{\varphi(M)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(M)}{\partial r} \right] d\epsilon = \left[ \frac{\varphi(M_\rho)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi(M_\rho)}{\partial \rho} \right] \int_{\epsilon} d\epsilon. \quad (2.18)$$

Mas  $\int_{\epsilon} d\epsilon = 4\pi\rho^2$ , é a área da superfície da esfera  $V_0$ . Portanto, podemos agora estudar o limite de (2.18) para  $\rho \rightarrow 0$ , ou seja, para  $M_\rho \rightarrow M_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(M_\rho)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi(M_\rho)}{\partial \rho} \right] 4\pi\rho^2 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\varphi(M_\rho)}{\rho^2} 4\pi\rho^2 \\ &+ \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi(M_\rho)}{\partial \rho} 4\pi\rho^2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} 4\pi\varphi(M_\rho) \\ &+ \lim_{\rho \rightarrow 0} 4\pi\rho \frac{\partial \varphi(M_\rho)}{\partial \rho} = 4\pi\varphi(M_0), \end{aligned} \quad (2.19)$$

dado que  $\left| \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \rho} \right| < c, \forall M \in V$ . Ora, mas quando  $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow V' \rightarrow V$  e a expressão (2.16) será agora escrita como a 3ª fórmula de Green para o volume

$$4\pi\varphi(M_0) = - \int \int \int_V \frac{1}{r} \Delta \varphi dV - \int \int_S \left[ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS, \quad (2.20)$$

### 2.3. Aplicação

17

Mas por outro lado, observamos que

$$\int_{\epsilon} d\epsilon = 2\pi\rho : \Delta\psi = \psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r = \frac{1}{2\pi}(1 + \ln r) \quad (2.25)$$

e

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}(1 + \ln r) = \frac{1}{2\pi r}. \quad (2.26)$$

Quando  $r \rightarrow \rho$ , podemos desenvolver (2.23) introduzindo nela (2.25) e (2.26); e em seguida procedendo ao limite  $\rho \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\epsilon} \left( u \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} - \Delta\psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\epsilon &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ -\frac{u(M_{\rho})}{2\pi\rho} + \Delta\psi \frac{\partial u(M_{\rho})}{\partial \rho} \right] 2\pi\rho \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ -\frac{u(M_{\rho})}{2\pi\rho} 2\pi\rho \right] + \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi\rho \frac{1}{2\pi} (1 + \ln\rho) \frac{\partial u(M_{\rho})}{\partial \rho} = -u(M_0), \end{aligned} \quad (2.27)$$

tendo em vista que  $\vec{n} = -\vec{r}$ .

Substituindo (2.27) em (2.24) obtemos o resultado

$$u(x_0) = \int_{\Omega} \Delta\psi \Delta u \, dx + \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} - \Delta\psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (2.28)$$

3ª Fórmula de Green para  $\psi = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r$ , sendo  $x_0 = (x_{01}, x_{02})$  a representação do ponto  $M_0$  em  $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ .

## 2.3 Aplicação

Como aplicação direta vamos fazer uso da 3ª fórmula de Green, com base no desenvolvimento de Diaz - Greenberg onde aparecem as expressões (2.30) e (2.31) abaixo, reconhecidas como sendo a 2ª fórmula de Green obtida como em (2.22). Assim propomos estabelecer a

### 2.3.1 3ª Fórmula de Green - duas Integrais de Contorno

Estudaremos, em seguida, a construção da 3ª fórmula de Green para a solução fundamental da equação da placa delgada em função de duas integrais de contorno. Estudaremos o caso plano, ou seja,  $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ .  $\psi_{rr}$  é a segunda derivada parcial de  $\psi$  em relação à direção normal à superfície interna de  $V'$  sendo a mesma normal exterior à superfície  $\epsilon$  e tem a mesma direção de  $\vec{r}$ . Partindo da 2ª fórmula

como queríamos demonstrar.

Para o caso plano, ou seja  $V \rightarrow \Omega \subset \mathcal{R}^2$  obtivemos, de forma semelhante, efetuando todas as contas:

$$2\pi\varphi(M_0) = \int \int_{\Omega} \ln r \Delta\varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \left( \varphi \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds, \quad (2.21)$$

a 3ª Fórmula de Green para a superfície plana, (veja [18]).

### 2.2.1 3ª Fórmula de Green - Solução Fundamental da Equação da Placa Delgada.

A equação da placa  $\Delta\Delta\varphi = f$  em  $\Omega$ , para  $f \in L_2(\Omega)$  e  $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ , tem por solução fundamental  $\psi = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r$ , no sentido que  $\Delta\Delta\psi = 0$  em  $\Omega$ . Para acompanhamento usaremos a fig. 2.2.2 abaixo.

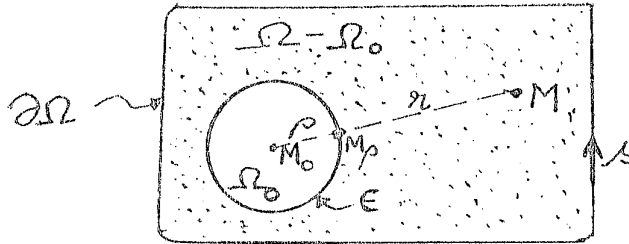


Fig. 2.2.2

Pela 2ª fórmula de Green podemos escrever

$$\int_{\Omega - \Omega_0} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{\partial\Omega_0} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\epsilon \quad (2.22)$$

e daí, no limite para  $\rho \rightarrow 0$ , usando novamente o teorema do valor médio, obtemos com  $M_\rho \in \epsilon$  (veja fig. 2.2.2 acima):

$$\int_{\epsilon} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\epsilon = \left[ u(M_\rho) \frac{\partial v(M_\rho)}{\partial \rho} - v(M_\rho) \frac{\partial u(M_\rho)}{\partial \rho} \right] \int_{\epsilon} d\epsilon. \quad (2.23)$$

Fazendo em (2.22)  $v = \Delta\psi$ , o que implica que  $\Delta v = \Delta\Delta\psi = 0$ , obtemos a seguinte expressão

$$\int_{\Omega - \Omega_0} (-\Delta\psi\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial \Delta\psi}{\partial n} - \Delta\psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{\epsilon} \left( u \frac{\partial \Delta\psi}{\partial n} - \Delta\psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\epsilon. \quad (2.24)$$



de Green (2.22):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega-\Omega_0} (u\Delta v - v\Delta u) dx &= \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_{\epsilon} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\epsilon \end{aligned} \quad (2.29)$$

e fazendo  $u = \Delta\varphi$ , com  $v = \psi$ , obtemos as duas expressões seguintes, a segunda resultando da permuta de  $\varphi$  com  $\psi$  da primeira.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \Delta\varphi\Delta\psi dx &= \int_{\Omega'} \psi\Delta\Delta\varphi dx + \int_{\partial\Omega} \left( \Delta\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} \right) ds + \\ &+ \int_{\epsilon} \left( \Delta\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} \right) d\epsilon \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \Delta\varphi\Delta\psi dx &= \int_{\Omega'} \varphi\Delta\Delta\psi dx + \int_{\partial\Omega} \left( \Delta\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_{\epsilon} \left( \Delta\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} \right) d\epsilon \end{aligned} \quad (2.31)$$

sendo  $\Omega' = \Omega - \Omega_0$ . Fazendo  $\psi = \omega$  e levando em conta a solução fundamental

$$\varphi = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r,$$

acima já referida, ou seja,  $\Delta\Delta\varphi = 0$ , introduzimos  $\psi$  e  $\varphi$  com seus novos valores em (2.30) e (2.31) para obtermos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \left( \Delta\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \omega \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_{\epsilon} \left( \Delta\varphi \frac{\partial\omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} \right) d\epsilon \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega'} \varphi\Delta\Delta\omega + \int_{\partial\Omega} \left( \Delta\omega \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\Delta\omega}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_{\epsilon} \left( \Delta\omega \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\Delta\omega}{\partial n} \right) d\epsilon \end{aligned} \quad (2.33)$$

Multiplicando (2.32) por -1 e somando a (2.33) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega'} \varphi\Delta\Delta\omega dx + \int_{\partial\Omega} \left( \Delta\omega \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\Delta\omega}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_{\epsilon} \left( \Delta\omega \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\Delta\omega}{\partial n} \right) d\epsilon \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left( \omega \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} - \Delta\varphi \frac{\partial\omega}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_{\epsilon} \left( \omega \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} - \Delta\varphi \frac{\partial\omega}{\partial n} \right) d\epsilon \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{8\pi}(r + 2r \ln r) \quad (2.35)$$

e

$$\Delta \varphi = \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r = \frac{1}{2\pi}(1 + \ln r). \quad (2.36)$$

A normal interior  $\vec{n}$  à curva de contorno de  $\Omega'$  é a mesma normal exterior  $\vec{r}$  à curva de contorno de  $\Omega_0$ , tendo a mesma direção e sentidos opostos. Portanto  $\vec{n} = -\vec{r}$ , veja Fig. 2.3.1, abaixo.

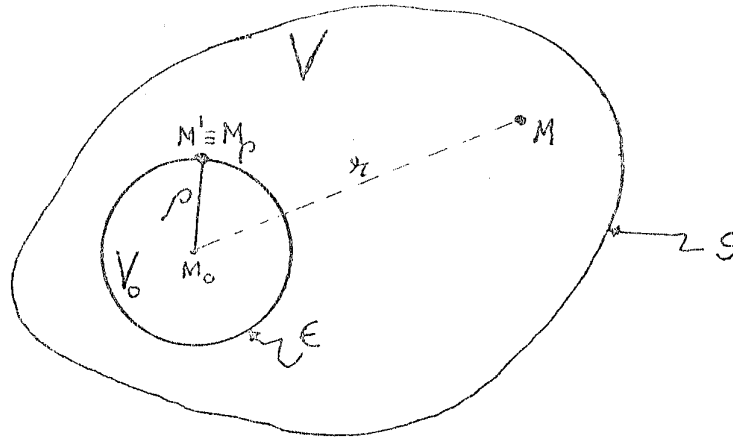


Fig. 2.3.1

Por outro lado temos

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{2\pi}(1 + \ln \rho) \right] = -\frac{1}{2\pi \rho} \quad (2.37)$$

e

$$\int_{\epsilon} d\epsilon = 2\pi \rho. \quad (2.38)$$

Da mesma forma temos de

$$\varphi = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r$$

que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{8\pi}(\rho + 2\rho \ln \rho) \quad (2.39)$$

e

$$\Delta \varphi = \frac{1}{2\pi}(1 + \ln \rho). \quad (2.40)$$

Aplicando o teorema do valor médio sobre a integral de contorno de  $\Omega_0$ :

$$\int_{\epsilon} \left( \omega \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} - \Delta \varphi \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) d\epsilon = \left[ \omega(M_\rho) \frac{\partial \Delta \varphi(M_\rho)}{\partial \rho} - \Delta \varphi(M_\rho) \frac{\partial \omega(M_\rho)}{\partial \rho} \right] \int_{\epsilon} d\epsilon,$$

que levada ao limite quando  $\rho \rightarrow 0$  fornece, com (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ -\frac{\omega(M_\rho)}{2\pi\rho} 2\pi\rho \right] - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} (1 + \ln \rho) 2\pi\rho \frac{\partial \omega(M_\rho)}{\partial \rho} = -\omega(M_0). \quad (2.41)$$

Da mesma forma apliquemos o teorema do valor médio sobre a integral de contorno de  $\Omega_0$ :

$$\int_{\epsilon} \left( \Delta \omega \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Delta \omega}{\partial n} \right) d\epsilon = \left[ \Delta \omega(M_\rho) \frac{\partial \varphi(M_\rho)}{\partial \rho} - \varphi(M_\rho) \frac{\partial \Delta \omega}{\partial \rho}(M_\rho) \right] \int_{\epsilon} d\epsilon,$$

que, levada ao limite quando  $\rho \rightarrow 0$ , fornece com (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ -\Delta \omega(M_\rho) \frac{1}{8\pi} (\rho + 2\rho \ln \rho) 2\pi\rho - \frac{1}{8\pi} (\rho^2 \ln \rho) 2\pi\rho \frac{\partial \Delta \omega}{\partial n} \right] = 0. \quad (2.42)$$

Mas quando  $\rho \rightarrow 0$  temos que  $M_\rho \rightarrow M_0$  e que  $\Omega_0$  tende a um ponto de  $\Omega$ . Portanto  $\Omega' \Rightarrow \Omega$ . Com (2.41), (2.42) e (2.34) obtemos

$$\begin{aligned} 8\pi\omega(M_0) = \int_{\Omega} (r^2 \ln r) \Delta \Delta \omega dx + \int_{\partial\Omega} \left[ \omega \frac{\partial \Delta (r^2 \ln r)}{\partial n} - \Delta (r^2 \ln r) \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] ds \\ + \int_{\partial\Omega} \left[ \Delta \omega \frac{\partial r^2 \ln r}{\partial n} - r^2 \ln r \frac{\partial \Delta \omega}{\partial n} \right] ds, \end{aligned} \quad (2.43)$$

que é a 3ª fórmula de Green com duas integrais de contorno, para  $\varphi = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r$ .

Dados (input)

- 1)  $\varphi = r^2 \ln r$  em  $\Omega$
- 2)  $\Delta \Delta \omega = f$  em  $\Omega$
- 3)  $\omega = f$  sobre  $\partial\Omega$
- 4)  $\frac{\partial \omega}{\partial n} = g$  sobre  $\partial\Omega$
- 5)  $\frac{\partial \Delta (r^2 \ln r)}{\partial n}$  sobre  $\partial\Omega$
- 6)  $\frac{\partial (r^2 \ln r)}{\partial n}$  sobre  $\partial\Omega$
- 7)  $\Delta (r^2 \ln r)$  sobre  $\partial\Omega$ .

Incógnitas (output)

- 1)  $\Delta \omega = ?$  sobre  $\partial\Omega$
- 2)  $\frac{\partial \Delta \omega}{\partial n} = ?$  sobre  $\partial\Omega$

## Capítulo 3

# Confinamento de Funcionais Lineares

### 3.1 Confinamento nas equações variacionais

Seja  $\chi((\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$  um espaço linear, como definido no capítulo 1, podendo ser o mesmo um espaço pre-Hilbert  $H$  ou espaço de Hilbert  $H$ . Seja também o subespaço  $W$  de  $\chi$  e  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear contínua para a qual  $\exists c > 0$  tal que

$$a(u, v) \leq c\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in \chi,$$

com

$$a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in \chi \tag{3.1}$$

$$a(u, u) > 0 \quad \forall u \in W, u \neq 0. \tag{3.2}$$

Vamos considerar o subespaço  $W$  fechado em  $\chi$  em relação à norma energética

$$\|u\| = a(u, u)^{1/2}, \tag{3.3}$$

sendo os funcionais lineares

$$f : \chi \rightarrow \mathcal{R} \quad e \quad g : \chi \rightarrow \mathcal{R}$$

limitados em  $W$ . Então as seguintes equações variacionais

$$a(u, \omega) = f(\omega) \quad \forall \omega \in W \tag{3.4}$$

$$a(v, \omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in W \tag{3.5}$$

possuem exatamente uma solução em  $W$  que denominaremos  $\bar{u}$  ou  $\bar{v}$  respectivamente para (3.4) e (3.5). [9], [10], [16].

Façamos primeiro  $\omega = v$  em (3.4) e  $\omega = u$  em (3.5) admitindo  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  como soluções em (3.4) e (3.5) respectivamente

$$a(\bar{u}, v) = f(v) \quad \forall v \in W \quad (3.6)$$

$$a(\bar{v}, u) = g(u) \quad \forall u \in W. \quad (3.7)$$

Entretanto podemos fazer  $\omega = \bar{v}$  em (3.4) e  $\omega = \bar{u}$  em (3.5) admitindo da mesma forma  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  como soluções de (3.4) e (3.5). Isso será o mesmo que fazermos  $v = \bar{v}$  em (3.6) e  $u = \bar{u}$  em (3.7), resultando de qualquer maneira

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in W \quad (3.8)$$

$$a(\bar{v}, \bar{u}) = g(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in W, \quad (3.9)$$

o que leva ao resultado

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = a(\bar{v}, \bar{u}) = f(\bar{v}) = g(\bar{u}) \quad (3.10)$$

pela simetria de  $a(\cdot, \cdot)$ .

O nosso objetivo é encontrar um confinamento para os valores  $g(\bar{u})$  e  $f(\bar{v})$ . Em busca desse confinamento vamos escolher  $\omega = u$  e  $\omega = v$  respectivamente para (3.4) e (3.5) levando em conta que para ambas equações supomos  $\bar{u} \in W$  e  $\bar{v} \in W$  sendo as respectivas soluções. Assim temos

$$a(u - \bar{u}, v - \bar{v}) = a(u, v) - a(\bar{u}, v) - a(\bar{v}, u) + a(\bar{u}, \bar{v}). \quad (3.11)$$

Tomemos agora dois elementos  $u_0, v_0 \in X$  que satisfazem as equações variacionais

$$a(u_0, \omega) = f(\omega) \quad \forall \omega \in W \quad (3.12)$$

$$a(v_0, \omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in W. \quad (3.13)$$

Sendo  $\bar{u}, \bar{v} \in W$  soluções de (3.12) e (3.13) por hipótese, temos de (3.11):

$$a(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v}) = a(u_0, v_0) - a(\bar{u}, v_0) - a(\bar{v}, u_0) + a(\bar{u}, \bar{v}). \quad (3.14)$$

De (3.10), (3.11), com (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9) construímos

$$\Lambda_1 = -a(u, v) + a(\bar{u}, v) + a(\bar{v}, u) = -a(u, v) + f(v) + g(u)$$

e

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = g(\bar{u}),$$

com que obtemos, de (3.11), então a expressão

$$a(u - \bar{u}, v - \bar{v}) = g(\bar{u}) - \Lambda_1 \quad (3.15)$$

De (3.14) com (3.10), (3.12) e (3.13) observamos que

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, v_0) &= g(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in W \\ a(u_0, \bar{v}) &= f(\bar{v}) \quad \forall \bar{v} \in W \\ \Rightarrow -a(\bar{u}, v_0) - a(\bar{v}, u_0) + a(\bar{u}, \bar{v}) &= \\ -g(\bar{u}) - f(\bar{v}) + g(\bar{u}) &= -f(\bar{v}) = -g(\bar{u}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

e fazendo  $\Lambda_2 = a(u_0, v_0)$  obtemos para (3.14) juntamente com (3.16)

$$a(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v}) = \Lambda_2 - g(\bar{u}) \quad (3.17)$$

Mas da desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned} |a(u - \bar{u}, v - \bar{v})| &\leq \|u - \bar{u}\| \|v - \bar{v}\| \\ |a(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v})| &\leq \|u_0 - \bar{u}\| \|v_0 - \bar{v}\| \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} |a(u - \bar{u}, v - \bar{v}) + a(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v})| &\leq |a(u - \bar{u}, v - \bar{v})| + |a(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v})| \\ \Rightarrow |a(u - \bar{u}, v - \bar{v}) + a(u_0 - \bar{u}, v_0 - \bar{v})| &\leq \|u - \bar{u}\| \|v - \bar{v}\| + \|u_0 - \bar{u}\| \|v_0 - \bar{v}\|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Com (3.15), (3.17) e (3.18) obtemos

$$|\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2g(\bar{u})| \leq \|u - \bar{u}\| \|v - \bar{v}\| + \|u_0 - \bar{u}\| \|v_0 - \bar{v}\|. \quad (3.19)$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz para a soma de produtos obtemos:

$$|\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2g(\bar{u})|^2 \leq (\|u - \bar{u}\|^2 + \|u_0 - \bar{u}\|^2) (\|v - \bar{v}\|^2 + \|v_0 - \bar{v}\|^2) \quad (3.20)$$

Seja agora  $U$  o complemento ortogonal de  $W$  em  $X$ , ou seja, o subespaço linear de todos os  $v \in X$  com

$$a(v, \omega) = 0 \quad \forall \omega \in W.$$

Assim observamos que  $u - \bar{u} \in W$  e  $v - \bar{v} \in W$  bem como  $u_0 - \bar{u} \in U$  e  $v_0 - \bar{v} \in U$ . Da ortogonalidade de  $W$  com  $U$  resulta

$$\|u_0 - \bar{u}\|^2 = \|(u_0 - \bar{u}) - (u - \bar{u})\|^2 = \|u_0 - \bar{u}\|^2 + \|u - \bar{u}\|^2 \quad (3.21)$$

e

$$\|v_0 - \bar{v}\|^2 = \|(v_0 - \bar{v}) - (v - \bar{v})\|^2 = \|v_0 - \bar{v}\|^2 + \|v - \bar{v}\|^2. \quad (3.22)$$

Com (3.21) e (3.22) resulta de (3.20) a expressão procurada para o confinamento de  $g(\bar{u})$ :

$$|\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2g(\bar{u})|^2 \leq \|u_0 - \bar{u}\|^2 \|v_0 - \bar{v}\|^2. \quad (3.23)$$

Remanejando essa última expressão obtemos

$$|\tau - g(\bar{u})| \leq \frac{1}{2} (\|u_0 - u\| + \|v_0 - v\|), \quad (3.24)$$

que é a expressão definitiva para o confinamento de  $g(\bar{u})$  ou  $f(\bar{v})$ , onde  $\tau$  é a constante dada por

$$\tau = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2}. \quad (3.25)$$

### 3.1.1 Confinamento Para o Funcional

Agora vamos procurar desenvolver um confinamento para o funcional

$$a(u, v) = (Lu, Lv). \quad (3.26)$$

Consideremos  $\chi'[(\cdot, \cdot), \|\cdot\|]$  um outro espaço linear também munido de produto interno  $(\cdot, \cdot)$  e norma  $\|\cdot\|$ , como já tratamos no caso de  $\chi$ . Suponhamos que existe um operador linear  $L : \chi \rightarrow \chi'$  que satisfaz à equação variacional (3.26). Para a solução  $\bar{u}$  do problema (3.4) o valor  $g(\bar{u})$  do 2º funcional linear  $g(\cdot)$  pode ser aproximado da seguinte maneira.

De forma análoga ao que desenvolvemos na seção (3.1) sejam  $u, v \in W \subset \chi$  e  $u_0, v_0 \in \chi'$  satisfazendo às equações

$$a(u, \omega) = (Lu, L\omega) = (u_0, L\omega) = f(\omega) \quad \forall \omega \in W \quad (3.27)$$

$$a(v, \omega) = (Lv, L\omega) = (v_0, L\omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in W. \quad (3.28)$$

Consideremos as relações

$$\tilde{\Lambda}_1 := g(u) + f(v) - a(u, v),$$

onde

$$\begin{aligned} g(u) &= a(u, \bar{v}) = (Lu, L\bar{v}); \quad f(v) = a(\bar{u}, v) = (L\bar{u}, Lv) \\ a(u, v) &= (Lu, Lv) \end{aligned}$$

a serem substituídas no resultado decorrente do desenvolvimento de

$$\begin{aligned} a(u - \bar{u}, v - \bar{v}) &= (Lu - L\bar{u}, Lv - L\bar{v}) = (Lu, Lv) - (L\bar{u}, Lv) \\ &\quad - (Lu, L\bar{v}) + (L\bar{u}, L\bar{v}) = a(u, v) - f(v) - g(u) + g(\bar{u}) \\ &= g(\bar{u}) - \tilde{\Lambda}_1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Da mesma forma temos as relações

$$(L\bar{u}, v_0) = g(\bar{u})$$

e

$$(L\bar{u}, L\bar{v}) = g(\bar{u})$$

bem como  $\tilde{\Lambda}_2 = (u_0, v_0)$  a serem substituídos no desenvolvimento de

$$\begin{aligned} a(u_0 - Lu, v_0 - Lv) &= (u_0 - Lu, v_0 - Lv) = (u_0, v_0) - (Lu, v_0) \\ &\quad - (u_0, Lv) + (Lu, Lv) \\ &= \tilde{\Lambda}_2 - g(u) - g(u) + g(u) \\ &= \tilde{\Lambda}_2 - g(\bar{u}). \end{aligned} \tag{3.30}$$

De (3.29) e (3.30) de modo análogo à seção (3.1) usamos as desigualdades de Schwarz para a soma e obtemos

$$|\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2 - 2g(\bar{u})|^2 \leq \left( \|Lu - L\bar{u}\|^2 + \|u_0 - L\bar{u}\|^2 \right) \left( \|Lv - L\bar{v}\|^2 + \|v_0 - L\bar{v}\|^2 \right)$$

Da propriedade da ortogonalidade, ou seja

$$(u_0 - L\bar{u}, Lu - L\bar{u}) = 0$$

e

$$(v_0 - L\bar{v}, Lv - L\bar{v}) = 0$$

obtemos o confinamento desejado para  $g(u)$  em função do operador  $L$ :

$$|\tilde{\tau} - g(\bar{u})| \leq \frac{1}{2} \|u_0 - Lu\| \|v_0 - Lv\| \tag{3.31}$$

com  $\tilde{\tau} = (\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2)/2$ .

## 3.2 Aplicações

### 3.2.1 Problema de Dirichlet para Placa Delgada

Seja o problema de valor de contorno dado na forma

$$\Delta\Delta u = f \quad \text{em } \Omega \subset \mathcal{R}^2 \tag{3.32}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{3.33}$$

A formulação fraca de (3.32) (3.33) se descreve da seguinte maneira. O elemento  $u \in H_0^2(\Omega)$  é procurado como solução de

$$a(u, \omega) = f(\omega) \quad \forall \omega \in H_0^2(\Omega),$$



onde  $\Omega$  é uma região de contorno regular, como definido na seção 1.3 e  $f \in L_2(\Omega)$ , onde

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx \\ f(u) &= \int_{\Omega} f u \, dx. \end{aligned}$$

A solução fundamental de (3.32) seja

$$\psi = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r \quad (3.34)$$

para a qual  $\Delta \Delta \psi = 0$ , sendo  $x_0 \in \Omega$  um ponto dado onde  $r = |x - x_0|, \forall x \in \Omega$ .

Para  $x_0 \in \Omega$  escrevemos a 3ª fórmula de Green dada por (2.29) (capítulo 2):

$$u(x_0) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta \psi \, dx + \int_{\partial \Omega} \left( u \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} - \Delta \psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (3.35)$$

para  $u \in H^2(\Omega)$ , sendo  $u \in C(\bar{\Omega})$  de acordo com o 1º Teorema de Sobolev 1.3.2, o que permite definir  $u(x_0)$ .

Por outro lado, olhando para (3.32) e (3.33) a sua formulação fraca pode ser agora descrita da seguinte maneira. Procuramos  $u \in H_0^2(\Omega)$  como solução de

$$a(u, \omega) = f(\omega) \quad \forall \omega \in H_0^2(\Omega). \quad (3.36)$$

Para a solução  $\bar{u} \in H_0^2(\Omega)$  a fórmula de Green (3.35) se reduz a

$$u(x_0) = \int_{\Omega} \Delta \bar{u} \Delta \psi \, dx. \quad (3.37)$$

Vamos introduzir aqui o funcional linear

$$g(u) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta \psi \, dx. \quad (3.38)$$

Aplicando em (3.38) a desigualdade de Schwarz obtemos

$$|g(u)|^2 \leq \int_{\Omega} (\Delta u)^2 \, dx \int_{\Omega} (\Delta \psi)^2 \, dx.$$

Com (3.34) obtemos um valor finito para a integral

$$\int_{\Omega} (\Delta \psi)^2 \, dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega} (1 + \ln r)^2 \, dx < \infty.$$

Então o funcional  $g : H^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}$  é limitado. Portanto a tarefa de confinar o valor  $u(x_0)$  dado por (3.37) é equivalente à de confinar o valor  $g(u)$  do funcional linear limitado  $g(\cdot)$ .

Para isso vamos aplicar exatamente o desenvolvimento da seção 3.1 (confinamento de funcionais), onde agora  $X = H^2(\Omega)$ ,  $W = H_0^2(\Omega)$  e  $Lu = \Delta u$ . Para  $X'$  seja o espaço de Hilbert  $L_2(\Omega)[(\cdot, \cdot)_0, \|\cdot\|_0]$ .

Seja então  $\bar{u}$  a solução de (3.36) e seja  $x_0 \in \Omega$ . Consideremos  $u$  e  $v$  funções quaisquer de  $H_0^2(\Omega)$  e também  $u_0, v_0$  funções de  $L_2(\Omega)$  que satisfazem as equações:

$$\int_{\Omega} u_0 \Delta \omega dx = \int_{\Omega} f \omega dx, \quad \forall \omega \in W \equiv H_0^2(\Omega) \quad (3.39)$$

$$\int_{\Omega} v_0 \Delta \omega dx = \int_{\Omega} \Delta \psi \Delta \omega dx, \quad \forall \omega \in H_0^2(\Omega). \quad (3.40)$$

Depois de alguns cálculos e reduções de termos semelhantes, seguindo os passos (3.26), ..., (3.31), encontramos, com (3.34) e (3.35) para  $u \in H_0^2(\Omega)$ :

$$\Lambda_1 = u(x_0) + \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx$$

e

$$\Lambda_2 = \int_{\Omega} u_0 v_0 dx.$$

Finalmente aplicando a desigualdade de Schwartz para a soma de forma análoga à aplicada sobre (3.29) e (3.30) obtemos com a propriedade da ortogonalidade o confinamento desejado para o valor  $\bar{u}(x_0)$  como aproximação:

$$|\mathfrak{Z}_k - u(x_0)|^2 \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} (u_0 - \Delta u)^2 dx \int_{\Omega} (v_0 - \Delta v)^2 dx, \quad (3.41)$$

com  $\mathfrak{Z}_k = \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2}$ .

Baseado nesse esquema geral apresentado na seção (3.1) vamos desenvolver o método de Diaz-Greenberg na forma de confinamento de um funcional.

### 3.2.2 Método de Diaz-Greenberg

Baseado no esquema geral desenvolvido baseado na seção 3.1 vamos proceder em seguida à formulação variacional do método de Diaz-Greenberg [5], [7] no que diz respeito ao confinamento da solução fundamental da equação governante do problema de valor de contorno dado. O método de confinamento aparelhado na seção 3.1 teve ponto de partida a hipótese de que o problema dado está colocado na forma semihomogênea. No presente desenvolvimento o problema de valor de contorno pode ser dado também na forma inhomogênea. Portanto seja aplicar o método

de Diaz-Greenberg ao problema [6]

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega \subset \mathcal{R}^N \quad (3.42)$$

$$u = u_0 \quad \text{s/ } \partial\Omega_1 \equiv \Gamma_1 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{s/ } \partial\Omega_2 \equiv \Gamma_2 \quad (3.44)$$

O método de Diaz-Greenberg se resume em confinar a solução  $\tilde{u}(x_0)$  do problema dado, expressada na fórmula de Green correspondente, com ajuda da qual  $\tilde{u}(x_0)$  é representada por uma soma de integrais de domínio e de contorno, trazendo implicitamente a solução fundamental da equação governante dada. Da mesma forma tratada anteriormente, seja  $\chi$  um espaço linear (ou uma variedade linear de um espaço de Hilbert  $H$ ) com um subespaço  $W$  e seja  $a(., .)$  uma forma bilinear simétrica contínua definida em  $H \times H$  de tal forma que

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H \quad (3.45)$$

$$a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in H \quad (3.46)$$

$$a(u, u) > 0 \quad \forall u \in W, u \neq 0. \quad (3.47)$$

Seja por hipótese  $H$  completo e  $W$  fechado em relação à norma energética

$$|u| = a(u, u)^{1/2} \quad (3.48)$$

e

$$\mathcal{F} : H \longrightarrow \mathcal{R} \quad (3.49)$$

seja um funcional linear limitado em  $W$  com respeito à norma (3.48). O problema dado (3.42), (3.43), (3.44) consideremos equivalente ao seguinte problema variacional:

$$P_1 \begin{cases} \text{Dado } u_0 \in H, \\ \text{ache } u \in H \text{ satisfazendo} \\ a(u, \omega) = \mathcal{F}(\omega), \forall \omega \in W, u - u_0 \in W. \end{cases}$$

Por questão de comodidade vamos demonstrar o seguinte teorema conhecido e apresentado em diversos livros de análise funcional ou cálculo variacional (veja por exemplo [13], [8]) com base na descrição do problema

$$P_2 \begin{cases} \text{Seja } u_0 \in H \text{ dado.} \\ \text{Ache } u \in H, \text{ solução de} \\ J[u] = a(u, u) - 2\mathcal{F}(u) \rightarrow \min, u - u_0 \in W. \end{cases}$$

**Teorema 3.1** *O problema extremal  $P_2$  tem no máximo uma solução.  $P_2$  é equivalente ao problema  $P_1$  dado acima.*

Prova:

Provaremos aqui apenas que toda solução P2 é solução de P1: Seja  $\bar{u}$  uma solução de P2, ou seja, vale escrever  $J[u] \geq J[\bar{u}]$  para  $u - u_0 \in W$ . Então vale escrever

$$J[u + t\omega] \geq J[u] \quad \forall \omega \in W, t \in \mathcal{R}$$

ou desenvolvendo:

$$J[\bar{u}] + 2t\{a(\bar{u}, \omega) - \mathcal{F}(\omega)\} + t^2 a(\omega, \omega) \geq J[\bar{u}]$$

ou

$$a(\omega, \omega)t^2 + 2\{a(\bar{u}, \omega) - \mathcal{F}(\omega)\}t \geq 0, \quad \forall \omega \in W$$

que é um polinômio do 2.º em  $t$  cuja condição de mínimo é dada pela derivada do mesmo em relação à  $t$ :

$$2a(\omega, \omega)t + 2\{a(\bar{u}, \omega) - \mathcal{F}(\omega)\} = 0 \quad \forall \omega \in W,$$

com a qual o mínimo é obtido para  $t = 0$ , ou seja

$$a(\bar{u}, \omega) - \mathcal{F}(\omega) = 0$$

ou

$$a(\bar{u}, \omega) = \mathcal{F}(\omega) \quad \forall \omega \in W.$$

Assim  $\bar{u}$  é solução de P1.

Observação: Se  $u \neq \bar{u}$  então só vale a desigualdade

$$J[u] > J[\bar{u}]$$

ou seja:  $\bar{u}$  é a única solução de P2. Portanto o problema P2 tem também solução única, sob as hipóteses (3.45), (3.46), (3.47).

Como considerado na seção 3.2.1, seja o espaço linear  $\chi'[(\cdot, \cdot), \|\cdot\|]$  munido de correspondente seminorma  $\|\cdot\|$  e produto interno semidefinido  $((\cdot, \cdot))$ <sup>1</sup>. Introduzamos um operador linear  $T$  que age no mapeamento

$$T: \chi \rightarrow \chi'$$

de tal forma que

$$a(u, v) = (Tu, Tv) \quad \forall u, v \in \chi. \quad (3.50)$$

<sup>1</sup>que por motivo de comodidade será escrito na forma do produto interno ordinário  $(\cdot, \cdot)$ , o que, sem dúvida não trará confusão.

Consideremos  $V'$  o subespaço linear de todos os elementos  $v' \in \chi'$  (ou no caso especial  $\chi' \equiv H'$ ) que satisfazem a equação

$$(v', T\omega) = 0 \quad \forall \omega \in W. \quad (3.51)$$

Além disso tomemos  $v'_0 \in \chi'$  como sendo, por hipótese, uma solução de

$$(v'_0, T\omega) = \mathcal{F}(\omega) \quad \forall \omega \in W. \quad (3.52)$$

Se  $u \in \chi \equiv H$  é um elemento com  $u - u_0 \in W$  e se  $u' \in H'$  é um elemento com  $u' - v'_0 \in V'$  então vale também a pertinência

$$u - \bar{u} \in W,$$

bem como

$$u' - T\bar{u} \in V'.$$

Mas de (3.51) com  $v' = u' - T\bar{u}$  e  $\omega = u - \bar{u}$

$$(u' - T\bar{u}, Tu - T\bar{u}) = 0, \quad u - \bar{u} \in W$$

encontraremos primeiramente

$$|(u' - T\bar{u}) + (Tu - T\bar{u})|^2 = |(u' - T\bar{u}) - (Tu - T\bar{u})|^2$$

e com isso também

$$|u' + Tu - 2T\bar{u}| = |u' - Tu|. \quad (3.53)$$

Escolhamos dois elementos  $v \in H(\Omega)$  e  $v' \in H'(\Omega)$  que de alguma maneira adequada estão à nossa disposição. Da desigualdade de Schwarz obtemos então

$$|(u' + Tu - 2T\bar{u}, v' - Tv)| \leq |u' + Tu - 2T\bar{u}| |v' - Tv| \quad (3.54)$$

que juntamente com (3.53) fornecem a desigualdade fundamental do método de Diaz-Greenberg [5], [6], [7]

$$|(u' + Tu, v' - Tv) - 2(T\bar{u}, v' - Tv)| \leq |u' - Tu| |v' - Tv|. \quad (3.55)$$

Em seguida vamos escolher apropriadamente  $v$  e  $v'$  tais que uma relação entre o produto interno  $(T\bar{u}, v' - Tv)$  em (3.55) e o valor da função  $\bar{u}(x_0)$  da solução  $\bar{u}$  no ponto  $x_0 \in \Omega$  possa ser realizada. Essa relação entre o p.i.<sup>2</sup> e o valor  $\bar{u}(x_0)$  para  $v$  e  $v'$  pode ser conseguida usando a 3ª fórmula de Green relacionada com a solução fundamental  $\psi$  da equação diferencial governante do problema de valor de

<sup>2</sup>p.i. é o mesmo que produto interno.

contorno dado (3.42), (3.43), (3.44). Para isso vamos admitir funções  $u_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $f \in L_2(\Omega)$  bem como  $g \in L_2(\Gamma_2)$  com  $\Gamma_2 = \partial\Omega - \Gamma_1$ . Vamos definir  $W$  como

$$W = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}. \quad (3.56)$$

Para  $\chi'$  escolhamos o espaço linear dos campos vetoriais  $v' = (v_1, \dots, v_N)$  com componentes  $v_j \in L_2(\Omega)$  tais que

$$(u', v') = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} u_j v_j dx,$$

com seminorma

$$|u'| = (u', u')^{1/2},$$

e seja o operador linear  $T : \chi \rightarrow \chi'$  definido por

$$Tu = \text{grad } u, \quad u \in \chi = H^1(\Omega). \quad (3.57)$$

Com base no 1º Teorema de Sobolev, seção 1.3.2, vamos trabalhar com funções  $u \in H^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ . Para essas funções podemos usar a 3ª fórmula de Green (2.28) para a solução fundamental de (3.42) em  $\Omega \subset \mathcal{R}^N$  dada por  $\psi$  (Ex.  $\psi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ , para  $N = 2$ ) conforme (2.7):

$$u(x_0) = \int_{\Omega} \text{grad } u \text{ grad } \psi \, dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds \quad (3.58)$$

que depois de alguma transformação segundo (2.28), pode ser escrita na forma

$$u(x_0) = - \int_{\Omega} (\Delta u) \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \psi - u \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \, ds. \quad (3.59)$$

Para a solução  $\bar{u}$  do problema de valor de contorno dado (3.42), (3.43), (3.44) tomemos  $\Delta u = f$  e as condições de contorno, substituindo-os em (3.59):

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_0) &= \int_{\Omega} f \psi \, dx + \int_{\Gamma_2} g \psi \, ds + \int_{\Gamma_1} u_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \psi \, ds - \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds \\ \Rightarrow u(x_0) &= \int_{\Omega} f \psi \, dx - \int_{\Gamma_1} u_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds - \int_{\Gamma_2} g \psi \, ds \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \psi \, ds - \int_{\Gamma_2} \bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Em (3.60) aparecem integrais de contorno que trazem a solução  $\bar{u}$  explicitamente. Com (3.57) e para  $v \in \chi$ ,  $v' \in \chi'$  com componentes em  $H^1(\Omega)$  obtemos, usando integração por parte:

$$(T\bar{u}, v') = \int_{\Omega} \text{grad } \bar{u} \cdot v' \, dx = - \int_{\Omega} \bar{u} \, \text{div } v' \, dx + \int_{\partial\Omega} \bar{u}(v'n) \, ds$$

e

$$(T\bar{u}, Tv) = \int_{\Omega} \text{grad } \bar{u} \cdot \text{grad } v \, dx = - \int_{\Omega} \Delta \bar{u} \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \cdot v \, ds.$$

Dessas duas expressões obtemos por subtração:

$$\begin{aligned} (T\bar{u}, v' - Tv) &+ \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Gamma_1} u_0(v'n) \, ds + \int_{\Gamma_2} g v \, ds \\ &= - \int_{\Omega} \bar{u} \, \text{div } v' \, dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} v \, ds + \int_{\Gamma_2} \bar{u}(v'n) \, ds. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Esta última expressão (3.61) comparada com (3.60) sugere para  $\text{div } v'$  a composição de um problema acessório de valor de contorno, qual seja:

$$P3 \begin{cases} \text{div } v' = 0 & \text{em } \Omega \\ v'n = -\frac{\partial \psi}{\partial n} & \text{s/ } \Gamma_2 \\ v = -\psi & \text{s/ } \Gamma_1 \end{cases}$$

que submetido à expressão (3.61) fornece

$$(T\bar{u}, v' - Tv) = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \psi \, ds - \int_{\Gamma_2} \bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds \quad (3.62)$$

coincidente com (3.60). Por comparação de (3.62) com (3.60) obtemos

$$(T\bar{u}, v' - Tv) = \bar{u}(x_0) - \delta \quad (3.63)$$

sendo

$$\delta = \int_{\Omega} f(\psi + v) \, dx - \int_{\Gamma_1} u_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} + v'n \right) \, ds + \int_{\Gamma_2} g(\psi + v) \, ds. \quad (3.64)$$

Consideremos  $u \in \chi$  um elemento tal que para  $W$  dado por (3.56) vale a pertinência  $u - u_0 \in W$ , e seja  $u' \in \chi'$  um elemento que satisfaça a equação variacional

$$(u', T\varphi) = \mathcal{F}(\varphi) \quad \forall \varphi \in W, \quad (3.65)$$

sendo ela a forma variacional fraca do problema de valor de contorno

$$P4 \begin{cases} -\text{div } u' = f & \text{em } \Omega \\ u'n = g & \text{sobre } \Gamma_2 \end{cases}$$

Introduzindo em (3.55) as expressões:

$$\lambda_1 = (Tu, v' - Tv) \quad e \quad \lambda_2 = (u', v' - tv)$$

$$\beta = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

obtemos com (3.55) e (3.63) o confinamento da solução  $\bar{u}(x_0)$  dado pela expressão

$$(\delta + \beta) - ]u' - Tu[ ]v' - Tv[ \leq \bar{u}(x_0) \leq (\delta + \beta) + ]u' - Tu[ ]v' - Tv[, \quad (3.66)$$

sendo (3.66) o resultado do método de Diaz e Greenberg aplicado sobre o problema de valor de contorno (3.42), (3.43), (3.44), onde  $] \cdot [$  é a seminorma energética. É importante observar que no desenvolvimento de (3.66) aparece a solução fundamental exceto na fórmula de Green (3.59) ou seja, na fórmula de Green (3.60) que resulta de (3.59). O que necessitamos é simplesmente a validade da fórmula de Green (3.59), enquanto que a pergunta se a solução fundamental  $\psi$  possui norma energética finita, não tem importância alguma no método de Diaz-Greenberg.

Observação:

*Quando  $u' = Tu$ , o que redundava naturalmente em que  $u = \bar{u}$ , o lado direito de (3.66) será  $\delta + \beta$ . O mesmo acontece para  $v' = Tv$ . Assim teremos para ambos os casos:*

$$\bar{u}(x_0) = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 + \delta$$

*Nesse caso, para  $v' = Tv$ ,  $v$  é a solução do problema*

$$P5 \begin{cases} \Delta v = 0 \\ \psi + v = 0 \quad s/ \Gamma_1 \\ \frac{\partial}{\partial n}(\psi + v) = 0 \quad s/ \Gamma_2. \end{cases}$$



# Bibliografia

- [1] Agmon, S. (1965) - Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand Math. Studies Nr.2.
- [2] Ciarlet (1978) - The Finite Element Method for Elliptic Problems - North Holland Publ. Co.
- [3] Collatz, L. (1966) Functional Analysis and Numerical Mathematics. Academic Press. N.Y.
- [4] Collatz, L. (1966) The Numerical Treatment of Differential Equations.
- [5] Diaz, J.B. (1959) - Upper and Lower Bounds for Quadratic Integrals, at a point, for Solutions of Linear Boundary Value Problems. Langer, R. E.(Boundary problems indifferential equations-Madison 1959.
- [6] Diaz, J.B., Greenberg, H.J. (1973) - Upper and Lower Bounds for the Dirichlet Problem. SIAM J.Appl - Math (25), 325-334.
- [7] Greenberg, H.J. (1948) - The Determination of Upper and Lower Bounds for the Solution of the Dirichlet Problem. J. of Math. and Phys. (27), 161-182.
- [8] Heuser, H. (1975) - Funktionalanalysis. Stuttgart.
- [9] Maple, C.G. (1950). The Dirichlet Problem: Bounds at a Point for the Solution and its Derivatives. Quart. Appl. Math.(8).
- [10] Adams, R.A. (1975) - Sobolev Spaces - Academic Press.
- [11] Lusternik, L.A., Sobolev, V.J. (1974) - Elements of Functional Analysis J. Wiley N. Y.
- [12] Michlin, S.G. (1962) - Variationsmethoden der Mathematischen Physik - Berlin.
- [13] Michlin, S.G. (1965) - The Problem of the Minimization of a Quadratic Functional. Berlin.
- [14] Michlin, S.G. (1969) - Numerische Realisierung von Variationsmethoden. Berlin.
- [15] Nécas, J. (1967) - Les Methodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques. Paris.

- [16] Synge, J.L. (1956) Upper and lower bounds for the solution of problems in elasticity. Proc. Roy. Irish Acad. A53.
- [17] Courant, R.; Hilbert, D. (1953) - Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers - N. York, London.
- [18] de Lima, F.S (1973) - Introdução ao Estudo das Fórmulas de Green. Depto. Eng. Civil. PUC - RJ - Notas de aula.