Modelagem e Dinâmica de Estruturas Articuladas para Propósitos de Animação em Computação Gráfica

Luis Antonio Rivera Escriba
rivera@inf.puc-rio.br

Ivan Fábio Mota de Menezes
ivan@tecgraf.puc-rio.br

Paulo Cezar Pinto Carvalho
pcezar@visgraf.impa.br

PUC-RioInf.MCC20/99 november, 1999

Abstract: Motion generation of articulated rigid bodies for computer graphics animation is a problem being analyzed with the purpose of obtaining a real-time and computationally cheap animation. Its complexity lies in the control of holonomic restrictions due to the articulations. In the present work, we seek to emphasize the geometric representation of the articulated objects using hierarchical graphs, the dynamic formulation of its movements based on the Euler and Newton principles, and its recursive resolution, which allows a linear solution involving 3×3 matrices.

Keywords: Dynamic simulation, animation, animation based on physics models, articulated rigid bodies, recursive dynamic formulation.

Resumo: A geração de movimento de corpos rígidos articulados para a animação em computação gráfica é um problema que vem sendo analisado com o objetivo de se obter uma animação real e computacionalmente barata. Sua complexidade está no controle das restrições holonômicas devido às articulações. Neste trabalho, procura-se enfatizar a representação geométrica dos objetos articulados usando grafos hierárquicos, a formulação da dinâmica de seus movimentos com base nos princípios de Euler e Newton, e sua resolução em forma recursiva, que permite uma solução em forma linear envolvendo matrizes de ordem 3×3.

Palavras-Chave: Simulação dinâmica, animação, animação baseada em modelos físicos, corpos rígidos articulados, formulação dinâmica recursiva.

Modelagem e Dinâmica de Estruturas Articuladas para Propósitos de Animação em Computação Gráfica

1 Introdução

O movimento dos objetos no mundo real está sujeito a restrições que impedem a sua livre movimentação. Um tipo de restrição que constitui a dependência de um corpo com os outros dá-se quando estes formam uma estrutura articulada, bastante estudada na robótica. A restrição dos movimentos de cada corpo que forma essa estrutura articulada manifesta-se em toda a estrutura, razão pela qual torna complexa sua análise dinâmica.

O uso da simulação dinâmica, na computação gráfica, para resolver o movimento de estruturas complexas articuladas, interessa cada vez mais aos animadores e simuladores. Na simulação dinâmica, ou animação, os objetos são modelados como massas atuando sob a influência das forças e torques. Dessa forma, o movimento completo dos objetos não é explicitamente dado pelo animador, e sim, é obtido resolvendo-se as equações dinâmicas do movimento dos objetos. Um dos objetivos do uso da simulação dinâmica, nesta classe de objetos, é tentar reproduzir seu comportamento complexo, com uma mínima interação do usuário.

Existem dois problemas fundamentais com o uso da análise dinâmica de estruturas articuladas. O primeiro é que a geração do movimento requer um grande número de cálculos computacionais. O segundo problema é o de determinar as forças e torques requeridos para produzir uma sequência particular de movimento, sobretudo quando é necessário gerar movimentos dos objetos de forma controlada, com restrições. Assim, a dinâmica inversa enfoca este problema.

Gerar o movimento em objetos rígidos articulados não é complicado, porém requer uma formulação direta, bem estruturada, das equações dinâmicas considerando-se a interação entre seus componentes. Um dos primeiros objetivos, neste processo de geração de movimentos, é calcular as acelerações de cada corpo rígido e com estas determinar as suas posições e orientações.

Neste trabalho, aborda-se a modelagem de objetos articulados compostos por corpos rígidos, formulando-se os movimentos em duas etapas: uma primeira etapa, na formação da estrutura articulada na qual se aplica a dinâmica restringida inversa; e a segunda etapa, na geração do movimento da simulação com a dinâmica direta enfatizando-se a formulação e resolução das equações em tempo real que satisfaça a animação. Formula-se a estrutura articulada em forma de grafo hierárquico de tal forma que permita o cálculo das forças de restrições utilizando-se matrizes de ordem 3x3 e evitando-se complexidades computacionais maiores do que a linear. Todos estes tópicos são abordados em seis seções. Na seção 2, descrevem-se as estruturas articuladas e seus componentes. A seção 3, aborda a modelagem dos objetos articulados definindo-se os tipos de vínculos utilizando-se a dinâmica inversa para a criação do corpo articulado, segundo uma estrutura hierárquica. Na seção 4, formula-se a dinâmica direta de corpos articulados, com o enfoque da dinâmica de Euler-Newton, considerando-se suas restrições devido aos vínculos existentes entre as primitivas. Na seção 5, descrevem-se as equações de movimento de forma recursiva para sua solução em forma linear. Finalmente, na seção 6, são resolvidas as equações dinâmicas através de sequências de passos constantes integrando-se pelo método de Euler para se obter os novos estados dos corpos.

2 Estruturas Articuladas

Os termos e conceitos utilizados em sistemas articulados em diversas fontes de informação diferem um do outro dependendo da sua procedência visto que uns provêm da engenharia e da robótica e, outros, da física. Para a animação por computador, os conceitos e termos são próximos aos usados na robótica.

Estrutura articulada: é uma estrutura composta por corpos rígidos e articulações mecânicas. Possui uma hierarquia na definição de suas partes, podendo ser representada por uma estrutura de grafo tipo árvore. Com fins de modelagem de movimento, na criação de uma estrutura articulada podem-se definir vínculos e graus de liberdade.

Um corpo rígido está composto por partículas com uma distância constante entre elas (sistema rígido), em todo instante de tempo. Caso contrário, seria definido como um sistema elástico em que as distâncias entre as suas partículas variam, sendo estas as características primárias de corpos deformáveis. Na verdade, no mundo real, não existe um corpo que não sofra deformação alguma visto que os corpos rígidos também se deformam, mas muito pouco em relação a um corpo elástico. Por essa razão , para efeitos de análise, a estrutura rígida é considerada como corpo completamente não elástico.

A estrutura articulada como um todo vem a ser um objeto e, como tal, tem diferentes partes e categorias, as quais vão permitir um melhor entendimento de sua análise dinâmica.

2.1 Definição dos Objetos

Nesta seção, define-se a forma como vai ser analisado o aspecto dinâmico dos objetos articulados em relação aos vínculos, restrições, corpos, etc.

2.1.1 Objetos e Vínculos

Um objeto pode ser definido como uma coleção de corpos rígidos relacionados por restrições ou vínculos formando um objeto complexo. Esse, por sua vez, pode ter como componente um outro objeto. Assim, os elementos de um objeto são definidos como primitivas, vínculos e componentes.

- **Primitiva**: é um objeto simples, um corpo físico individual com características próprias (com massa, inércia, orientação, etc.). Em geral, é um corpo poliédrico, sobre o qual é analisada a dinâmica de seu movimento.

- **Vínculo**: é um elemento (sem massa) que relaciona duas primitivas para formar um objeto. Esse elemento define a restrição geométrica dos corpos, determinando a restrição holonômica. Tal elemento, nesse trabalho, será também denominado como junta, elemento de articulação ou elemento de conexão .

- **Componente**: é um objeto que faz parte de um outro objeto maior, inter-relacionado por vínculos. Assim, um componente pode ter como elemento uma primitiva ou outros componentes formando uma estrutura.

A partir dessas considerações, avalia-se que uma primitiva vem a ser um corpo material básico da animação enquanto o vínculo e o componente referem-se às restrições da dinâmica. O componente é em geral uma unidade lógica no sistema que serve para dar uma organização hierárquica dos objetos. O procedimento para se gerar movimento de uma estrutura será feita em forma de árvore ou grafo acíclico, onde uma primitiva origem ou raiz vai interagir com os objetos sucessores ou “filhos” que se relacionam. As folhas ou nós finais do grafo acíclico são primitivas. Uma organização hierárquica também pode permitir a modificação incremental do conjunto de equações representando o comportamento do objeto [CRE92].

De acordo com a representação da estrutura de um objeto em estrutura de grafo e considerando-se os três elementos descritos, então, para qualquer objeto componente, existe um sub-grafo. A profundidade de um grafo simples composto por uma única primitiva é zero. A profundidade 1 é de um grafo composto de objetos componentes como nós relacionados com um vínculo que representa um arco. Em geral, grafo de profundidade $n + 1$ é construído desde o grafo de profundidade n, considerando-se todos os nós deste nível por um grafo de profundidade 1. A Figura 1 mostra uma estrutura articulada simples representada por meio de uma estrutura de grafos.

Com o enfoque descrito, nesse trabalho, representam-se os objetos em forma de grafos acíclicos (hierárquicos), onde os nós vêm a ser as primitivas e os elementos de juntas os arcos. Na estrutura de cada arco, são representadas as características físicas e geométricas da articulação, como será visto na seção de representação de objetos articulados, enquanto em cada nó se atribui as características de cada primitiva, para efeito de simplicidade da formulação dinâmica de movimento.

2.1.2 Objetos Articulados

Como os objetos articulados estão compostos de corpos rígidos conectados por elementos de junta ou vínculo, esse vínculo pode ser um elemento de comprimento maior ou igual a zero que une um ponto de cada corpo, dependendo do tipo de vínculo estabelecido.

Nesse trabalho, será usado o termo "objetos" como referência a objetos articulados como um todo. Internamente, cada corpo rígido será tratado como uma entidade separada para se calcular as forças e torques resultantes que atuam sobre ele.

Quando uma força linear é aplicada em um ponto de um dos componente do objeto, este transmite uma força sobre o outro corpo através do vínculo e, da mesma forma, transmite um torque gerado por esta força. Com o objetivo de produzir a dinâmica do objeto, na seção a seguir, modelam-se os diferentes tipos de articulações já que a forma de cálculo destas grandezas vetoriais depende dos tipos de articulações usados.

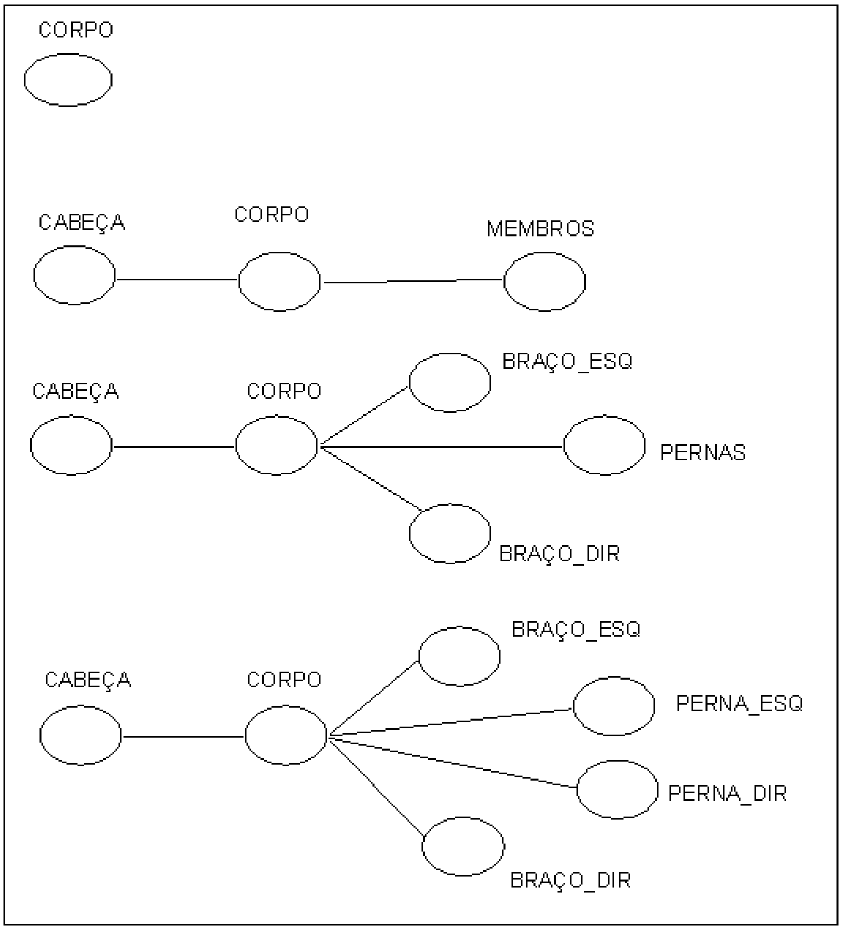


Figura 1: Estrutura de grafo para um modelo simples de um corpo.

3 Modelagem de Objetos Articulados

Uma fase fundamental na animação de objetos articulados é a modelagem dos corpos e sua organização estrutural no armazenamento de seus dados descrevendo-se as características estáticas e dinâmicas de cada corpo. Esta etapa de construção do modelo influenciará na geração do movimento aplicando-se alguma estratégia de formulação dinâmica.

Amirouche [AMI92], que denomina os corpos rígidos articulados como multicorpos, apresenta vários tipos de articulações com um enfoque de engenharia mecânica, ilustrando a interconexão entre os corpos rígidos que compõem a estrutura articulada. Em geral, a conexão restringe o movimento de um corpo particular em relação ao movimento de rotação. Na Figura 2, pode-se observar a relação de graus de liberdade

(GDL) e formas de juntas entre os corpos conectados. A seguir, apresentam-se alguns tipos de juntas (frequentemente usados), que são :

- **Articulação livre**: definida como uma ligação entre dois corpos permitindo o movimento nos 6 GDLs (3 de rotação e 3 de translação). A Figura 2(a) mostra este tipo de junta, onde os corpos A e B estão conectados por um vínculo entre os pontos O e O' dos respectivos corpos. O comprimento de vínculo é maior ou igual a zero.

- **Articulação de bola-caixa**: também conhecida como junta esférica, é obtida a partir de uma articulação livre, quando os pontos do vínculo (O e O' da Figura 2(a)) são coincidentes, isto é, quando a distância entre os pontos de vínculo dos corpos é zero. Um exemplo deste tipo de conexão é apresentado na Figura 2(b), onde o ponto de articulação O é o ponto comum entre os dois corpos de centros de massa $\boldsymbol{X}_A$ e $\boldsymbol{X}_B$, respectivamente, e, sendo $\boldsymbol{r}_{AO}$ e $\boldsymbol{r}_{BO}$ as posições dos pontos de vínculo do centro de massa de cada corpo respectivo, satisfazendo a condição:
$$\boldsymbol{X}_{AO} = \boldsymbol{X}_A + \boldsymbol{r}_{AO} = \boldsymbol{X}_B + \boldsymbol{r}_{BO} = \boldsymbol{X}_{BO}. \tag{1}$$
Da equação (1) pode-se expressar a equação de restrição dinâmica para os corpos A e B, denominada função de restrição holonômica $\Phi(t)$, que resulta da condição geométrica imposta entre os corpos ligados. A função $\boldsymbol{\Phi}(t)$ é obtida a partir da equação (1), como
$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{X}_A + \boldsymbol{r}_{AO}(t) - \boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{r}_{BO}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$
A derivada da função $\boldsymbol{\Phi}(t)$ fornece a velocidade do movimento dos pontos de restrição,
$$\boldsymbol{\Phi}'(t) = \boldsymbol{V}_{AO}(t) - \boldsymbol{V}_{BO}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$
Estas duas velocidades estão expressadas em relação aos respectivos corpos e no sistema referencial universal (SRU)[1], vide Figura 2(b).

- **Articulação de revolução**: a revolução é muito comum na conexão de corpos na robótica. Este tipo de conexão permite que um corpo gire em relação a outro em torno de um eixo particular, que passa pelo ponto de articulação comum

[1]SRU é um sistema de referência inercial, e portanto, estático e único no ambiente de simulação, em relação ao qual os objetos vão se movimentar.

entre os dois corpos. Um exemplo desse tipo de conexão encontra-se na Figura 2(c).

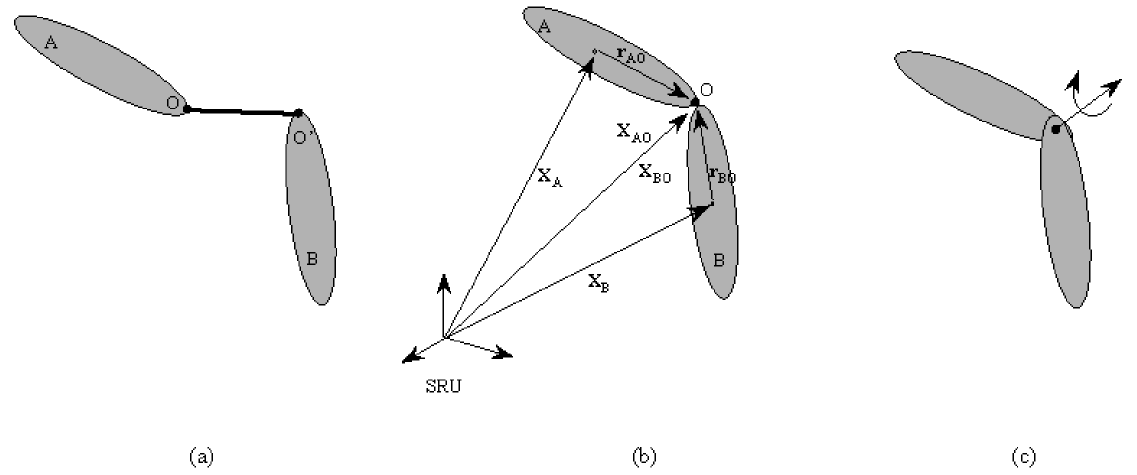


Figura 2: Figuras articuladas: (a) articulação livre; (b) articulação bola-caixa; (c) articulação tipo revolução.

Dos tipos de articulações acima descritos, considerou-se o tipo de bola caixa para efeitos de análise dinâmica, enquanto os outros tipos não são analisados neste trabalho.

Em um objeto articulado, é necessário analisar o comportamento dos pontos de conexão entre cada par de corpos ligados. Desta forma, é necessário manter a distância entre estes dois pontos, dentro de um intervalo diferencial suficientemente pequeno que deve ser satisfeito durante toda a dinâmica do objeto. Pela existência de restrições devido às juntas, considera-se que essa parte é um caso complexo de representação [BRZ92]. O comportamento dos corpos depende da aplicação das forças de restrições que atuam nos pontos de conexão de cada corpo, permitindo que os corpos adjacentes se movimentem em forma conjunta.

A força de restrição, neste modelo, é denominada restrição dinâmica [BRZ92] e é originada devido à existência de outras forças ou torques em alguns dos corpos componentes do objeto. Uma restrição pode ser:

- Ponto-a-ponto
- Ponto-a-fixo.

O **ponto-a-ponto** é considerado como junta bola caixa que, para efeitos de estática e geometria dos objetos, é um modelo de junta indicado. Já a restrição **ponto-a-fixo** ocorre quando um corpo está vinculado a um ponto fixo no espaço, que pode ser representado por um corpo de massa infinita, de tal modo que não possa se movimentar durante a animação. Pode se aproveitar esta característica de corpos imóveis atribuindo-as aos pontos fixos, pisos, paredes, etc., que durante a animação não mudam de posição nem de orientação [2].

3.1 Modelagem de Vínculos

Os vínculos podem ser definidos como uma relação entre dois pontos, sendo um de cada corpo rígido, ou um ponto de um corpo e outro ponto no espaço (ponto-a-fixo).

Os vínculos permitem que os pontos de contato sejam mantidos coincidentes. Para isto, é necessário criar forças que puxem os corpos nos pontos de um contra o outro, quando tentam de se separar, ou empurrem, quando tentam se interpenetrar. Existem três estados em que dois corpos relacionados podem estar num instante de análise dinâmica: afastados, interpenetrados e juntos ou coincidentes [RIV96]. As ações para manter pontos coincidentes podem ser vistas na Figura 3.

Várias formas são utilizadas para implementar este tipo de restrição:

- Uma primeira forma pertence à classe de restrição rígida ou *hard*, em que não existe violação de alongamento ou esticamento do vínculo (elemento de junta) quando os corpos estão em estados diferentes do normal. Neste sentido, diz-se que o vínculo é rígido porque o comprimento deste permanece igual em todos os instantes da dinâmica da estrutura.

- Uma segunda forma de implementar o vínculo é mediante a classe de restrição suave ou *soft*, que é simples e permite uma animação harmoniosa do objeto. Consiste em se usar um elemento de mola como vínculo. Nesse caso, a força da mola não permite que os pontos de junta formem estados diferentes de normal (propriedade de restrição de junta) em forma pronunciada. A mola mantém a

[2] Para manter a orientação constante durante o cálculo da dinâmica do objeto, sua matriz de inêrcia deve ser uma matriz nula.

característica de corpos ligados durante a animação. Esta classe de restrição é usada em vários trabalhos de corpos vinculados, Christopher [CHR94] a usa na implementação de *Asgard* considerando a constante de amortecimento bastante grande e o comprimento da mola suficientemente pequeno.

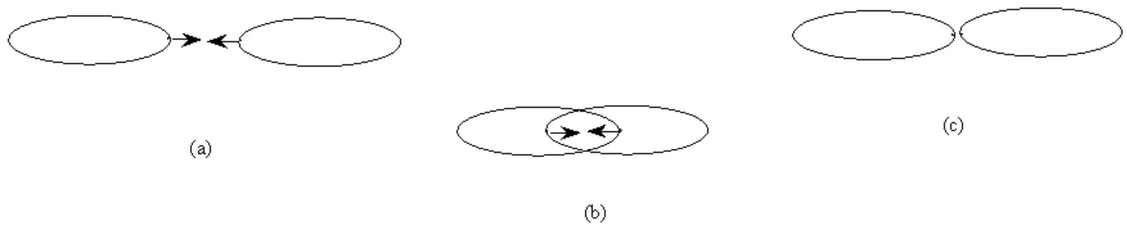


Figura 3: Ação de forças de restrição em um elemento de vínculo. (a) estado de afastado; (b) estado interpenetrado; (c) estado normal ou coincidentes.

Em muitos trabalhos de estruturas articuladas são permitidas as interpenetrações entre os componentes de um objeto, visto que não é considerada a detecção de colisões entre componentes adjacentes de um objeto ou que sem usar os algoritmos de detecção de colisões usam outros tipos de controle de interpenetração (estes enfoques podem ser vistos nas referências [CHR94, MOU94]). A Figura 4 apresenta uma configuração de componentes adjacentes que se interpenetram e outra configuração de componentes que se tangenciam por ação de contato entre os componentes adjacentes.

Os vínculos de uma estrutura articulada definem os graus de liberdade, dependendo do tipo de vínculo que cada articulação representa. O número de graus de liberdade ajuda na determinação do número de sistemas de equações lineares e variáveis que em geral são acelerações.

A junta modelada, para efeitos de análise deste trabalho, é de tipo *hard*.

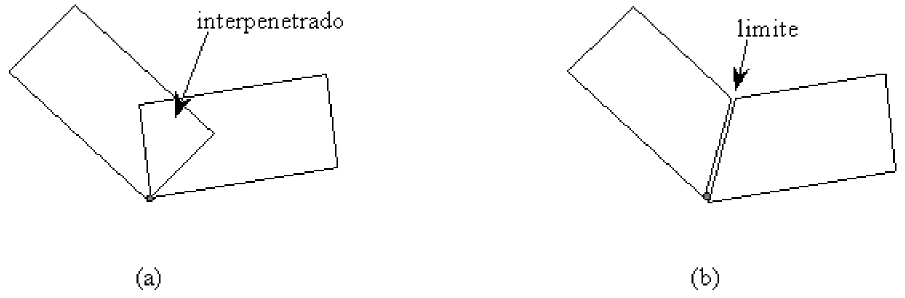


Figura 4: Configuração de rotação de um objeto articulado. (a) interpenetração dos componentes adjacentes; (b) limite de rotação controlado por detecção de colisões.

3.2 Modelagem de Primitivas

Existem várias formas de representar as primitivas de estruturas articuladas, tais como, estruturas formadas por hastes (esqueleto, adotado nas referências [ARM85, ARM87]), superfícies e volumes. Neste trabalho, utilizam-se superfícies, considerando-se que um corpo é composto por superfícies planas formando faces.

No trabalho de simulação de corpos rígidos, realizado por Rivera [RIV96], foram utilizadas formas poliédricas regulares - por sua simplicidade de cálculo do tensor de inércia em relação a seu centro de massa [3] - e de análise de interferência geométrica, para efeito de colisões. Por esta razão, dá-se, aqui, a continuação desse trabalho, considerando-se corpos articulados. As primitivas são poliedros convexos que relacionados entre cada par, mediante um ponto situado a uma distância do centro de massa de cada primitiva, formando o ponto de articulação (vide Figura 5), porque um ponto no espaço pode ser expresso em relação à inércia de qualquer corpo.

[3] O centro de massa do corpo está no seu centro geométrico. Neste ponto considerou-se o sistema referencial do objeto (SRO)

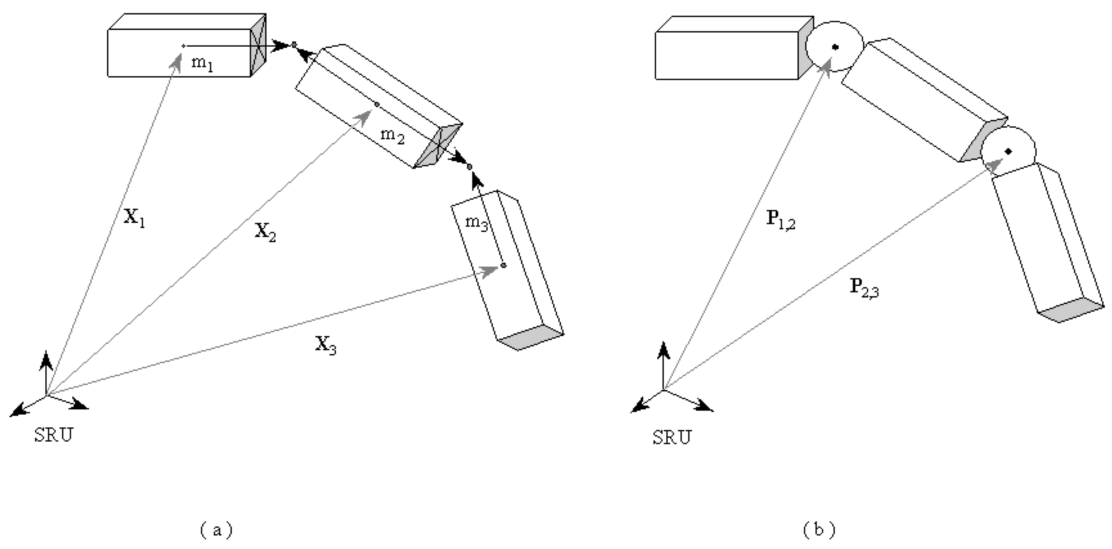


Figura 5: Modelo de estrutura articulada proposto para a dinâmica: (a) três corpos restritos em relação a seus centros de massa; (b) visualização da estrutura articulada.

3.3 Modelagem do Movimento para Formar a Estrutura Articulada

Existem dois níveis de movimento dos corpos, considerados no presente trabalho. Um primeiro, quando se forma a estrutura articulada (movimento restringido) com o uso da dinâmica inversa; e, outro, o movimento de fato dos objetos na simulação usando a dinâmica direta.

O movimento restringido dá-se na etapa de formação da estrutura articulada, o que proporciona às primitivas definidas e os pontos de vínculo em relação a cada corpo. O objetivo deste nível de movimento é satisfazer a condição inicial da restrição holonômica dada pelas expressões (1, 2 e 3) e formar a estrutura em forma de grafo hierárquico na representação do objeto articulado.

O movimento aplicado, neste nível, é a dinâmica restringida ponto-a-fixo, apresentada por Barzel [BRZ88, BRZ92], onde o corpo-pai ou *ancestor* considerado, permanece fixo. Portanto, o ponto de junta considerado sobre este corpo também permanece fixo e o que se movimenta é o corpo filho ou *sucessor*, com o objetivo de unir o ponto de junta definido sobre este último corpo com o ponto fixo definido sobre o ancestor (vide Figura 6), sendo o ponto fixo o ponto de restrição. Este processo é realizado em forma recursiva segundo uma sequência para formar um grafo hierárquico, de raiz ou origem, filho, de esquerda para a direita, e em profundidade.

A equação dinâmica é formulada como "qual é a força $\boldsymbol{f}_r$ que deve ser aplicada em um ponto $\boldsymbol{p}_r$ de um corpo para que este percorra até outro ponto $\boldsymbol{p}_0$":

$$\boldsymbol{f}_r = -m_r.\boldsymbol{g} - \frac{2}{dt} m_r.\boldsymbol{v}_r - \frac{1}{dt^2}(\boldsymbol{p}_r - \boldsymbol{p}_0), \tag{4}$$

onde $\boldsymbol{f}_r$ é a força necessária que deve ser aplicada sobre o ponto $\boldsymbol{p}_r$ do corpo r de massa m_r, para ser levado até o ponto $\boldsymbol{p}_0$; $\boldsymbol{v}_r$ é a velocidade inicial do corpo r, em cada instante de iteração na movimentação do corpo, com intervalo de tempo de cada iteração dt.

Na implementação, o movimento de cada corpo é gerado com o mesmo módulo do sistema de simulação, apenas considerando a força de restrição ponto-a-fixo $\boldsymbol{f}_r$, formulada acima, aplicado a um corpo de cada vez.

4 Dinâmica do Movimento de Corpos Ligados

Quando os movimentos são descritos a partir das informações de deslocamento e velocidade, é utilizada a cinemática. Mas, ao se relacionar o movimento com as suas causas e as propriedades dos objetos, utiliza-se por sua vez, a dinâmica. A estática estuda o equilíbrio dos sistemas materiais e, juntamente com a dinâmica e a cinemática, compem o estudo da dinâmica do movimento.

Um corpo pode estar em equilíbrio mecânico possuindo movimento em relação ao sistema de referência do universo. Neste caso, o movimento possui velocidade constante com acelerações linear e angular nulas. Um corpo pode ter desequilíbrios internos e externos, indicando que as partículas que o compem podem estar em movimento, caso de corpos flexíveis. Nos corpos rígidos, não há a possibilidade de movimentos internos o que faz com que o sistema permaneça em equilíbrio interno. No entanto, nas estruturas articuladas, considera-se o movimento interno como a variação da posição dos componentes em relação aos outros de mesma estrutura, existindo a possibilidade de movimento interno da estrutura como um todo.

As forças que atuam sobre cada primitiva da estrutura geram os movimentos linear e angular, que se propagam em toda a estrutura através dos vínculos.

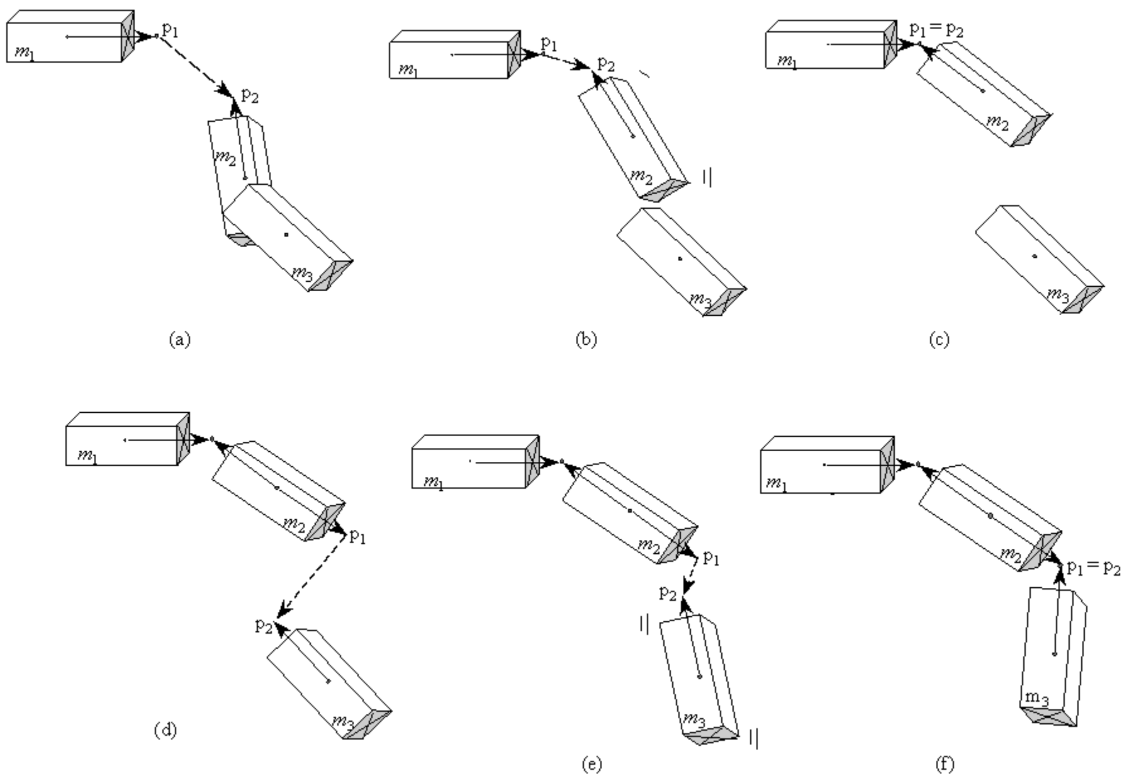


Figura 6: Dinâmica restringida ponto-a-fixo: (a) posição inicial dos corpos 1 e 2, onde os pontos p_1 e p_2 devem coincidir; (b) o ponto p_2 movimentando-se carregando o corpo 2 para o ponto p_1; (c) posição final dos corpos 1 e 2; (d), (e) e (f), mesmos processos que os anteriores, para corpos 2 e 3.

4.1 Equações de Movimento

As equações são componentes importantes em uma animação porque elas expressam o comportamento dos objetos mediante um modelo matemático. Em geral, existem três classes de equações, são elas:

- **Equações de movimento**: geralmente correspondem às formulações de Newton-Euler que relacionam a aceleração dos objetos com as forças e torques aplicadas sobre eles. Também podem ser formuladas usando-se, por exemplo, a mecânica Langrangiana.

- **Equações de restrição**: estabelecem a relação de restrição entre os objetos e usualmente modelam o material vínculo ou outros relacionamentos cinemáticos entre os objetos.

- **Equações de controle**: representam alguma restrição adicional imposta pelo usuário ao movimento dos objetos.

Das três equações, as duas primeiras serão usadas aqui, cuja operação e aplicação será mediante um esquema de equações para cada par de corpos vinculados. O terceiro tipo de equação pode ser aplicado para gerar um movimento mais harmonioso dos corpos, podendo com este tipo de equações, facilitar o controle de movimento dos objetos, pelos usuários. Neste trabalho, não é usado.

4.2 Formulação de Equações de Movimento

Existem várias formulações dinâmicas que expressam formalmente o movimento de estruturas articuladas, entre elas estão: formulações de GibbAppel [WIL89], formulação recursiva de Armstrong [ARM85, ARM87], formulação recursiva de Langrange [MAR65], formulação de Newton-Euler [FOR88, WIL89], formulação de D'Alembert [ISA87], dentre outras (ver, por exemplo, referência [WIL87]).

A forma recursiva de Armstrong descreve as equações de movimento baseada na formulação de Newton-Euler para ser resolvida em forma recursiva, considerando-se a estrutura articulada em forma de árvore. Neste caso, considera-se o sistema de momento de inércia local de cada corpo em relação ao ponto de vínculo com o pai, em que todos os cálculos de torques são feitos em relação a esse ponto. Este método, embora não apresentar a dedução formal das fórmulas, resolve o problema de restrições em forma linear. Um dos detalhes, dado por Armstrong, é transformar as magnitudes vetoriais de cada sucessor em relação ao sistema de referência local do pai.

A formulação Gibbs-Appell tem sido sucessivamente utilizada nas animações [WIL87]. Trata-se de um método geral, porém caro computacionalmente, porque envolve inversão de grandes matrizes.

Neste trabalho, formulam-se as equações de movimento baseadas nas formulações de Newton-Euler. Considera-se o centro de massa do objeto como centro de referências SRO, formula-se a notação recursiva para se calcular as magnitudes vetoriais em relação ao SRU. Estas formulações estruturadas são mais simples de serem entendidas que as formulações Langrangianas (esta não deixa explícito os componentes vetoriais que atuam em cada corpo [VAN93]). A dinâmica do objeto é analisada em forma recursiva, baseada em grafos hierárquicos, como se explicará posteriormente.

As equações de movimento relacionam velocidade (linear e angular), massa, forças, aceleração (linear e angular), momento de inércia, torques, etc. A orientação de cada primitiva é definida pela orientação de seu sistema de referência local (SRO) em relação ao sistema universal (SRU). Sendo esta orientação representada mediante uma matriz de rotação $\boldsymbol{R}$, podendo ser representada usando *quaternions* [PLE89].

As forças que produzem a dinâmica das estruturas articuladas atuando sobre cada primitiva, dão-se em dois níveis: forças externas e forças internas.

As forças externas são aplicadas diretamente sobre cada primitiva, produzindo nela torque em relação a seu centro de massa. As forças internas são as forças de restrição que estão presentes em cada par de corpos vinculados por uma junta, obrigando que os corpos estejam ligados. Em geral, para o caso de restrições holonômicas, a segunda derivada da restrição será usada em conjunto com as bases de equações de movimento, constituindo a equação de restrição.

Um caso simples de se analisar é a dinâmica de dois corpos rígidos articulados em um ponto com os seis graus de liberdade (vide Figura 7), onde pode-se observar que aparecem duas forças internas ou forças de restrições no ponto de junta com sentidos opostos e com mesmo módulo para cada corpo. As equações para este exemplo são:

$$m_1.\ddot{\boldsymbol{X}}_1 = \sum_{s \in S_1} \boldsymbol{f}_s^e + \boldsymbol{f}_1 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{I}_1.\dot{\boldsymbol{w}}_1 + \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{L}_1 = \sum_{s \in S_1} \boldsymbol{t}_s^e + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{f}_1 \tag{6}$$

$$m_2.\ddot{\boldsymbol{X}}_2 = \sum_{s \in S_2} \boldsymbol{f}_s^e + \boldsymbol{f}_1 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{I}_2.\dot{\boldsymbol{w}}_2 + \boldsymbol{w}_2 \times \boldsymbol{L}_2 = \sum_{s \in S_2} \boldsymbol{t}_s^e + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f}_1 \tag{8}$$

A condição de restrição no ponto de junta é (mesma equação (1)):

$$\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{r}_2. \tag{9}$$

Derivando duas vezes esta condição, obtém-se a equação de restrição:

$$\ddot{\boldsymbol{X}}_1 + \dot{\boldsymbol{w}}_1 \times \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{w}_1 \times (\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{r}_1) = \ddot{\boldsymbol{X}}_2 + \dot{\boldsymbol{w}}_2 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{w}_2 \times (\boldsymbol{w}_2 \times \boldsymbol{r}_2). \tag{10}$$

Das equações (5 a 10), obtem-se as seguintes incógnitas: força de restrição $\boldsymbol{f}_1$, acelerações angulares $\dot{\boldsymbol{w}}_1$ e $\dot{\boldsymbol{w}}_2$, e acelerações lineares $\ddot{\boldsymbol{X}}_1$ e $\ddot{\boldsymbol{X}}_2$ de seus centros de massa, formando 15 incógnitas. Os termos $\sum_{s \in S_1} \boldsymbol{f}_s^e$ e $\sum_{s \in S_2} \boldsymbol{f}_s^e$ são os somatórios das forças externas aplicadas a cada corpo, respectivamente. A força exercida pela gravidade é também considerada como força externa. O sistema de equações que modela a dinâmica da estrutura articulada simples (Figura 7) é composto pelas equações (5, 6, 7, 8 e 10), num total de 15 equações.

Em geral, uma estrutura de n corpos com j juntas tipo bola caixa (3 GDL) apresenta um sistema de $2n + j$ equações tridimensionais. Por exemplo, a estrutura da Figura 8 possui 5 corpos e 4 juntas, sendo 14 equações tridimensionais e 42 equações lineares. Nestas circunstâncias, a resolução desse sistema de equações lineares deve considerar as incógnitas formadas por acelerações (lineares e angulares) e forças de restrições, de uma maneira que computacionalmente seja barata. Assim, o uso de métodos de matrizes esparsas poderia ser um dos indicados para este problema. O mesmo problema pode ser também resolvido por meio da formulação do sistema de equações, para serem resolvidos recursivamente, tal como se verá posteriormente. Resolvida estas equações, sucessivamente se formularão as equações diferenciais ordinárias para se poder integrar e obter as posições e orientações de cada corpo.

4.3 Controle de Baixo Nível

Existem duas abordagens de controle de baixo nível em uma simulação baseada em leis físicas [WIT88]:

- Controle matricial: dados os estados dos corpos do sistema em um instante t_i, deve-se calcular os estados para t_{i+1}. Neste tipo de controle estariam as restrições espaço temporais formuladas por Witkin e Kass [WIT88] e abordadas por outros pesquisadores, como Cohen [COH92]. Este enfoque resolve o problema de movimento dos corpos, onde as restrições necessárias são formuladas como parte da matriz.

- Controle pré-processamento: acontecem duas etapas sequênciais no cálculo do movimento. Numa primeira etapa, calculam-se as forças e torques que geram o movimento satisfazendo as restrições desejadas, e, em seguida, calculam-se os movimentos dos corpos, determinando-se as respectivas posições e orientações. Neste caso, a análise dinâmica não muda nas formulações matricial e recursiva. Este método é mais utilizado nos sistemas de animações e também será abordado nas seções posteriores deste trabalho.

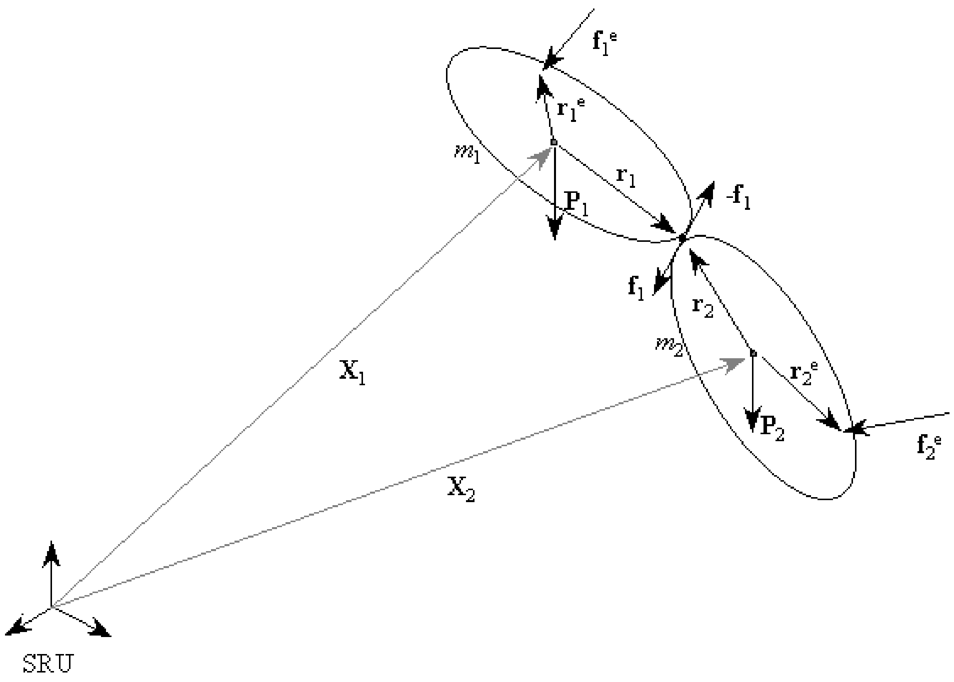


Figura 7: Um objeto de dois corpos rígidos ligados por um vínculo e os elementos da dinâmica.

5 Formulação Recursiva da Dinâmica

A formulação recursiva da dinâmica é uma forma simples de se expressar e resolver as equações de movimento de corpos. Consiste na expressão das equações dinâmicas de cada corpo, dependendo das forças de restrições influenciadas pelos corpos sucessores (filhos), desconsiderando-se a influência de forças de restrições sobre o seu ancestor (pai). A idéia deste método é calcular parte das forças de restrições desde os nós finais do grafo até o nó origem (em forma de *bottom-up*, termo comum em operações de grafos tipo árvore) e, necessariamente, calcular as acelerações na forma inversa, isto é, atualizando os cálculos do nó origem para os nós finais (em estrutura árvore seria em forma de *top-down*).

Se a forma recursiva é bastante rápida, a forma matricial é mais abrangente. Mas, essa última apresenta como vantagem o fato de que as forças de restrições e

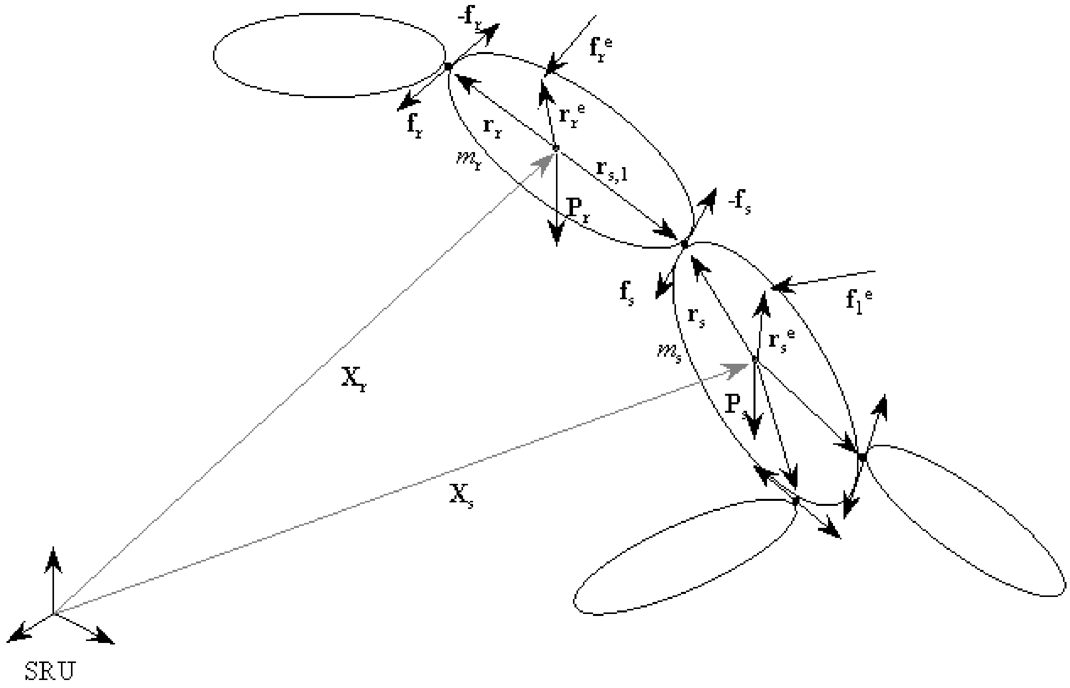


Figura 8: Modelagem dinâmica de uma estrutura articulada simples.

as acelerações podem ser calculadas em um mesmo processo, o que pode criar uma matriz muito grande e esparsa, computacionalmente cara de se resolver, que para fins de animação em tempo real não é apropriada. é possível que métodos eficientes de resolução de matrizes esparsas tornem a forma matricial de se resolver o problema comparável com a formulação recursiva, em relação ao tempo.

A formulação recursiva é baseada no método de Euler, expressando-se o movimento dos corpos em termos de um corpo simples, através das equações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= m.\boldsymbol{a} - m.[\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r})] \\ \boldsymbol{t} &= \boldsymbol{I}.\dot{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{r} \times (m.\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{L} \end{aligned} \tag{11}$$

onde $\boldsymbol{f}$ é a força efetiva aplicada ao corpo, $\boldsymbol{t}$ é o torque efetivo atuando sobre o corpo (o torque efetivo poderá incluir os torques causados pelas forças), m é a massa do corpo, $\boldsymbol{I}$ é uma matriz de tensor de inércia do corpo, $\boldsymbol{r}$ é o vetor do centro de massa do corpo ao ponto de análise da aceleração. Na presente seção, a aceleração linear do corpo vai ser indicada por $\boldsymbol{a}$ ao invés da derivada de sua velocidade.

5.1 Equações Recursivas do Movimento

No caso de corpos articulados, a interação entre os corpos deve ser considerada, formulando-se a restrição do ponto de articulação em nível de aceleração.

Para a formulação recursiva das equações de Newton-Euler, apresentada nas equações (5 a 10) deve ser considerado, de forma geral, um par de corpos por vez, ancestor (pai) q e sucessor (filho) s (vide Figura 8), que determina um ponto de junta no $\boldsymbol{p}_q = \boldsymbol{X}_q - \boldsymbol{r}_q$ ($\boldsymbol{r}_q$ vetor apontando ao centro de massa do corpo q desde o ponto de junta). A aceleração deste ponto é descrita pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{a}_q = \ddot{\boldsymbol{X}}_q - \dot{\boldsymbol{w}}_q \times \boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{r}_q) \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{X}}_q = \boldsymbol{a}_q + \dot{\boldsymbol{w}}_q \times \boldsymbol{r}_q + \boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{r}_q).$$

Assim, a equação (5) pode ser generalizada e expressa em função da aceleração do ponto de junta, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m_q.\boldsymbol{a}_q &= m_q.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}_q^e - m_q[\dot{\boldsymbol{w}}_q \times \boldsymbol{r}_q + \boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{r}_q)] - \boldsymbol{f}_q + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{f}_s \\ \Rightarrow \boldsymbol{f}_q &= m_q.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}_q^e - m_q[\dot{\boldsymbol{w}}_q \times \boldsymbol{r}_q + \boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{r}_q)] - m_q.\boldsymbol{a}_q + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{f}_s, \end{aligned} \tag{12}$$

onde S_q é o conjunto das juntas relacionando os corpos sucessores (filhos) de q, $\boldsymbol{f}_q$ é a força de restrição atribuída por q ao seu ancestor (pai), $\boldsymbol{f}_s^e$ é a força externa (ou soma das forças externas) aplicadas sobre q, $\boldsymbol{f}_s$ é a força de restrição atribuída a q pelo seu sucessor s, e, $\boldsymbol{r}_q$ é o vetor desde o ponto de junta, com seu ancestor p, ao centro de massa de q.

Esta característica de dependência de ancestor e sucessores, para dar a forma de recursão, também é atribuída à equação (6) e, considerando-se a translação da inércia de centro de massa ao ponto de junta, com a simples aplicação do teorema de eixos paralelos [SHA66] pode-se generalizar a equação (11), ou seja:

$$\boldsymbol{I}_q.\dot{\boldsymbol{w}}_q = -\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{L}_q + \boldsymbol{t}_q^e + \boldsymbol{r}_q^e \times \boldsymbol{f}_q^e + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s \times \boldsymbol{f}_s - \boldsymbol{r}_q \times m_q \boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{r}_q \times m_q \boldsymbol{g}, \tag{13}$$

onde $\boldsymbol{t}_q^e$ é o torque puro externo (se houver) aplicado sobre q, $\boldsymbol{l}_s$ é o vetor desde o ponto q, onde o $\boldsymbol{I}_q$ é calculado, ao ponto de junta com o corpo sucessor s. Esta mudança é feita por conveniência para se evitar o cálculo de torque exercido pela força de restrição com o pai, eliminando-se uma incógnita vetorial. A velocidade e a aceleração angular do corpo q não variam em relação ao ponto onde se deseja determinar a inércia, porque tais parâmetros angulares são do corpo e não do ponto [SHA66], o mesmo não ocorrendo com a velocidade e a aceleração linear.

A restrição expressa pela equação (10) pode ser formulada como uma dependência hierárquica como

$$\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{a}_q + \dot{\boldsymbol{w}}_q \times \boldsymbol{l}_s + \boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{l}_s), \quad \text{com } \boldsymbol{l}_s = \boldsymbol{r}_s + \boldsymbol{r}_q, \tag{14}$$

sendo $\boldsymbol{r}_s$ o vetor de centro de *frame* do corpo q para a junta com s.

As três equações vetoriais (12, 13 e 14) formam o sistema de equações recursivas que deve ser resolvido em relação aos corpos q e s.

5.2 Solução das Formulações Recursivas

A solução das equações acima formuladas consiste em encontrar as acelerações linear e angular ($\boldsymbol{a}_q$, $\dot{\boldsymbol{w}}_q$) para cada corpo q. Estes valores são calculados de forma recursiva percorrendo-se o grafo hierárquico tipo árvore, desde os nós finais até chegar ao nó origem (*bottom-up*), obtendo-se uma parte das forças de restrições. Na volta do nó origem para os nós finais (*top-down*), recalculam-se as acelerações procuradas (vide Figura 9).

Para os cálculos das forças de restrições, são utilizadas as seguintes expressões que relacionam as acelerações com a força de restrição para cada corpo da hierarquia do grafo:

$$\dot{\boldsymbol{w}}_q = \boldsymbol{K}_q.\boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{d}_q, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{f}_q = \boldsymbol{M}_q.\boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{f}'_q \tag{16}$$

onde os coeficientes destas equações $\boldsymbol{K}_q, \boldsymbol{M}_q, \boldsymbol{d}_q$ e $\boldsymbol{f}'_q$ são calculados recursivamente no processo *bottom-up*. As expressões destes coeficientes são deduzidas a partir das equações de formulação dinâmica recursiva (equações 12, 13 e 14). Sendo assim, para se obter os coeficientes da equação (15) é substituída na equação (13) a expressão (16), considerando-se s em lugar de q:

$$\boldsymbol{I}_q.\dot{w}_q = -\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{L}_q + \boldsymbol{t}^e_q + \boldsymbol{r}^e_q \times \boldsymbol{f}^e_q + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s \times [\boldsymbol{M}_s.\boldsymbol{a}_s + \boldsymbol{f}'_s] - \boldsymbol{r}_q \times m_q \boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{r}_q \times m_q \boldsymbol{g}.$$

Na equação resultante, a variável $\boldsymbol{a}_s$ é substituída por (14) e considerando-se o agrupamento de termos por simples comodidade:

$$\boldsymbol{g}^q_{\sum} = -\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{L}_q + \boldsymbol{t}^e_q + \boldsymbol{r}^e_q \times \boldsymbol{f}^e_q + \boldsymbol{r}_q \times m_q.\boldsymbol{g}, \quad \text{e}$$

$$\boldsymbol{a}^c_s = \boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{l}_s), \quad \text{com } \boldsymbol{l}_s = \boldsymbol{r}_s + \boldsymbol{r}_q,$$

obtém-se:

$$\boldsymbol{I}_q.\dot{\boldsymbol{w}}_q + \left(\sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s^*.\boldsymbol{M}_s.\boldsymbol{l}_s^{*T} \right).\dot{\boldsymbol{w}}_q = \boldsymbol{g}_{\sum}^{e} - \boldsymbol{r}_q \times m_q \boldsymbol{a}_q + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s \times [\boldsymbol{M}_s.(\boldsymbol{a}_s + \boldsymbol{a}_s^c) + \boldsymbol{f}'_s],$$

$$\dot{\boldsymbol{w}}_q = \left(\boldsymbol{I}_q + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s^*.\boldsymbol{M}_s.\boldsymbol{l}_s^{*T} \right)^{-1} . \left\{ \boldsymbol{g}_{\sum}^{q} - \boldsymbol{r}_q \times m_q \boldsymbol{a}_q + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s \times [\boldsymbol{M}_s.(\boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{a}_s^c) + \boldsymbol{f}'_s] \right\}.$$

Finalmente, os coeficientes $\boldsymbol{K}_q$ e $\boldsymbol{d}_q$ são :

$$\boldsymbol{K}_q = \boldsymbol{T}^{-1}. \left(\sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s^*.\boldsymbol{M}_s - m_q.\boldsymbol{l}_q^* \right) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{d}_q = \boldsymbol{T}^{-1}. \left\{ \boldsymbol{g}_{\sum}^{q} + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s \times \left[\boldsymbol{M}_s.(\boldsymbol{a}_s^c)^T + \boldsymbol{f}'_s \right] \right\}, \tag{18}$$

$$\text{para} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}_q + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{l}_s^*.\boldsymbol{M}_s.\boldsymbol{l}_s^{*T}.$$

Para se deduzir as expressões dos coeficientes do vetor $\boldsymbol{f}_q$, substitui-se $\boldsymbol{f}_s$ da expressão (16) na expressão (12) (considerando-se a mudança de q para s) e, na expressão resultante, a variável $\boldsymbol{a}_s$ pela expressão (14):

$$\boldsymbol{f}_q = \boldsymbol{f}_{\sum}^{q} - m_q.\boldsymbol{a}_q + m_q.\boldsymbol{r}_q \times \dot{\boldsymbol{w}}_q + \sum_{s \in S_q} [\boldsymbol{M}_s.(\boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{a}_s^c + \dot{\boldsymbol{w}}_q \times \boldsymbol{h}_s) + \boldsymbol{f}'_s],$$

$$\text{onde } \boldsymbol{f}_{\sum}^{q} = -m_q.\boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{r}_q) + \boldsymbol{f}_q^e + m_q.\boldsymbol{g}.$$

Se $\dot{\boldsymbol{w}}_q$ é substituído pela equação (15), obtém-se:

$$\boldsymbol{f}_q = \boldsymbol{f}_{\sum}^{q} - m_q.\boldsymbol{a}_q + m_q.\boldsymbol{r}_q \times (\boldsymbol{K}_q.\boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{d}_q) + \sum_{s \in S_q} \{\boldsymbol{M}_s.[\boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{a}_s^c + (\boldsymbol{K}_q.\boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{d}_q) \times \boldsymbol{l}_s] + \boldsymbol{f}'_s\}.$$

Finalmente, obtém-se as seguintes expressões que representam os coeficientes $\boldsymbol{M}_q$ e $\boldsymbol{f}'_q$:

$$\boldsymbol{M}_q = -m_q.\boldsymbol{1} + m_q.\boldsymbol{r}_q^*.\boldsymbol{K}_q + \sum_{s \in S_q} \boldsymbol{M}_s.(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{l}_s^*.\boldsymbol{K}_q), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{f}'_q = \boldsymbol{f}_{\sum}^{q} + m_q.\boldsymbol{r}_q \times \boldsymbol{d}_q + \sum_{s \in S_q} \left[\boldsymbol{M}_s.(\boldsymbol{a}_s^c + \boldsymbol{d}_q \times \boldsymbol{l}_s)^T + \boldsymbol{f}'_s \right]. \tag{20}$$

Observa-se que as expressões para cálculos dos coeficientes $\boldsymbol{K}_q, \boldsymbol{d}_q, \boldsymbol{M}_q$ e $\boldsymbol{f}'_q$ incluem vetores e matrizes de ordem 3×3. Desta forma, a inversão de tais matrizes é um processo imediato evitando-se a manipulação de matrizes de ordem elevadas.

Se, para cada corpo, calculam-se os valores das acelerações $\boldsymbol{a}_q$ e $\dot{\boldsymbol{w}}_q$, a formulação das equações diferenciais ordinárias para uma futura integração é imediata:

$$\boldsymbol{F} = m_q.\ddot{\boldsymbol{X}}_q,$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{I}_q.\dot{\boldsymbol{w}}_q + \boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{I}_q.\boldsymbol{w}_q)$$

$$\text{com } \ddot{\boldsymbol{X}}_q = \boldsymbol{a}_q - \boldsymbol{r}_q \times \dot{\boldsymbol{w}}_q - \boldsymbol{w}_q \times (\boldsymbol{w}_q \times \boldsymbol{r}_q),$$

onde $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{t}$ são força e torque resultantes, atuando no corpo q em um dado instante.

Os vetores $\boldsymbol{a}_q$ e $\dot{\boldsymbol{w}}_q$ são calculados recursivamente, a partir das equações (15, 16 e 14), da seguinte forma: os coeficientes das equações (15 e 16) são determinados em um processo *bottom-up* (de nós finais para o nó de origem do grafo), sendo as incógnitas as duas acelerações e a força de restrição $\boldsymbol{f}_q$ para cada corpo q (vide Figura 9(a)). Atingida a raiz (neste caso, corpo 1), é obtida a aceleração $\boldsymbol{a}_1$ porque $\boldsymbol{f}_1$ é zero (não tem nó ancestor):

$$\boldsymbol{a}_1 = -(\boldsymbol{M}_1)^{-1}.\boldsymbol{f}'_1.$$

Também é calculado o valor da aceleração angular:

$$\dot{\boldsymbol{w}}_1 = \boldsymbol{K}_1.\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{d}_1.$$

Seguindo o processo de recursão , os cálculos são feitos na direção da raiz para os nós finais (*top-down*), sendo, para este caso, o nó pai p do nó q. Utiliza-se a equação (5) para a aceleração linear de q e a equação (15) para a aceleração angular $\dot{\boldsymbol{w}}_q = \alpha_q$ (vide Figura 9(b)).

$$\boldsymbol{a}_q = \boldsymbol{a}_p + \dot{\boldsymbol{w}}_p \times \boldsymbol{l}_q + \boldsymbol{w}_p \times (\boldsymbol{w}_p \times \boldsymbol{l}_q),$$

$$\dot{\boldsymbol{w}}_q = \boldsymbol{K}_q.\boldsymbol{a}_q + \boldsymbol{d}_q.$$

Como p é o pai de q, considerou-se que os valores das acelerações linear e angular de p já foram calculados no nível anterior (segundo a sequência de processos *top-down*).

A força de restrição que o corpo q atribui ao seu pai p pode ser computada usando-se a equação (8), no processo de *top-down*. No entanto, isto não é necessário uma vez que não serão manipulados diretamente estes tipos de forças com outros objetivos.

6 Formulação das Equações Diferenciais Ordinárias (ODE)

Um elemento fundamental na geração de movimento dos corpos é o cálculo das acelerações com as quais o corpo está se movimentando em um determinado instante de

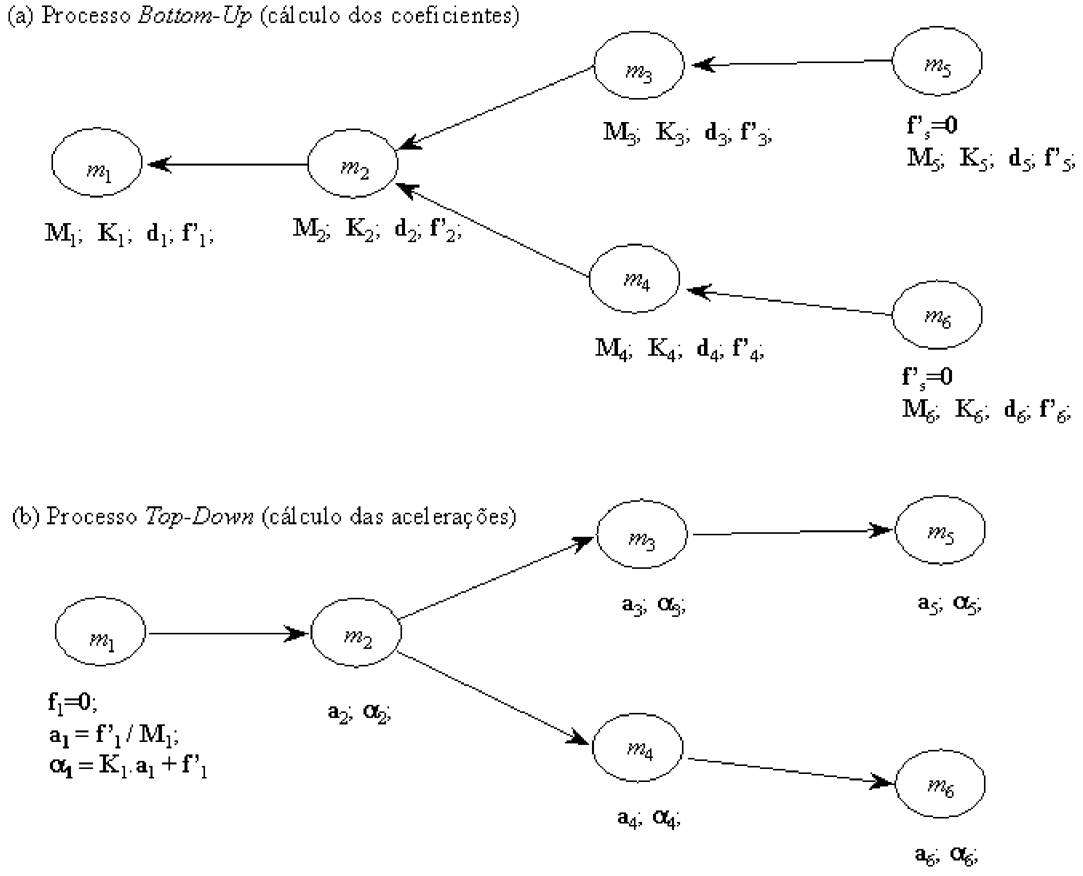


Figura 9: Cálculos recursivos em um grafo hierárquico (aceleração angular de q é α_q).

tempo da animação. Na seção anterior, esses elementos foram calculados tendo-se os parâmetros necessários para a determinação do estado dos corpos no instante imediatamente posterior. Isto é, dado o estado dos corpos em um estado t_0 e determinando-se as acelerações respectivas nesse instante de tempo, o que se pretende é calcular o estado dos corpos no instante $t_1 = t_0 + dt$, onde dt é o intervalo do passo de tempo.

6.1 Determinação dos Estados do Corpo

Seja um sistema de n corpos, onde cada corpo vai ser representado por um estado de quatro elementos cinemáticos representados por $\boldsymbol{Y}(t) = (\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{R}(t), \boldsymbol{P}(t), \boldsymbol{L}(t))$, onde $\boldsymbol{P}(t)$ e $\boldsymbol{L}(t)$ são momento linear e angular do corpo, respectivamente. O momento linear está associado à aceleração linear (especificamente com a força , ver referência

[RIV96]) e o momento angular está associado à aceleração angular do corpo:

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) = m.\ddot{\boldsymbol{X}}(t) \quad \Longrightarrow \boldsymbol{p}(t) = m.\boldsymbol{v}(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}(t) = \boldsymbol{t}(t) \quad \Longrightarrow \boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{I}.\dot{\boldsymbol{w}}(t) + \boldsymbol{w}(t) \times (\boldsymbol{I}.\boldsymbol{w}(t)).$$

A derivada da função Y(t) é expressada por:

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(t) = (\dot{\boldsymbol{X}}(t), \dot{\boldsymbol{R}}(t), \dot{\boldsymbol{P}}(t), \dot{\boldsymbol{L}}(t)).$$

Finalmente, a equação diferencial ordinária, aplicada para cada corpo e utilizada para determinação dos estados seguintes, é formulada pela seguinte regra de inferência:

> "Dados os valores do estado $\boldsymbol{Y}(t_0)$ e de sua derivada em t_0, então o valor de estado $\boldsymbol{Y}(t_1)$, em $t_1 = t_0 + dt$, será calculado". Isto é, dados
>
> $$\boldsymbol{Y}(t_0) = (\boldsymbol{X}(t_0), \boldsymbol{R}(t_0), \boldsymbol{P}(t_0), \boldsymbol{L}(t_0)) \quad \text{e}$$
>
> $$\dot{\boldsymbol{Y}}(t) = (\dot{\boldsymbol{X}}(t), \dot{\boldsymbol{R}}(t), \dot{\boldsymbol{P}}(t), \dot{\boldsymbol{L}}(t))$$
>
> determina-se para $t_1 = t_0 + dt$
>
> $$\boldsymbol{Y}(t_1) = (\boldsymbol{X}(t_1), \boldsymbol{R}(t_1), \boldsymbol{P}(t_1), \boldsymbol{L}(t_1)). \tag{21}$$

6.2 Método de Integração Numérica

As equações formuladas pelas expressões (21) devem ser integradas para se obter o estado em t_1 de cada corpo. Tais expressões pertencem à família de equações numéricas de valor inicial. Isto é, dados os valores iniciais em t_0 calcula-se o estado em $t_0 + dt$ (estado final). Neste sentido, o método mais simples é o método de Euler:

$$\boldsymbol{Y}(t_0 + dt) = \boldsymbol{Y}(t_0) + dt.\dot{\boldsymbol{Y}}(t_0). \tag{22}$$

Neste caso, supe-se que os valores da variação do estado $(\dot{\boldsymbol{Y}}(t_0))$, velocidades e as acelerações linear e angular do corpo, permanecem constantes durante todo o período dt da simulação. Esta suposição nem sempre é correta, quando o período é maior ou quando a aceleração varia rapidamente (a análise deste casos, pode ser encontrada em [WIT94]).

Outro método numérico, mais rigoroso que o anterior, é o método de integração de Runge-Kutta. Este método se apresenta mais estável que o primeiro embora quando existem problemas de *stiff*, isto é, quando os diferentes corpos da animação têm dinâmicas diferentes (uns variam mais rapidamente que outros), também pode gerar pequenos erros.

Os métodos híbridos são os mais recomendados para resolver os problemas de *stiff*. Pode-se, também, utilizar métodos do tipo predictor e corrector e até mesmo o método cíclico [COS96].

Outro aspecto importante sobre os métodos de integração é a possibilidade de se variar o passo de tempo (métodos de tempo adaptativo) quando se deseja um período de tempo muito pequeno e uma elevada precisão numérica, por exemplo, durante o intervalo de colisão entre os corpos. O sistema poderia detectar o problema de stiff e automaticamente diminuiria o período de tempo para aplicar o método de integração escolhido. Uma maneira de se adaptar o período ocorre quando duas integrações se diferenciam por mais de 10% em cada passo de tempo e o período é reduzido à metade e se re-processa a integração. Se, ao contrário, duas integrações apresentam valores menores que 4%, o período é multiplicado pela raiz quadrada de 2 para o próximo período [COS96].

Os resultados obtidos nesta simulação, utilizando-se o método de Euler e um passo de tempo suficientemente pequeno, estão apresentados no apêndice A.

7 Conclusões

Muitos artigos fazem referências à complexidade do processo de modelagem da dinâmica de corpos articulados. Na realidade, esta complexidade não tem origem na formulação do problema e, sim, no processo de solução das equações associadas. é relativamente difícil a manipulação de forma simples e eficiente quando se opera grandes matrizes, as quais nem sempre são positivas definidas. A formulação recursiva para métodos de Euler-Newton permite uma solução em forma linear sem envolver grandes matrizes. A robótica oferece uma formalização para a dinâmica de objetos articulados, mas raramente é aplicada diretamente para o propósito da animação em computação gráfica devido a complexidade de suas formulações e a sua filosofia de trabalho.

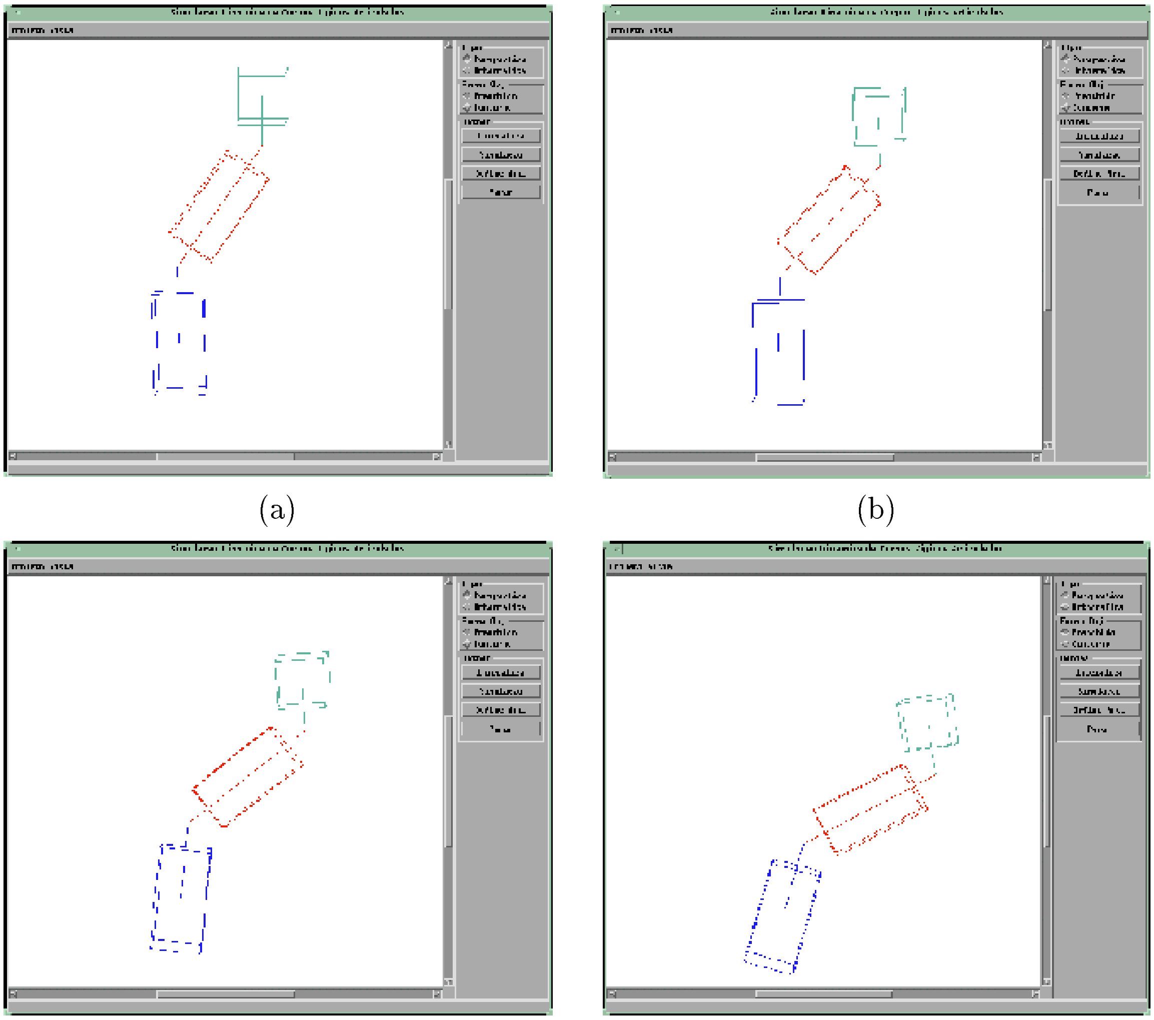
As restrições permitem que os corpos não se separem nos pontos definidos como articulação. Tais restrições poderiam ser usadas para se gerar uma série de movimentos satisfazendo-se os desejos do usuário. Pode-se adicionar forças e torques de controle para propósitos de animações inteligentes, uma vez que o modelo formulado é extensível para animações de corpos articulados em forma geral.

As novas técnicas de controle de movimento, tal como a restrição espaço temporal, vêm sendo bastante estudadas para controle de movimento de corpos articulados. Neste sentido, pretende-se, como trabalho futuro, estender esse modelo para consideração de restrições espaço temporais.

Agradecimentos

O primeiro autor gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento de esta pesquisa. A implementação computacional deste trabalho foi realizada no TeCGraf/PUC-Rio.

Apêndice A



(a) (b) (c) (d)

Figura 10: Queda livre de uma estrutura articulada composta por três primitivas, corpo superior com maior massa: (a) estado incial; (b) 6 quadros depois; (c) 12 quadros depois; (d) 18 quadros depois.

Referências

[AMI92] AMIROUCHE, F. M. L. Computational Methods in Multibody Dynamics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 478, 1992.

[ARM85] ARMSTRONG, W. W. The Dynamics of Articulated Rigid Bodies for Purposes of Animation, The Visual Computer Journal, 1: p. 231-240, 1985.

[ARM87] ARMSTRONG, W. W.; GREEN, M.; LAKE, R. Near-Real-Time control of human figure models. IEEE Computer Graphics and Aplication, jun, 1987, p. 52-61.

[BRZ88] BARZEL, R.; BARR, A. H. A modeling system based on dynamic constraints. ACM Computer Graphics, august, 1988, vol. 22, n. 4, p. 179-188.

[BRZ92] BARZEL, R. Physically - Based Modeling for Computer Graphics: A Structured Approach, California, Academic Press, Inc., pp. 334, 1992.

[CHR94] CHRISTOPHER, W. A. Interactive Multiple Representation Editing of Physically-based Animation, PhD. thesis in Computer Science, University of California, Berkeley, may 1994, Technical Report UCB/CSD94-813.

[COH92] COHEN, M. F. Iteractive Spacetime Control for Animation. SIGGRAPH'92, jul 1992.

[COS96] COSTA, T. Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias. Notas de aula, periodo 96-II, Departamento de Informática de PUC-Rio, 1996.

[CRA55] CRAIG, J. J. Introduction to Robotics: mechanics and control, Addison Wesley, pp. 300, 1955.

[CRE89] CREMER, J. F. An Architecture for General Purpose Physical System Simulation-Integrating Geometry, Dynamics and Control, PhD. thesis in Computer Science, Cornell University, USA, may 1989.

[ISA87] ISAACS, P. M.; COHEN, M. F. Controlling Dynamics Simulation with Kinematic Constraints, Behaveour Functions and Inversa Dynamics. ACM Computer Graphics, New York, v. 21, n.4, p. 215-224, Jul 1987.

[MUS94] MUSSE, S. R. Modelagem do Movimento Rígido de Sistemas Articulados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1994.

[PLE89] PLETINCKX, D. Quaternion calculus as a basic tool in computer graphics, The Visual Computer, v. 5, n. 1 and 2, pp. 2-13, mar 1989.

[RIV96] RIVERA, L. A. Simulação dinâmica de corpos rígidos com restrições de não interpenetração. Dissertação de mestrado, Departamento de Informática de PUC-Rio, fevereiro, 1996, pp. 150.

[SHA66] SHAMOS, I. H. Engineering Mechanics: Dynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, Second Ed., vol II, pp. 732, 1966.

[VAN91] VAN OVERVELD, C. W. A. M. An iterative approach to dynamic simulation of 3-D rigid-body motions for real-time interactive computer animation. The Visual Computer, Springer-Verlag, 1991, 7, p. 29-38.

[WIL88] WILHELMS, J.; MOORE, M.; SKINNER, R. Dynamic animation: interaction and control. The Visual Computer, Springer-Verlang, 1988, 4, p. 238-295.

[WIL91] WILHELMS, J. Dynamic Experience. In: Badler, N. I. et, al. (eds) Making them move: mechanics, control, and animation of articulated figures, Morgan Kaufmann publichers, Inc., p. 265-280, 1991.

[WIT88] WITKIN, A.; KASS, M. Spacetime Constraints, ACM Computer Graphics, v. 22, n.4, p. 159-168, aug 1988.

[WIT94] WITKIN, A. Particles System Simulation, SIGGRAPH'94, note of course, cd-ROM version, A-C, 1994.