Apêndice A – Demonstração dos Teoremas

A.1. Adjunção entre Gram$^{\Sigma}$ e Cat$^{\Sigma}_{\square}$

Definição 3.24. $\mathbf{U}_{\square}$: $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square} \rightarrow \mathbf{Gram}^{\Sigma}$ é um funtor definido como:

- A componente-objeto de $U_{\square}$ leva uma floresta $(F, \Sigma, \phi_F, (C,\square,\mathbf{1}))$ a uma gramática (G, Σ, ϕ_G) tal que:
  - $G(T) = F(T)$.
  - $G(*) = F(*)$.
  - $F(S) = G(S)$.
  - Para cada aresta $a \in F(M)$, $a{:}X_1\square X_2\square\ldots\square X_n \rightarrow Y$, tal que $X_i, Y \in G(*)$, existe $a' \in G(n)$ tal que $c(a')=Y$ e $d_i(a')=X_i$. O caso em que $a{:}\ \mathbf{1}\rightarrow Y$ é um caso particular da construção anterior onde $n = 0$.
  - $\phi_G(a')=\phi_F(a)$, para $a' \in G(0)$. Observe que ambas as funções tem o mesmo codomínio, Σ^*.
- A componente-morfismo de $U_{\square}$ leva um morfismo $\eta_{\square}$ de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ em um morfismo η_G em $\mathbf{Gram}^{\Sigma}$ tal que:
  - $\eta_{G_T} = \eta_{\square_T}$.
  - $\eta_{G*} = \eta_{\square *}$.

$\eta_{G_i}(a')=b' \Leftrightarrow \eta_{\square M}(a)=b$, para a' e b' correspondentes à definição da componente-objeto.

Teorema 3.26. $U_{\square}$ possui um adjunto à esquerda $L_{\square}{:}\mathbf{Gram}^{\Sigma}\rightarrow\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ tal que:

- A componente-objeto de $L_{\square}$ leva uma gramática (G,Σ,ϕ_G) a uma floresta $(F,\Sigma,\phi_F,\mathbf{C})$:
  - $F(T) = G(T)$, enquanto, $F(S) = G(S) \circ i$, onde i é a inclusão $i{:}G(*) \hookrightarrow F(*)$.

- $F(*) = \{ x \mid x$ é produto finito de elementos de $G(*) \}$, portanto $F(*) \supseteq G(*)$.
- Para cada aresta n-ária $a' \in G(n)$ tal que $c(a')=Y$ e $d_i(a')=X_i$, existe uma aresta $a:X_1 \square X_2 \square \ldots \square X_n \rightarrow Y$ em $L_\square(G)$.
- As arestas de $L_\square(G)$ são as correspondentes ao item acima e as obtidas através de composição ou produto destas.
- $\phi_F(a) = \phi_G(a')$, para $a:\mathbf{1}\rightarrow Y$.

* A componente-morfismo de $L_\square$ leva um morfismo η_G de **Gram**$^\Sigma$ em um morfismo $\eta_\square$ em **Cat**$_\square^\Sigma$ tal que:
    - $\eta_{\square T}=\eta_{G_T}$, enquanto, $\eta_{\square *}$ estende η_{G*} para $F(*)$ preservando produtos.
    - $\eta_{\square M}(a)=b \Leftrightarrow \eta_{G_i}(a')=b'$, para a' e b' correspondentes à definição da componente-objeto.

Demonstração.

1) Para demonstramos o teorema primeiro temos que apresentar a unidade da adjunção. Seja $\eta_\square:1 \xrightarrow{\bullet} U_\square L_\square$ a transformação natural definida no ponto $\mathbf{G_1} \in$ Obj(**Gram**$^\Sigma$) como o morfismo $\eta_{\square \mathbf{G_1}} = \eta_\eta$ em **Gram**$^\Sigma$ tal que:

* $\eta_\eta(T)$ é a identidade.
* $\eta_\eta(*)$ é a inclusão.
* $\eta_\eta(i)$ é a inclusão.

2) $\forall \phi:\mathbf{G_1}\rightarrow U_\square \mathbf{F_2}$, construímos $\alpha:L_\square \mathbf{G_1}\rightarrow \mathbf{F_2}$ da seguinte forma:

* $\alpha(T) = \phi(T)$
* $\alpha(*)$ é tal que:
    - $\alpha(*)(x) = \phi(*)(x)$ se $x \in G_1(*)$, $\alpha(*)$ preserva produtos.

- α(M) é tal que:
  - Para cada aresta $a{:}X_1\square\ X_2\square\ldots\square\ X_n \rightarrow Y$, corresponde a a' em G_1, α(M)(a) = b sse ϕ(n)(a') = b'.
  - α(M) preserva produtos e composição. Ou seja, α é um morfismo de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$.

3) O diagrama abaixo comuta por construção de α.

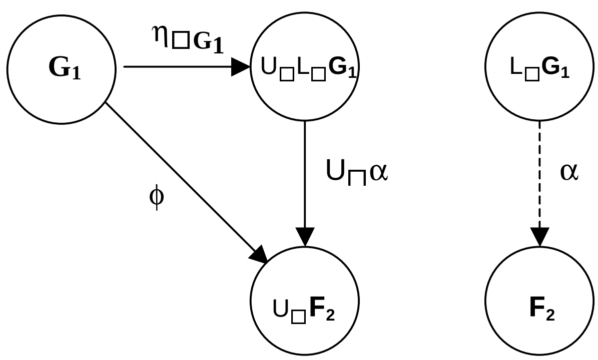

Figura A.1 Diagrama da adjunção ($\eta_\square$,$L_\square$,$U_\square$).

4) Provaremos que α é único por casos. Suponha que exista um morfismo β de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$, $\beta \neq \alpha$, tal que o diagrama acima comute. Então β não satisfaz a uma das condições da definição de α:

4a) β(T) $\neq$ ϕ(T).

Neste caso, η_η(T)$\circ U_\square\beta$(T) $\neq$ ϕ(T), o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4b) Para algum A $\in$ G_1(*), β(M)(A) $\neq$ ϕ(A)

Neste caso, η_η(*)$\circ U_\square\beta$(*) $\neq$ ϕ(*), o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4c) Para algum $a{:}X_1\square\ X_2\square\ldots\square\ X_n \rightarrow Y$, tal que existe a' em G_1(i), β(a) $\neq$ b, $\phi(r_i)$ = b'.

Neste caso, η_η(i)$\circ U_\square\beta$(i) $\neq$ ϕ(i), o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4d) β não preserva produtos ou composição.

Este caso contradiz a hipótese de β ser um morfismo de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$.

Contradição, logo não existe $\beta \neq \alpha$, tal que o diagrama acima comute.

CQD

A.2. Equivalência entre o conceito usual e o categórico de LLC.

Teorema 3.30. Para cada gramática livre de contexto G, podemos construir uma gramática livre de contexto categórica **G'**, tal que L(G) = L(**G'**). Reciprocamente, para cada gramática livre de contexto categórica **G'** podemos construir uma gramática livre de contexto G tal que L(**G'**) = L(G).

a) Para cada gramática livre de contexto G, podemos construir uma gramática livre de contexto categórica **G'**, tq L(G) = L(**G'**).

a.1) Seja G = (N, Σ, P, S). Para cada $a \in \Sigma$ criamos um novo não-terminal N_a em N e construímos um novo conjunto de regras P_1 da seguinte forma:

- Para cada regra $r = A \to \alpha$ em P, se o comprimento de α é maior que 1, substituo cada ocorrência de um $a \in \Sigma$ em α por N_a.
- Para cada $a \in \Sigma$ acrescento uma regra $N_a \to a$.

Obtemos assim $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$, onde $N_1 = N \cup \{N_a \mid a \in \Sigma\}$. É trivial ver que $L(G) = L(G_1)$.

a.2) Construímos a gramática livre de contexto categórica **G'** = (G', Σ, ϕ) de tal forma que:

- $G'(S)(G'(\top)) = S$
- $G'(*) = N_1$.
- Para cada $A \to a \in P_1$, existe um morfismo 0-ário m em G(0) de codomínio A. Tal que $\phi(A \to a) = a$.
- Para cada $A \to B_1 \ldots B_n \in P_1$, existe um morfismo n-ário m em G(n) de codomínio A e tal que o i-ésimo domínio é B_i.

a.3) Seja $(F,\Sigma,\phi, (C, \square,\mathbf{1})) = L_{\square}\mathbf{G'}$. Vamos provar que $\alpha \Rightarrow^{*}_{G_1} \beta$ se e somente se existe morfismo m em F(M), $m:\beta \rightarrow\alpha$. Conseqüentemente $L(G') = L(G_1) = L(G)$.

Ida ($\Rightarrow$): (demonstração por indução)

<u>Hipótese Indutiva</u>: $\alpha \Rightarrow^{i}_{G_1} \beta$, então existe $m:\beta \rightarrow\alpha$ em F(M).

<u>Caso Base</u> (i=0): Se $\alpha \Rightarrow^{0}\beta$ então $\alpha = \beta$. Como F(M) são arestas de uma categoria (C), existe $m: \alpha\rightarrow\alpha$.

<u>Passo Indutivo</u> (vale para i -1 $\Rightarrow$ vale para i):

$\alpha \Rightarrow^{i}_{G_1} \beta_1\beta_2\beta_3$, então $A \Rightarrow^{i-1}_{G_1} \beta_1 B\beta_3 \Rightarrow \beta_1\beta_2\beta_3$.

Logo:

$\exists\ m_1: \beta_2 \rightarrow B$ (por construção de G')

$\exists\ m_2: \beta_1 B\beta_3\rightarrow\alpha$ (por hipótese de indução)

Logo existe $m: \beta_1\beta_2\beta_3 \rightarrow\alpha$, conforme a construção da figura A.2.

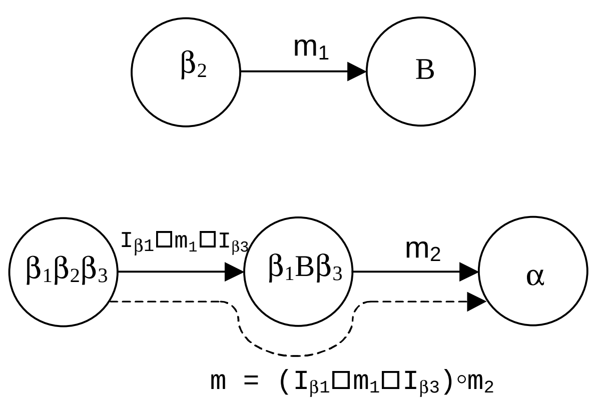

Figura A.2 Construção do morfismo m do passo indutivo.

Volta ($\Leftarrow$): (demonstração por indução na estrutura de m)

<u>Hipótese Indutiva</u>:

Existe $m: \beta \rightarrow\alpha$ em F(M), então $\alpha \Rightarrow^{*}_{G_1} \beta$.

Caso Base:

- m: $A \to A$ é I_A. Neste caso $A \Rightarrow^{0}_{G_1} A$.
- m: $\beta \to A$ corresponde a uma regra $A \to \beta$ em G_1. Neste caso $A \Rightarrow^{1}_{G_1} \beta$.

Passo Indutivo:

- m é a composição de arestas que satisfazem a hipótese indutiva. Neste caso $m{:}\beta\to\alpha = m_1{:}\beta\to\gamma \circ m_2{:}\gamma\to\alpha$, onde $\alpha \Rightarrow^{*}_{G_1} \gamma$ e $\gamma \Rightarrow^{*}_{G_1} \beta$, portanto $\alpha \Rightarrow^{*}_{G_1} \beta$.
- m é o produto de arestas que satisfazem a hipótese indutiva. Neste caso $m{:}\beta_1\beta_2\to\alpha_1\alpha_2 = m_1{:}\beta_1\to \alpha_1 \square\, m_2{:}\, \beta_2\to\alpha_2$, onde $\alpha_1 \Rightarrow^{*}_{G_1} \beta_1$ e $\alpha_2 \Rightarrow^{*}_{G_1} \beta_2$, portanto $\alpha_1\alpha_2 \Rightarrow^{*}_{G_1} \alpha_1\beta_2 \Rightarrow^{*}_{G_1} \beta_1\beta_2$.

CQD

b) Reciprocamente, para cada gramática livre de contexto categórica **G'** podemos construir uma gramática livre de contexto G tal que L(**G'**) = L(G).

b.1) Se **G'**=(G',Σ,ϕ), construímos a gramática livre de contexto G =(G'(*), Σ, P, G'(S)(G'(⊤))) de tal forma que:

- P = { $A\to a$ | para cada morfismo 0-ário m de codomínio A tq $\phi(m)=a$ } ∪ {$A\to B_1...B_n$ | para cada morfismo n-ário de codomínio A e i-ésimo domínio B_i}

b.2) Seja $(\mathsf{F},\Sigma,\phi, (C, \square,\mathbf{1})) = L_{\square}$**G'**. Vamos provar que existe morfismo m em $\mathsf{F}(\mathsf{M})$, $m{:}\beta \to\alpha$ se e somente se $\alpha \Rightarrow^{*}_{G} \beta$. Conseqüentemente L(G) = L(**G'**).

Ida (⇒): (demonstração por indução na estrutura de m)

Hipótese Indutiva:

Existe m: $\beta \to\alpha$ em $\mathsf{F}(\mathsf{M})$, então $\alpha \Rightarrow^{*}_{G} \beta$.

Caso Base:

- m: $A \to A$ é I_A. Neste caso $A \Rightarrow^{0}_{G} A$.

- m: $\beta \to A$ corresponde a uma regra $A \to \beta$ em G. Neste caso $A \Rightarrow^{1}_{G} \beta$.

<u>Passo Indutivo</u>:

- m é a composição de arestas que satisfazem a hipótese indutiva. Neste caso $m{:}\beta\to\alpha$ = $m_1{:}\beta\to\gamma \circ m_2{:}\gamma\to\alpha$, onde $\alpha \Rightarrow^{*}_{G} \gamma$ e $\gamma \Rightarrow^{*}_{G} \beta$, portanto $\alpha \Rightarrow^{*}_{G} \beta$.

- m é o produto de arestas que satisfazem a hipótese indutiva. Neste caso $m{:}\beta_1\beta_2\to\alpha_1\alpha_2$ = $m_1{:}\beta_1\to \alpha_1 \,\square\, m_2{:}\ \beta_2\to\alpha_2$, onde $\alpha_1 \Rightarrow^{*}_{G} \beta_1$ e $\alpha_2 \Rightarrow^{*}_{G} \beta_2$, portanto $\alpha_1\alpha_2 \Rightarrow^{*}_{G} \alpha_1\beta_2 \Rightarrow^{*}_{G} \beta_1\beta_2$.

Volta ($\Leftarrow$): (demonstração por indução no comprimento da derivação)

<u>Hipótese Indutiva</u>:

$\alpha \Rightarrow^{i}_{G} \beta$, então existe m: $\beta \to\alpha$ em $L_{\square}G'$.

<u>Caso Base</u> (i=0):

Se $\alpha \Rightarrow^{0}\beta$ então $\alpha = \beta$. Como F(M) são as arestas de uma categoria, existe m: $\alpha\to\alpha$.

<u>Passo Indutivo</u> (vale para i -1 $\Rightarrow$ vale para i):

$\alpha \Rightarrow^{i}_{G} \beta_1\beta_2\beta_3$, então $A \Rightarrow^{i-1}_{G} \beta_1 B\beta_3 \Rightarrow \beta_1\beta_2\beta_3$.

Logo:

$\exists\ m_1{:}\ \beta_2 \to B$ (por construção de G')

$\exists\ m_2{:}\ \beta_1 B\beta_3\to\alpha$ (por hipótese de indução)

Logo existe m: $\beta_1\beta_2\beta_3 \to\alpha = (I_{\beta 1}\square m_1\square I_{\beta 3})\circ m_2$.

CQD

A.3. Adjunção entre $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ e $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{+}$

Definição 6.13. $\mathbf{U}_{+/\square}$: $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{+}\to \mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ é um funtor definido como:

- A componente-objeto de $U_{+/\square}$ leva uma floresta de DAGs (D,Σ,ϕ_D) a uma floresta (F,Σ,ϕ_F) tal que:
  - F = D. Observe que, pela definição, uma floresta de DAGs é uma floresta de árvores, pois uma categoria que possui soma estritamente associativa e elemento neutro é estritamente monoidal.
  - $\phi_F = \phi_D$.
- A componente-morfismo de $U_{+/\square}$ leva um morfismo η_+ de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{+}$ em um morfismo $\eta_\square$ em $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ tal que:
  - $\eta_\square = \eta_+$. Esta igualdade está justificada no apêndice.

Teorema 6.14. $U_{+/\square}$ tem um adjunto à esquerda $L_{+/\square}$: $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square} \rightarrow \mathbf{Cat}^{\Sigma}_{+}$ tal que:

- A componente-objeto de $L_{+/\square}$ leva uma floresta $(F, \Sigma, \phi_F, \mathbf{C})$ na floresta de DAGs $(D, \Sigma, \phi_D, \mathbf{C'})$ tal que:
  - $D(S) = F(S)$, portanto $D(T) = F(T)$ e $D(*) = F(*)$.
  - $D(M) = Morf(C')$. Onde **C'** é a menor categoria tal que $Obj(C') = F(*)$, $Morf(C') \supseteq F(M)$ e que possui uma soma que é uma extensão de $\square$.
  - Para $m_1, m_2 \in F(M)$, $D(codom)(m_1) = F(codom)(m_1)$ e $D(dom)(m_1) = F(dom)(m_1)$ e $m_1+m_2 = m_1 \square m_2$.
  - $\phi_D = \phi_F$.
- A componente-morfismo de $L_{+/\square}$ leva um morfismo $\eta_\square$ de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ em um morfismo η_+ em $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{+}$ tal que:
  - $\eta_{+T} = \eta_{\square T}$, $\eta_{+*} = \eta_{\square *}$.
  - η_{+M} estende $\eta_{\square M}$ preservando a soma.

Podemos ver $U_{+/\square}$ como uma inclusão de $\mathbf{Cat}_{+}^{\Sigma}$ em $\mathbf{Cat}_{\square}^{\Sigma}$, e $L_{+/\square}$ é um funtor que estende o produto tensorial para uma soma, introduzindo os morfismos que forem necessários.

Demonstração.

1) Para demonstramos o teorema primeiro temos que apresentar a unidade da adjunção. Seja $\eta_{+/\square}:1 \xrightarrow{\bullet} U_{+/\square}L_{+/\square}$ a transformação natural definida no ponto $\mathbf{F_1} \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Cat}_{\square}^{\Sigma})$ como o morfismo $\eta_{+/\square\mathbf{F_1}} = \eta_{\eta}$ em $\mathbf{Cat}_{\square}^{\Sigma}$ tal que:

- $\eta_{\eta}(\mathsf{T})$ é a identidade.
- $\eta_{\eta}(*)$ é a identidade.
- $\eta_{\eta}(\mathsf{M})$ é a inclusão.

2) $\forall\phi:\mathbf{F_1}\rightarrow U_{+/\square}\mathbf{D_2}$, construímos $\alpha:L_{+/\square}\mathbf{F_1}\rightarrow\mathbf{D_2}$ da seguinte forma:

- $\alpha(\mathsf{T}) = \phi(\mathsf{T})$.
- $\alpha(*) = \phi\ (*)$.
- $\alpha(\mathsf{M})$ é tal que:
  - $\alpha(\mathsf{M})(m) = \phi(\mathsf{M})(m)$ se $m \in \mathsf{F}(\mathsf{M})$.
  - $\alpha(\mathsf{M})$ preserva a soma.

3) O diagrama abaixo comuta por construção de α.

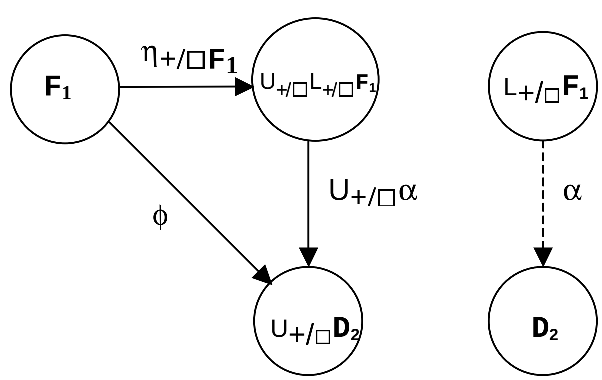

Figura A.3 Diagrama da adjunção $(\eta_{+/\square}, L_{+/\square}, U_{+/\square})$.

4) Provaremos que α é único por casos. Suponha que exista um morfismo β de $\mathbf{Cat}_{+}^{\Sigma}$, $\beta \neq \alpha$, tal que o diagrama acima comute. Então β não satisfaz a uma das condições da definição de α:

4a) β (T) $\neq \phi$(T).

Neste caso, $\eta_{\eta}(\mathsf{T}) \circ U_{+/\square}\beta(\mathsf{T}) \neq \phi(\mathsf{T})$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4b) β (*) $\neq \phi$(*).

Neste caso, $\eta_{\eta}(*) \circ U_{+/\square}\beta(*) \neq \phi(*)$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4c) Para algum m $\in$ F(M), $\beta(\mathsf{M})(m) \neq \phi(\mathsf{M})(m)$.

Neste caso, $\eta_{\eta}(\mathsf{M}) \circ U_{+/\square}\beta(\mathsf{M}) \neq \phi(\mathsf{M})$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4d) β(M) não preserva a soma.

Este caso contradiz a hipótese de β ser um morfismo de $\mathbf{Cat}_{+}^{\Sigma}$.

CQD

A.4. Correção e Completude do Modelo de ETDS simples

Antes de provar o próximo teorema, precisamos de alguns lemas auxiliares.

Lema A.1. Dado um ETDS T, existe um ETDS T', equivalente a T, tal que todas as regras de T' são da uma das formas abaixo:

- $A \rightarrow B_1 \ldots B_n, Bp_1 \ldots Bp_n$
- $A \rightarrow b_1, b_2$

Onde A, B_i são não-terminais e são terminais ou ε. Além disso, se T é simples, então T' é simples.

Demonstração:

1) Suponhamos que T tenha alguma regra que não seja da forma acima. Neste caso a regra é da forma:

- $A \rightarrow b_{01} \ldots b_{0M_0} B_1 b_{11} \ldots b_{1M_1} \ldots B_n b_{n1} \ldots b_{nM_n},\ c_{01} \ldots c_{0P_0} Bp_1 c_{11} \ldots c_{1P_1} \ldots Bp_n c_{n1} \ldots c_{mP_n}$

Podemos substituir esta regra por:

- $A \rightarrow X_{01} \ldots X_{0Q_0} B_1 \ldots\ldots B_n X_{n1} \ldots X_{nQ_n},\ X_{01} \ldots X_{0Q_0} Bp_1 \ldots\ldots Bp_n X_{n1} \ldots X_{mQ_n}$

Onde X_{ij} são novos não-terminais e $Q_i = \max(M_i, P_i)$.

2) Acrescentamos as regras:

- $X_{ij} \rightarrow b_{ij},\ c_{ij}$

Onde $b_{ij} = \varepsilon$ se $j > M_i$ e $c_{ij} = \varepsilon$ se $j > P_i$. Repetindo esta operação para cada regra que não satisfaça as condições obtemos o esquema T' desejado.

Esta operação fica muito mais clara através de uma ilustração. Na figura A.4, a regra da esquerda é substituída pelas regras da direita:

$A \rightarrow$ ghiBC, giBCm	$A \rightarrow X_{01}X_{02}X_{03}BC\ X_{21},\ X_{01}X_{02}X_{03}BCX_{21}$ $X_{01} \rightarrow$ g, g $X_{02} \rightarrow$ h, I $X_{03} \rightarrow$ i, ε $X_{21} \rightarrow$ ε, m

Figura A.4 Exemplo de substituição de regra para um STDS simples.

Lema A.2. Dado um ETDS T' que satisfaz às condições do lema A.1, existe um ETDS T'', equivalente a T', tal que em todas as regras $A \rightarrow \alpha, \beta$ de T', A e α determinam β unicamente e T'' também satisfaz às condições do lema A.1. Se T' é simples então T'' também é simples.

Demonstração:

1) Para o primeiro tipo de regra, α já é determinado unicamente a menos da permutação dos não terminais. Suponhamos que existam duas regras:

- $A \rightarrow B_1 \ldots B_n, Bp_1 \ldots Bp_n$
- $A \rightarrow B_1 \ldots B_n, Bq_1 \ldots Bq_n$

Podemos substituí-las por:

- $A \rightarrow X, X$
- $A \rightarrow Y, Y$
- $X \rightarrow B_1 \ldots B_n, Bp_1 \ldots Bp_n$
- $Y \rightarrow B_1 \ldots B_n, Bq_1 \ldots Bq_n$

2) No caso do segundo tipo de regra, suponhamos que existam duas regras:

- $A \rightarrow b_1, b_2$
- $A \rightarrow b_1, b_3$

Onde $b_1 \neq b_3$. Neste caso basta substituí-las por:

- $A \rightarrow X, X$
- $A \rightarrow Y, Y$
- $X \rightarrow b_1, b_2$
- $Y \rightarrow b_1, b_3$

Lema A.3. Dado um morfismo $\tau_{\square} = \eta$ de $Cat^{\Sigma}_{\square}$ tal que $\tau_{\square}:L_{\square}G_1 \rightarrow L_{\square}G_2$, existe um morfismo $\tau'_{\square} = \eta'$, $\tau'_{\square}:L_{\square}G_1 \rightarrow L_{\square}G'_2$, tal que $\eta'(*)$ é injetiva e $trad(\tau'_{\square}) = trad(\tau_{\square})$.

Demonstração:

1) Sendo $\mathbf{G_2} = (G_2,\Sigma,\phi_2)$ e $\mathbf{G'_2} = (G'_2,\Sigma,\phi'_2)$, suponha que existam não terminais $B_1...B_n$, tais que $\tau'_{\square}(*)(B_i) = C$. Neste caso mudamos a gramática alvo da seguinte forma.

- Substituímos C em $G_2(*)$ por $C_{B_1}...C_{B_n}$ em $G'_2(*)$.

- Cada $m \in G_2(0)$, de codomínio C é substituída por uma coleção de arestas m_i em $G'_2(0)$, de codomínio C_{B_i}, tal que $\phi'_2(m_i) = \phi_2(m)$ para $i \in \{1,...,n\}$.
- Cada $m \in G_2(i)$, de codomínio C é substituída por uma coleção de arestas m_i em $G'_2(i)$, de codomínio C_{B_i}, para $i > 0$.
- Cada $m \in G_2(i)$, com j-ésimo domínio igual a C, é substituída por uma coleção de arestas m_i em $G'_2(i)$, com j-ésimo domínio igual a C_{B_i}, para $i > 0$.

2) A função $\tau_{\square}(M)$ é modificada de forma que:

- $\tau'_{\square}(M)(n:\alpha\to B_i) = m_i:\alpha\to C_{B_i}$ se e somente se $\tau_{\square}(M)(n) = m:\alpha\to C$.
- $\tau'_{\square}(M)(n:\alpha_1 B_i \alpha_2\to A) = m_i:\alpha_1 C_{B_i}\alpha_2\to A$ se e somente se $\tau'_{\square}(M)(n) = m:\alpha_1 C\alpha_2\to A$.
- As demais componentes de $\tau'_{\square}(M)$, respeitam o produto $\square$ e a composição.

No que se segue $(F_1,\Sigma,\phi_1,\mathbf{C}) = L_{\square}\mathbf{G_1}$.

a) $trad(\tau'_{\square}) \subseteq trad(\tau_{\square})$

Suponha que $(x,y) \in trad(\tau'_{\square})$, neste caso $x = T(m)$, para algum $m\in Hom_C(1,S)$ e $y = T(n)$, para $n = \eta'_M(m)$. m corresponde uma derivação $\eta_*(S) \Rightarrow^*_{G'_2} y$. Substituindo cada ocorrência de um terminal C_i por C, obtemos uma derivação $\eta_*(S) \Rightarrow^*_{G_2} y$, esta derivação corresponde a um morfismo n tal que $n = \eta_M(m)$, portanto $(x,y) \in trad(\tau_{\square})$.

b) $trad(\tau'_{\square}) \supseteq trad(\tau_{\square})$

Suponha que $(x,y) \in trad(\tau_{\square})$, neste caso $x = T(m)$, para algum $m\in Hom_C(1,S)$ e $y = T(n)$, para $n = \eta_M(m)$. m corresponde uma derivação $\eta_*(S) \Rightarrow^*_{G_2} y$. Substituindo cada ocorrência de um terminal D por D índice $\eta_*^{-1}(D)$ (a imagem inversa é única nesta dada derivação), obtemos uma derivação $\eta_*(S) \Rightarrow^*_{G'_2} y$, esta derivação corresponde a um morfismo n' tal que $n = \eta'_M(m)$, portanto $(x,y) \in trad(\tau'_{\square})$.

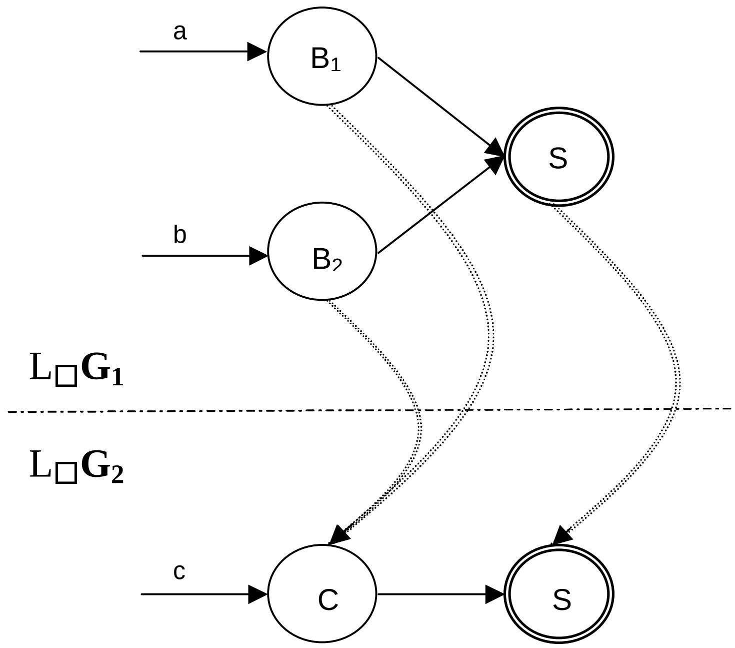

Figura A.5 $\tau_{\square} = \eta$, morfismo de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ com $\eta(*)$ não injetiva.

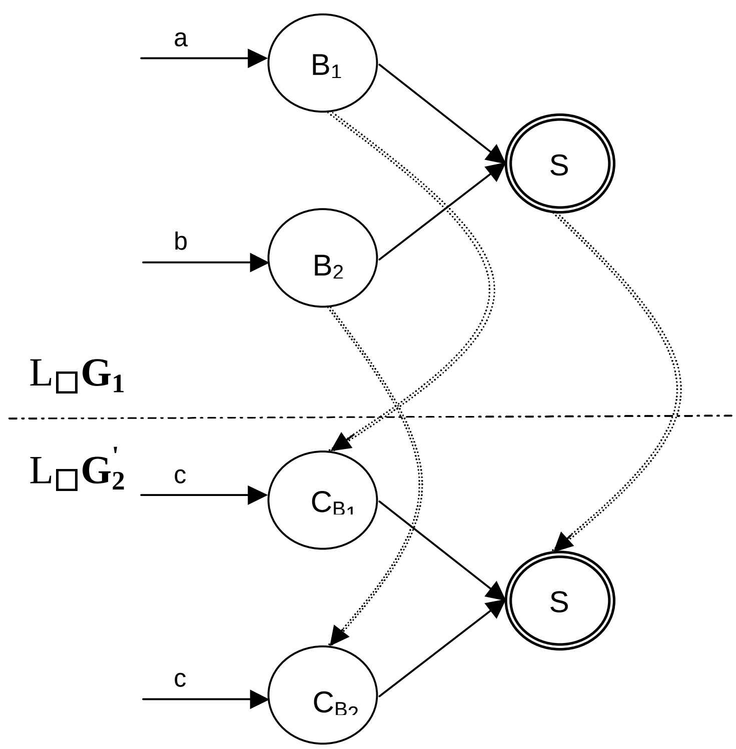

Figura A.6 $\tau_{\square} = \eta$, morfismo de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ com $\eta(*)$ injetiva.

Exemplo A.1. Seja $\tau_{\square}$ o morfismo de representado pela figura A.5, onde a função $\eta'(*)$ está representada pela linha dupla pontilhada. Neste caso $\tau'_{\square}$ é o morfismo representado pela figura A.6.

Lema A.4. Dado um morfismo $\tau_{\square} = \eta$ de $Cat^{\Sigma}_{\square}$ tal que $\tau_{\square}:L_{\square}G_1 \rightarrow L_{\square}G'_2$, tal que $\eta'(*)$ é injetiva, existe um morfismo $\tau'_{\square} = \eta'$, $\tau'_{\square}:L_{\square}G_1 \rightarrow L_{\square}G''_2$, tal que $\eta'(*)$ é bijetiva e $trad(\tau'_{\square}) = trad(\tau_{\square})$.

Demonstração:

Esta operação não preserva necessariamente a linguagem gerada pela segunda gramática. Neste caso podemos substituir cada não terminal A de G_2 por $\tau_{\square}(*)^{-1}(A)$ e eliminar os não terminais que não tenham imagem inversa. Obtemos assim a gramática $\mathbf{G''_2} = (G''_2,\Sigma,\phi''_2)$, se A e B estão em $G''_2(*)$ então os morfismos entre A e B são os mesmos que em G'_2. Assim se $m_1:A \rightarrow B \in G_1(M)$ teremos necessariamente $\eta(M)(m_1) = \eta'(M)(m_1)$, portanto $trad(\tau'_{\square}) = trad(\tau_{\square})$.

Teorema 6.18. Dado um ETDS simples T, existe um morfismo $\tau_{\square}$ de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$, para algum Σ, tal que $trad(\tau_{\square}) = trad(T)$. Reciprocamente, dado um morfismo $\tau_{\square}:L_{\square}\mathbf{G_1} \rightarrow L_{\square}\mathbf{G_2}$ de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$, existe um ETDS simples T, tal que $trad(\tau_{\square}) = trad(T)$.

a) Dado um ETDS simples $T = (N,\Sigma,\Delta,R,S)$, existe um morfismo $\tau_{\square}$ de $\mathbf{Cat}^{\Sigma\cup\Delta}_{\square}$, tal que $trad(\tau_{\square}) = trad(T)$.

1) De acordo com os lemas A.1 e A.2, podemos supor sem perda de generalidade que as regras de T são da forma:

- $A \rightarrow B_1 \ldots B_n, B_1 \ldots B_n$
- $A \rightarrow b_1, b_2$ (onde b_2 é determinado unicamente por A e b_1)

2) Sejam G_1 e G_2 respectivamente as gramática de entrada e de saída de T. A partir destas, construímos as gramáticas categóricas equivalentes $\mathbf{G'_1}=(G'_1,\Sigma\cup\Delta,\phi_1)$ e $\mathbf{G'_2}=(G'_2,\Sigma\cup\Delta,\phi_2)$, de acordo com o teorema 3.28 (símbolos terminais desnecessários introduzidos pela união não invalidam o teorema 3.28). Podemos assim construir $\tau_\square:L_\square G'_1\rightarrow L_\square G'_2 = \eta$ da seguinte forma:

- $\eta(\mathsf{T})$ = Único morfismo entre $L_\square G'_1(\mathsf{T})$ e $L_\square G'_2(\mathsf{T})$
- $\eta(*)$ = Identidade.($L_\square G'_1(*) = L_\square G'_2(*) = N$)
- $\eta(\mathsf{M})$ é tal que:
  - $\eta(\mathsf{M})(A\rightarrow B_1\ldots B_n) = A\rightarrow B_1\ldots B_n$, onde $A\rightarrow B_1\ldots B_n, B_1\ldots B_n$ é uma regra de T.
  - Se $\phi_1(m)=b_1$, $\phi_1(n)=b_2$ e $A\rightarrow b_1, b_2$ é uma regra de T, então $\eta(m:A\rightarrow 1) = n:A\rightarrow 1$.

3) No que segue, consideremos $L_\square\mathbf{G'_1} = (\mathsf{F}_1,\Sigma\cup\Delta,\phi_1)$ e $L_\square\mathbf{G'_2} = (\mathsf{F}_2,\Sigma\cup\Delta,\phi_2)$. Vamos provar que $(S,S) \Rightarrow^*_T (\alpha,\beta)$ se e somente se existem morfismos m_1 em $\mathsf{F}_1(\mathsf{M})$ e m_2 em $\mathsf{F}_2(\mathsf{M})$, tais que $\eta(\mathsf{M})(m_1) = m_2$. Conseqüentemente $\mathtt{trad}(\tau_\square) = \mathtt{trad}(T)$.

Ida ($\Rightarrow$): (demonstração por indução)

<u>Hipótese Indutiva</u>:

$(S, S) \Rightarrow^i (\alpha,\beta)$, então existem morfismos m_1 em $\mathsf{F}_1(\mathsf{M})$ e m_2 em $\mathsf{F}_2(\mathsf{M})$, tais que $\eta(\mathsf{M})(m_1)= m_2$.

<u>Caso Base</u> (i=0):

Se $(S,S) \Rightarrow^0 (\alpha,\beta)$ então $\alpha = \beta = S$. Como $\mathsf{F}_1(\mathsf{M})$ são arestas de uma categoria, então $m_1 = m_2 = id_S$. Assim $\eta(\mathsf{M})(m_1)= m_2$ por construção.

<u>Passo Indutivo</u> (Se vale para $j < i \Rightarrow$ vale para i):

$(S, S) \Rightarrow^i (\alpha,\beta)$, então $(S, S) \Rightarrow^j (\alpha_1 A\alpha_2, \beta_1 A\beta_2) \Rightarrow (\alpha_1\gamma\alpha_2, \beta_1\gamma'\beta_2)$. Onde $j < i$, $\alpha = \alpha_1\gamma\alpha_2$ e $\beta = \beta_1\gamma'\beta_2$.

Logo:

$\exists\, f_1: \alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow S$, $f_2: \beta_1 A \beta_2 \rightarrow S$ tq $\eta(M)(f_1)= f_2$, por hipótese de indução.

$\exists\, r_1: \gamma \rightarrow A$, $r_2: \gamma' \rightarrow A$ tq $\eta(M)(r_1)= r_2$, por construção de $\eta(M)$.

Logo existem $m_1:\alpha \rightarrow S$, e $m_2:\beta \rightarrow S$ tq $\eta(M)(m_1)= m_2$, A figura A.7 exibe a construção de m_1 na categoria com objetos $F_1(*)$ e morfismos $F_1(M)$, $\eta(M)$ leva a um diagrama homomórfico na categoria com objetos $F_2(*)$ e morfismos $F_2(M)$, onde é construído m_2.

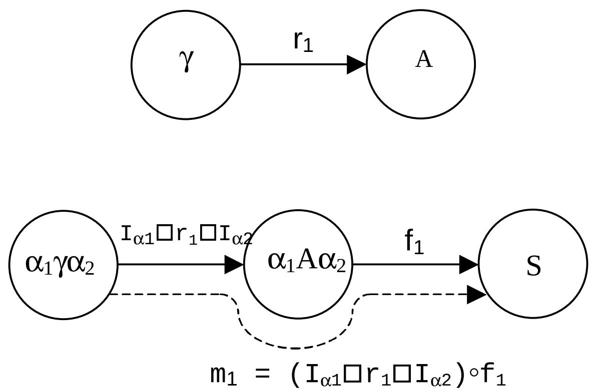

Figura A.7 Construção do morfismo m_1 do passo indutivo.

Volta ($\Leftarrow$): (demonstração por indução na estrutura de m_1 e m_2)

<u>Hipótese Indutiva</u>:

Se existem morfismos m_1 em $F_1(M)$ e m_2 em $F_2(M)$, tais que $\eta(M)(m_1)= m_2$ então $(S,S) \Rightarrow^* (\alpha,\beta)$

<u>Caso Base</u>:

- $m_1 = m_2 = I_A$. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^0 (A,A)$.
- $m_1 = m_2 : B_1 \ldots B_n \rightarrow A$. Onde $A \rightarrow B_1 \ldots B_n, B_1 \ldots B_n$ é uma regra de T. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^1 (B_1 \ldots B_n, B_1 \ldots B_n)$.
- $m_1 = 1 \rightarrow A$ e $m_2 = 1 \rightarrow A$, $\phi_1(m)= b_1$ e $\phi_2(n)= b_2$. Onde $A \rightarrow b_1, b_2$ é uma regra de T. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^1 (b_1, b_2)$.

Passo Indutivo:

- Se m_1 é uma composição de arestas e $m_2=\eta(\mathsf{M})(m_1)$ então m_2 também é uma composição, pois $\eta(\mathsf{M})$ é um funtor. Neste caso $m_1: \alpha\to S = m_1': \alpha\to\alpha' \circ m_1'': \alpha'\to S$, e $m_2: \beta\to S = m_2': \beta\to\beta' \circ m_2'': \beta'\to S$. Portanto $(S,S) \Rightarrow^* (\alpha',\beta') \Rightarrow^* (\alpha,\beta)$.

- Se m_1 é um produto de arestas e $m_2=\eta(\mathsf{M})(m_1)$ então m_2 também é um produto pois $\tau_\Box(\mathsf{M})$ preserva produtos. Neste caso $m_1:\alpha\Box\alpha'\to\alpha_1\Box\alpha_1' = m_1': \alpha\to\alpha_1 \Box m_1'': \alpha'\to\alpha_1'$, e $m_2: \beta\Box\beta'\to\beta_1\Box\beta_1' = m_2': \beta\to\beta_1 \Box m_2'': \beta'\to\beta_1'$. Portanto $(\alpha_1, \beta_1) \Rightarrow^* (\alpha, \beta)$ e $(\alpha_1', \beta_1') \Rightarrow^* (\alpha', \beta')$ logo $(\alpha_1\alpha_1', \beta_1\beta_1') \Rightarrow^* (\alpha\alpha', \beta\beta')$.

CQD

b) Reciprocamente, dado um morfismo $\tau_\Box:L_\Box\mathbf{G_1}\to L_\Box\mathbf{G_2}$ de $\mathbf{Cat}_\Box^\Sigma$, existe um ETDS simples T, tal que $\mathtt{trad}(\tau_\Box) = \mathtt{trad}(T)$.

1) Considere $\tau_\Box = \eta$. Iniciamos construindo as gramáticas livre de contexto $G_1=(N_1,\Sigma,P_1,S_1)$ e $G_2=(N_2, \Sigma, P_2,S_2)$ respectivamente equivalentes a $\mathbf{G_1}$ e $\mathbf{G_2}$ de acordo com o teorema 3.28.

2) De acordo com os Lemas 3 e 4, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tau_\Box(*)$ é bijetiva e que $\eta(*)$ é a identidade. Podemos então construir o ETDS simples $T = (N_1,\Sigma,\Sigma,R,S_1)$, de tal forma que:

- Se $m_1:A\to B_1\ldots B_n \in P_1$ e $\eta(\mathsf{M})(m_1) = m_2:A\to B_1\ldots B_n$, então $A\to B_1\ldots B_n, B_1\ldots B_n$ é uma regra de R.

- Se $m_1:A\to 1 \in P_1$ e $\eta(\mathsf{M})(m_1) = m_2:A\to 1$, onde $\phi_1(m_1) = b_1$ e $\phi_2(m_2) = b_2$, então $A\to b_1, b_2$ é uma regra de R.

3) No que segue, consideremos $L_{\square}\mathbf{G_1} = (F_1,\Sigma,\phi_1)$ e $L_{\square}\mathbf{G_2} = (F_2,\Sigma,\phi_2)$. Vamos provar que existem morfismos m_1 em $F_1(M)$ e m_2 em $F_2(M)$, tais que $\eta(M)(m_1) = m_2$ se e somente se $(S,S) \Rightarrow^*_T (\alpha,\beta)$. Conseqüentemente $\mathtt{trad}(T) = \mathtt{trad}(\tau_{\square})$.

Ida ($\Rightarrow$):(demonstração por indução na estrutura de m_1 e m_2)

Hipótese Indutiva:

Se existem morfismos m_1 em $F_1(M)$ e m_2 em $F_2(M)$, tais que $\eta(M)(m_1)= m_2$ então $(S,S) \Rightarrow^* (\alpha,\beta)$

Caso Base:

- $m_1 = m_2 = I_A$. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^0 (A,A)$.
- $m_1:B_1\ldots B_n \rightarrow A$ e $m_2:\eta(*)(B_1)\ldots\eta(*)(B_n)\rightarrow\eta(*)(B_n)$. Neste caso $A\rightarrow B_1\ldots B_n$ é uma regra de G_1, portanto $A\rightarrow B_1\ldots B_n$, $B_1\ldots B_n$ é uma regra de T. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^1 (B_1\ldots B_n, B_1\ldots B_n)$.
- $m_1 = 1 \rightarrow A$ e $m_2 = 1 \rightarrow \eta(*)(A)$, $\phi_1(m)= b_1$ e $\phi_2(n)= b_2$. Neste caso $A\rightarrow b_1$ é uma regra de G_1 e $A\rightarrow b_2$ é uma regra de G_3, portanto $A\rightarrow b_1$, b_2 é uma regra de T. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^1 (b_1, b_2)$.

Passo Indutivo:

- Se m_1 é uma composição de arestas que satisfazem a hipótese indutiva e $m_2=\eta(M)(m_1)$ então m_2 também é uma composição pois $\tau_{\square}(M)$ é um funtor. Neste caso m_1: $\alpha\rightarrow S$ = m_1’: $\alpha\rightarrow\alpha' \circ m_1$’’: $\alpha'\rightarrow S$, e m_2: $\beta\rightarrow S$ = m_2’: $\beta\rightarrow\beta' \circ m_2$’’: $\beta'\rightarrow S$. Portanto $(S,S) \Rightarrow^* (\alpha',\beta') \Rightarrow^* (\alpha,\beta)$.
- Se m_1 é um produto de arestas que satisfazem a hipótese indutiva e $m_2=\tau_{\square}(M)(m_1)$ então m_2 também é um produto pois $\tau_{\square}(M)$ preserva produtos. Neste caso m_1: $\alpha\square\alpha'\rightarrow\alpha_1\square\alpha_1'$ = m_1’: $\alpha\rightarrow\alpha_1 \square$ m_1’’: $\alpha'\rightarrow\alpha_1'$, e m_2: $\beta\square\beta'\rightarrow\beta_1\square\beta_1'$ = m_2’: $\beta\rightarrow\beta_1 \square$

m_2'': $\beta' \to \beta_1'$. Portanto $(\alpha_1, \beta_1) \Rightarrow^* (\alpha, \beta)$ e $(\alpha_1', \beta_1') \Rightarrow^* (\alpha', \beta')$ logo $(\alpha_1\alpha_1', \beta_1\beta_1') \Rightarrow^*$ $(\alpha\alpha', \beta\beta')$.

Volta ($\Leftarrow$): (demonstração por indução)

<u>Hipótese Indutiva</u>:

$(S,S) \Rightarrow^i (\alpha,\beta)$, então existem morfismos m_1 em $F_1(M)$ e m_2 em $F_2(M)$, tais que $\eta(M)(m_1)= m_2$.

<u>Caso Base</u> (i=0):

Se $(S,S) \Rightarrow^0 (\alpha,\beta)$ então $\alpha = \beta = S$. Como $F_1(M)$ são arestas de uma categoria, então $m_1 = m_2 = id_S$. Assim $\eta(M)(m_1)= m_2$ por construção.

<u>Passo Indutivo</u> (vale para $j < i \Rightarrow$ vale para i):

$(S,S) \Rightarrow^i (\alpha,\beta)$, então $(S,S) \Rightarrow^j (\alpha_1 A\alpha_2, \beta_1 A\beta_2) \Rightarrow (\alpha_1\gamma\alpha_2, \beta_1\gamma'\beta_2)$. Onde $j < i$, $\alpha = \alpha_1\gamma\alpha_2$ e $\beta = \beta_1\gamma'\beta_2$.

Logo:

$\exists\, f_1: \alpha_1 A\alpha_2 \to S$, $f_2: \beta_1 A\beta_2 \to S$ tq $\eta(M)(f_1)= f_2$, por hipótese de indução.

$\exists\, r_1: \gamma \to A$, $r_2: \gamma' \to A$ tq $\eta(M)(r_1)= r_2$, por construção de $\eta(M)$.

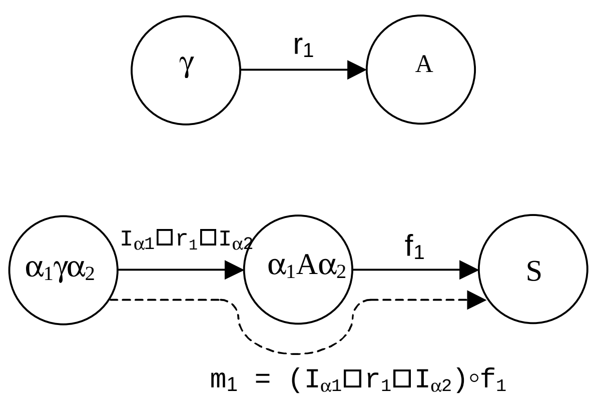

Figura A.8 Construção do morfismo m_1 do passo indutivo.

Logo existem m_1:$\alpha \to S$, e m_2:$\beta \to S$ tq $\eta(M)(m_1)= m_2$, A figura A.8 exibe a construção de m_1 na categoria com objetos $F_1(*)$ e morfismos $F_1(M)$, $\tau_{\square}(M)$ leva a um diagrama homormófico na categoria com objetos $F_2(*)$ e morfismos $F_2(M)$, onde é construído m_2.

CQD

A.5. Adjunção entre $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ e $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{T}$

Definição 6.21. $U_{T/\square}$: $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{T} \rightarrow \mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square}$ é um funtor definido como:

- A componente-objeto de $U_{T/\square}$ leva uma floresta de árvores não-ordenadas (T, Σ, ϕ_T, $\mathbf{C_1}$) a uma floresta (F, Σ, ϕ_F, $\mathbf{C_2}$) tal que:
  - T = F. Pela definição, uma floresta de árvores não-ordenadas é uma floresta de árvores.
  - $\phi_T = \phi_F$.
- A componente-morfismo de $U_{T/\square}$ leva um morfismo η_T de $\mathbf{Cat}_T$ em um morfismo $\eta_{\square}$ em $\mathbf{Cat}_{\square}$ tal que:
  - $\eta_{\square} = \eta_T$. Observe que $\eta_T(*)$ e $\eta_T(M)$ são, por definição, as componentes de um funtor que preserva $\square$.

Teorema 6.22. $U_{T/\square}$ tem um adjunto à esquerda, $L_{T/\square}$: $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{\square} \rightarrow \mathbf{Cat}^{\Sigma}_{T}$ tal que:

- A componente-objeto de $L_{T/\square}$ leva uma floresta (F, Σ, ϕ_F, **C**) na floresta de árvores não ordenadas (T, Σ, ϕ_T, **C’**) tal que:
  - T(S) = F(S), portanto T(T) = F(T) e T(*) = F(*).
  - T(M) = Morf(C’). Onde C’ é a menor categoria tal que Obj(C’) = Obj(C), Morf(C’) $\supseteq$ Morf(C) e que é simétrica.
  - Para m_1, $m_2 \in$ F(M), T(codom)(m_1) = F(codom)(m_1), T(dom)(m_1) = F(dom)(m_1).
  - $\phi_T = \phi_F$.

- A componente-morfismo de $L_{T/\square}$ leva um morfismo $\eta_{\square}$ de $\mathbf{Cat}_{\square}^{\Sigma}$ em um morfismo η_T em $\mathbf{Cat}_{T}^{\Sigma}$ tal que:
  - ❑ $\eta_{T_T} = \eta_{\square_T}$, $\eta_{T_*} = \eta_{\square_*}$. Enquanto η_{T_M} estende $\eta_{\square_M}$ preservando $s_{a,b}$.

Demonstração.

1) Para demonstramos o teorema primeiro temos que apresentar a unidade da adjunção. Seja $\eta_{\ T/\square}:1 \xrightarrow{\bullet} U_{\ T/\square}L_{T/\square}$ a transformação natural definida no ponto $\mathbf{F_1} \in$ Obj($\mathbf{Cat}_{\square}^{\Sigma}$) como o morfismo $\eta_{T/\square\mathbf{F_1}} = \eta_\eta$ em $\mathbf{Cat}_{\square}^{\Sigma}$ tal que:

- $\eta_\eta(T)$ é a identidade.
- $\eta_\eta(*)$ é a identidade.
- $\eta_\eta(M)$ é a inclusão.

2) $\forall\phi:\mathbf{F_1} \rightarrow U_{T/\square}\mathbf{T_2}$, construímos $\alpha:L_{T/\square}\mathbf{F_1} \rightarrow \mathbf{T_2}$ da seguinte forma:

- $\alpha(T) = \phi(T)$ e $\alpha(*) = \phi(*)$.
- $\alpha(M)$ é tal que:
  - ❑ $\alpha(M)(m) = \phi(M)(m)$ se $m \in F(M)$.
  - ❑ $\alpha(M)$ preserva o funtor T.

3) O diagrama abaixo comuta por construção de α.

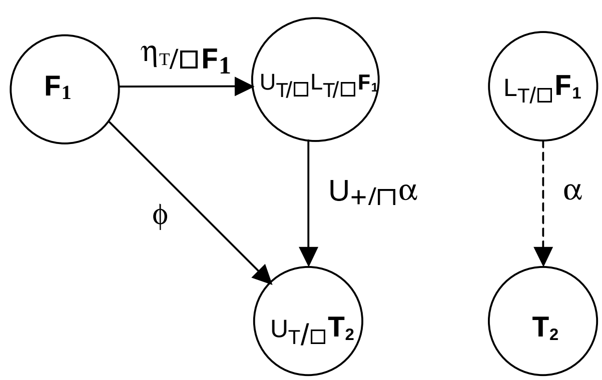

Figura A.9 Diagrama da adjunção ($\eta_{T/\square}$,$L_{T/\square}$,$U_{T/\square}$).

Provaremos que α é único por casos. Suponha que exista um morfismo β de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{T}$, $\beta \neq \alpha$, tal que o diagrama acima comute. Então β não satisfaz a uma das condições da definição de α:

4a) β $(\mathsf{T}) \neq \phi(\mathsf{T})$.

Neste caso, $\eta_{\eta}(\mathsf{T})\circ U_{T/\square}\beta(\mathsf{T}) \neq \phi(\mathsf{T})$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4b) β $(*) \neq \phi(*)$.

Neste caso, $\eta_{\eta}(*)\circ U_{T/\square}\beta(*) \neq \phi(*)$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4c) Para algum $m \in \mathsf{F}(\mathsf{M})$, $\beta(\mathsf{M})(m) \neq \phi(\mathsf{M})(m)$.

Neste caso, $\eta_{\eta}(\mathsf{M})\circ U_{T/\square}\beta(\mathsf{M}) \neq \phi(\mathsf{M})$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4d) $\beta(\mathsf{M})$ não preserva T.

Este caso contradiz a hipótese de β ser um morfismo de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{T}$.

CQD

A.6. Correção e Completude do Modelo de ETDS

Teorema 6.24. Dado um ETDS T, existe um morfismo τ_T de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{T}$, tal que trad($\tau_T$) = trad(T). Reciprocamente, dado um morfismo $\tau_T{:}L_T\mathbf{G_1}\rightarrow L_T\mathbf{G_2}$ de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{T}$, existe um ETDS T, tal que trad(τ_T) = trad(T).

a) Dado um ETDS T, existe um morfismo τ_T de $\mathbf{Cat}^{\Sigma}_{T}$, tal que trad($\tau_T$) = trad(T).

1) De acordo com os lemas A.1 e A.2, podemos supor sem perda de generalidade que as regras de T são da forma:

- $A \rightarrow B_1 \dots B_n, Bp_1 \dots Bp_n$ (onde p é determinado unicamente por A e $B_1 \dots B_n$)
- $A \rightarrow b_1, b_2$ (onde b_2 é determinado unicamente por A e b_1)

2) Sejam G_1 e G_2 respectivamente as gramática de entrada e de saída de T. A partir destas, construímos as gramáticas categóricas equivalentes $\mathbf{G'_1}=(G'_1,\Sigma\cup\Delta,\phi_1)$ e $\mathbf{G'_2}=(G'_2,\Sigma\cup\Delta,\phi_2)$, de acordo com o teorema 3.28 (símbolos terminais desnecessários não invalidam o teorema 3.28). Podemos assim construir $\tau_T:L_TG'_1 \rightarrow L_TG'_2 = \eta$ da seguinte forma:

- $\eta(\mathsf{T})$ = Único morfismo entre $L_TG'_1(\mathsf{T})$ e $L_TG'_2(\mathsf{T})$
- $\eta(*)$ = Identidade.($L_TG'_1(*) = L_TG'_2(*) = N$)
- $\eta(\mathsf{M})$ é tal que:
  - $\eta(\mathsf{M})(m_1:B_1 \dots B_n \rightarrow A) = m_2:Bp_1 \dots Bp_n \rightarrow A$, onde $A \rightarrow B_1 \dots B_n, Bp_1 \dots Bp_n$ é uma regra de T.
  - Se $\phi_1(m)=b_1$, $\phi_1(n)=b_2$ e $A \rightarrow b_1, b_2$ é uma regra de T, então $\eta(m:1 \rightarrow A) = n:1 \rightarrow A$.

3) No que segue, consideremos $L_{\square}\mathbf{G'_1} = (\mathsf{F}_1,\Sigma\cup\Delta,\phi_1)$, $L_T\mathbf{G'_1} = (\mathsf{T}_1, \Sigma\cup\Delta,\phi_1)$ e $L_T\mathbf{G'_2} = (\mathsf{T}_2, \Sigma\cup\Delta, \phi_2)$. Vamos provar que $(S,S) \Rightarrow^*_T (\alpha,\beta)$ se e somente se existem morfismos m_1 em $\mathsf{F}_1(\mathsf{M})$ e m_2 em $\mathsf{T}_2(\mathsf{M})$, tais que $\eta(\mathsf{M})(m_1) = m_2$. Conseqüentemente $\mathtt{trad}(\tau_T) = \mathtt{trad}(T)$. Observe que pela definição 6.17 devemos provar esta condição exatamente para os morfismos m_1 em $\mathsf{F}_1(\mathsf{M})$.

Ida ($\Rightarrow$): (demonstração por indução)

<u>Hipótese Indutiva</u>:

$(S,S) \Rightarrow^i (\alpha,\beta)$, então existem morfismos m_1 em $\mathsf{T}_1(\mathsf{M})$ e m_2 em $\mathsf{T}_2(\mathsf{M})$, tais que $\eta(\mathsf{M})(m_1)= m_2$.

<u>Caso Base</u> (i = 0):

Se $(S,S) \Rightarrow^0 (\alpha,\beta)$ então $\alpha = \beta = S$. Como $T_1(M)$ são arestas de uma categoria, então $m_1 = m_2 = id_S$. Assim $\eta(M)(m_1) = m_2$ por construção.

<u>Passo Indutivo</u> (se vale para $j < i \Rightarrow$ vale para i):

$(S,S) \Rightarrow^i (\alpha,\beta)$, então $(S,S) \Rightarrow^j (\alpha_1 A \alpha_2, \beta_1 A \beta_2) \Rightarrow (\alpha_1 \gamma \alpha_2, \beta_1 \gamma' \beta_2)$. Onde $j < i$, $\alpha = \alpha_1 \gamma \alpha_2$ e $\beta = \beta_1 \gamma' \beta_2$.

Logo:

$\exists$ f_1: $\alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow S$, f_2: $\beta_1 A \beta_2 \rightarrow S$ tq $\eta(M)(f_1) = f_2$, por hipótese de indução.

$\exists$ r_1: $\gamma \rightarrow A$, r_2: $\gamma' \rightarrow A$ tq $\eta(M)(r_1) = r_2$, por construção de $\eta(M)$.

Logo existem $m_1: \alpha \rightarrow S$, e $m_2: \beta \rightarrow S$ tq $\eta(M)(m_1) = m_2$, A figura A.10 exibe a construção de m_1 na categoria com objetos $T_1(*)$ e morfismos $T_1(M)$, $\eta(M)$ leva a um diagrama homormófico na categoria com objetos $T_2(*)$ e morfismos $T_2(M)$, onde é construído m_2.

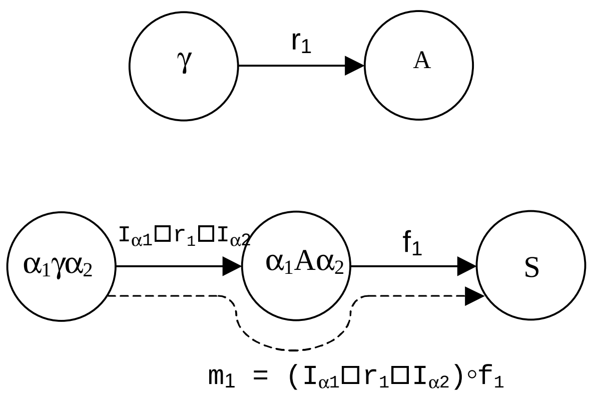

Figura A.10 Construção do morfismo m_1 do passo indutivo.

Volta ($\Leftarrow$): (demonstração por indução na estrutura de m_1 e m_2)

<u>Hipótese Indutiva</u>:

Se existem morfismos m_1 em $T_1(M)$ e m_2 em $T_2(M)$, tais que $\eta(M)(m_1) = m_2$ então $(S,S) \Rightarrow^* (\alpha,\beta)$

<u>Caso Base</u>:

- $m_1 = m_2 = I_A$. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^0 (A,A)$.
- $m_1 = m_2 : B_1 \ldots B_n \to A$. Onde $A \to B_1 \ldots B_n, Bp_1 \ldots Bp_n$ é uma regra de T. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^1 (B_1 \ldots B_n, Bp_1 \ldots Bp_n)$.
- $m_1 = 1 \to A$ e $m_2 = 1 \to A$, $\phi_1(m) = b_1$ e $\phi_2(n) = b_2$. Onde $A \to b_1, b_2$ é uma regra de T. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^1 (b_1, b_2)$.

Passo Indutivo:

- Se m_1 é uma composição de arestas (para as quais vale a hipótese indutiva) e $m_2 = \eta(M)(m_1)$ então m_2 também é uma composição, pois $\eta(M)$ é um funtor. Neste caso $m_1 : \alpha \to S = m_1' : \alpha \to \alpha' \circ m_1'' : \alpha' \to S$, e $m_2 : \beta \to S = m_2' : \beta \to \beta' \circ m_2'' : \beta' \to S$. Portanto $(S,S) \Rightarrow^* (\alpha', \beta') \Rightarrow^* (\alpha, \beta)$.
- Se m_1 é um produto de arestas e $m_2 = \eta(M)(m_1)$ então m_2 também é um produto, pois $\tau_T(M)$ preserva produtos. Neste caso $m_1 : \alpha \square \alpha' \to \alpha_1 \square \alpha_1' = m_1' : \alpha \to \alpha_1 \square m_1'' : \alpha' \to \alpha_1'$, e $m_2 : \beta \square \beta' \to \beta_1 \square \beta_1' = m_2' : \beta \to \beta_1 \square m_2'' : \beta' \to \beta_1'$. Portanto $(\alpha_1, \beta_1) \Rightarrow^* (\alpha, \beta)$ e $(\alpha_1', \beta_1') \Rightarrow^* (\alpha', \beta')$ logo $(\alpha_1 \alpha_1', \beta_1 \beta_1') \Rightarrow^* (\alpha\alpha', \beta\beta')$.

CQD

b) Reciprocamente, dado um morfismo $\tau_T : L_T\mathbf{G_1} \to L_T\mathbf{G_2}$ de $\mathbf{Cat}_T^\Sigma$, existe um ETDS T, tal que $trad(\tau_T) = trad(T)$.

1) Considere $\tau_T = \eta$. Iniciamos construindo as gramáticas livre de contexto $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S_1)$ e $G_2 = (N_2, \Sigma, P_2, S_2)$ respectivamente equivalentes a $\mathbf{G_1}$ e $\mathbf{G_2}$ de acordo com o teorema 3.28.

2) De acordo com os Lemas 3 e 4, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tau_\square(*)$ é bijetiva e que $\eta(*)$ é a identidade. Podemos então construir o ETDS simples $T = (N_1, \Sigma, \Sigma, R, S_1)$, de tal forma que:

- Se $A \rightarrow B_1 \ldots B_n \in P_1$ e $\eta(\mathsf{M})(m_1{:}B_1 \ldots B_n \rightarrow A) = m_2{:}Bp_1 \ldots Bp_n \rightarrow A$, então $A \rightarrow B_1 \ldots B_n$, $Bp_1 \ldots Bp_n$ é uma regra de R.
- Se $m_1{:}A \rightarrow 1 \in P_1$ e $\eta(\mathsf{M})(m_1) = m_2{:}A \rightarrow 1$, onde $\phi_1(m_1) = b_1$ e $\phi_2(m_2) = b_2$, então $A \rightarrow b_1$, b_2 é uma regra de R.

3) No que segue, consideremos $L_{\square}\mathbf{G_1} = (\mathsf{F}_1,\Sigma,\phi_1)$, $L_T\mathbf{G_1} = (\mathsf{T}_1,\Sigma,\phi_1)$ e $L_T\mathbf{G_2} = (\mathsf{T}_2,\Sigma,\phi_2)$. Vamos provar que existem morfismos m_1 em $\mathsf{F}_1(\mathsf{M})$ e m_2 em $\mathsf{T}_2(\mathsf{M})$, tais que $\eta(\mathsf{M})(m_1) = m_2$ se e somente se $(S,S) \Rightarrow^*_T (\alpha,\beta)$. Conseqüentemente $\mathtt{trad}(T) = \mathtt{trad}(\tau_T)$. Conseqüentemente $\mathtt{trad}(\tau_T) = \mathtt{trad}(T)$. Pela definição 6.17 devemos provar esta condição exatamente para os morfismos m_1 em $\mathsf{F}_1(\mathsf{M})$.

Ida ($\Rightarrow$):(demonstração por indução na estrutura de m_1 e m_2)

<u>Hipótese Indutiva</u>:

Se existem morfismos m_1 em $\mathsf{T}_1(\mathsf{M})$ e m_2 em $\mathsf{T}_2(\mathsf{M})$, tais que $\eta(\mathsf{M})(m_1) = m_2$ então $(S,S) \Rightarrow^* (\alpha,\beta)$

<u>Caso Base</u>:

- $m_1 = m_2 = I_A$. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^0 (A,A)$.
- $m_1{:}B_1 \ldots B_n \rightarrow A$ e $m_2{:}Bp_1 \ldots Bp_n \rightarrow A$. Neste caso $A \rightarrow B_1 \ldots B_n$ é uma regra de G_1, portanto $A \rightarrow B_1 \ldots B_n$, $Bp_1 \ldots Bp_n$ é uma regra de T. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^1 (B_1 \ldots B_n, Bp_1 \ldots Bp_n)$.
- $m_1 = 1 \rightarrow A$ e $m_2 = 1 \rightarrow \eta(*)(A)$, $\phi_1(m) = b_1$ e $\phi_2(n) = b_2$. Neste caso $A \rightarrow b_1$ é uma regra de G_1 e $A \rightarrow b_2$ é uma regra de G_3, portanto $A \rightarrow b_1$, b_2 é uma regra de T. Neste caso $(A,A) \Rightarrow^1 (b_1, b_2)$.

<u>Passo Indutivo</u>:

- Se m_1 é uma composição de arestas que satisfazem a hipótese indutiva e $m_2=\eta(M)(m_1)$ então m_2 também é uma composição, pois $\tau_T(M)$ é a componente morfismo de um funtor. Neste caso $m_1: \alpha\rightarrow S =\ m_1': \alpha\rightarrow\alpha' \circ m_1'': \alpha'\rightarrow S$, e $m_2: \beta\rightarrow S =\ m_2': \beta\rightarrow\beta' \circ m_2'': \beta'\rightarrow S$. Portanto $(S,S) \Rightarrow^* (\alpha',\beta') \Rightarrow^* (\alpha,\beta)$.
- Se m_1 é um produto de arestas que satisfazem a hipótese indutiva e $m_2=\tau_T(M)(m_1)$ então m_2 também é um produto, pois $\tau_T(M)$ preserva produtos. Neste caso m_1: $\alpha\square\alpha'\rightarrow\alpha_1\square\alpha_1' =\ m_1': \alpha\rightarrow\alpha_1 \square m_1'': \alpha'\rightarrow\alpha_1'$, e m_2: $\beta\square\beta'\rightarrow\beta_1\square\beta_1' =\ m_2': \beta\rightarrow\beta_1 \square m_2'': \beta'\rightarrow\beta_1'$. Portanto $(\alpha_1, \beta_1) \Rightarrow^* (\alpha, \beta)$ e $(\alpha_1', \beta_1') \Rightarrow^* (\alpha', \beta')$ logo $(\alpha_1\alpha_1', \beta_1\beta_1') \Rightarrow^* (\alpha\alpha', \beta\beta')$.

Volta ($\Leftarrow$): (demonstração por indução)

Hipótese Indutiva:

$(S,S) \Rightarrow^j (\alpha,\beta)$, então existem morfismos m_1 em $T_1(M)$ e m_2 em $T_2(M)$, tais que $\eta(M)(m_1)= m_2$.

Caso Base ($i = 0$):

Se $(S,S) \Rightarrow^0 (\alpha,\beta)$ então $\alpha = \beta = S$. Como $T_1(M)$ são arestas de uma categoria, então $m_1 = m_2 = id_S$. Assim $\eta(M)(m_1)= m_2$ por construção.

Passo Indutivo (se vale para $j < i \Rightarrow$ vale para i):

$(S,S) \Rightarrow^i (\alpha,\beta)$, então $(S,S) \Rightarrow^j (\alpha_1 A\alpha_2, \beta_1 A\beta_2) \Rightarrow (\alpha_1\gamma\alpha_2,\beta_1\gamma'\beta_2)$. Onde $j < i$, $\alpha = \alpha_1\gamma\alpha_2$ e $\beta = \beta_1\gamma'\beta_2$.

Logo:

$\exists\, f_1: \alpha_1 A\alpha_2 \rightarrow S$, $f_2: \beta_1 A\beta_2 \rightarrow S$ tq $\eta(M)(f_1)= f_2$, por hipótese de indução.

$\exists\, r_1: \gamma \rightarrow A$, $r_2: \gamma' \rightarrow A$ tq $\eta(M)(r_1)= r_2$, por construção de $\eta(M)$.

Logo existem m_1:$\alpha \to S$, e m_2:$\beta \to S$ tq $\eta(M)(m_1) = m_2$, A figura A.11 exibe a construção de m_1 na categoria com objetos $T_1(*)$ e morfismos $T_1(M)$, $\tau_T(M)$ leva a um diagrama homormófico na categoria com objetos $T_2(*)$ e morfismos $T_2(M)$, onde é construído m_2.

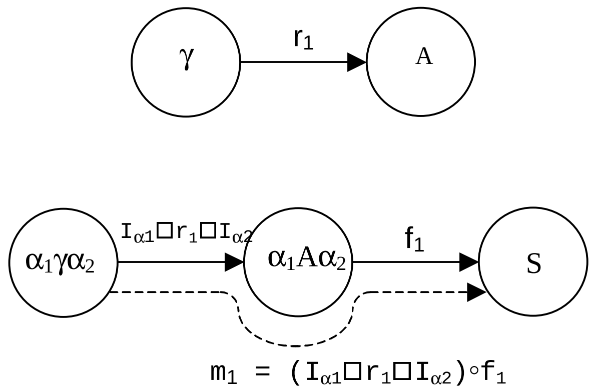

Figura A.11 Construção do morfismo m_1 do passo indutivo.

CQD

A.7. Adjunção entre $\mathbf{Cat}_T^\Sigma$ e $\mathbf{Cat}_+^\Sigma$

Definição 6.25. $\mathbf{U}_{+/T}$: $\mathbf{Cat}_+^\Sigma \to \mathbf{Cat}_T^\Sigma$ é um funtor definido como:

- A componente-objeto de $U_{+/T}$ leva uma floresta de DAGs (D, Σ, ϕ_D, $\mathbf{C_1}$) a uma floresta de árvores não-ordenadas (T, Σ, ϕ_T, $\mathbf{C_2}$) tal que:
    - T = D. Observe que, pela definição, uma floresta de DAGs é uma floresta de árvores não ordenadas, basta tomar a soma como o produto □ e $\langle i_b, i_a \rangle$ como $s_{a,b}$.
    - $\phi_T = \phi_D$.
- A componente-morfismo de $U_{+/T}$ leva um morfismo η_+ de $\mathbf{Cat}_+^\Sigma$ em um morfismo η_T em $\mathbf{Cat}_T^\Sigma$ tal que:
    - $\eta_T = \eta_+$. Tomando a soma como o produto □ e $\langle i_b, i_a \rangle$ como $s_{a,b}$, um funtor que preserve a soma preservará também □ e $s_{a,b}$.

Teorema 6.26. $U_{+/T}$ tem um adjunto à esquerda, $L_{+/T}$: $\mathbf{Cat}_T^{\Sigma} \to \mathbf{Cat}_+^{\Sigma}$, tal que:

- A componente-objeto de $L_{+/T}$ leva uma floresta de árvores não-ordenadas (T, Σ, ϕ_T, **C**) à floresta de DAGs (D ,Σ, ϕ_D, **C'**) tal que:
  - D(S) = T(S), portanto D(T) = T(T) e D(*) = T(*).
  - D(M) = Morf(C'). Onde **C'** é a menor categoria tal que Obj(**C'**) = Obj(**C**), Morf(**C'**) $\supseteq$ Morf(**C**), e que possui uma soma que é uma extensão do produto $\square$ em **C** e tal que $s_{a,b} = \langle i_b, i_a \rangle$.
  - Para m_1, $m_2 \in$ T(M), D(codom)(m_1) = T(codom)(m_1) e D(dom)(m_1) = T(dom)(m_1) e $m_1+m_2 = m_1 \square m_2$.
  - $\phi_D = \phi_T$.
- A componente-morfismo de $L_{+/T}$ leva um morfismo η_T de $\mathbf{Cat}_T^{\Sigma}$ em um morfismo η_+ em $\mathbf{Cat}_+^{\Sigma}$ tal que:
  - $\eta_{+T} = \eta_{T_T}$, $\eta_{+*} = \eta_{T*}$.

η_{+M} estende η_{T_M} preservando a soma.

Demonstração.

1) Apresentaremos a unidade da adjunção. Seja $\eta_{+/T}:1 \xrightarrow{\bullet} U_{+/T}L_{+/T}$ a transformação natural definida no ponto $\mathbf{T_1} \in$ Obj($\mathbf{Cat}_T^{\Sigma}$) como o morfismo $\eta_{+/T\mathbf{T_1}} = \eta_\eta$ em $\mathbf{Cat}_T^{\Sigma}$ tal que:
   - η_η(T) é a identidade.
   - η_η(*) é a identidade.
   - η_η(M) é a inclusão.
2) $\forall\phi:\mathbf{T_1} \to U_{+/T}\mathbf{D_2}$, construímos $\alpha:L_{+/T}\mathbf{T_1} \to \mathbf{D_2}$ da seguinte forma:
   - α(T) = ϕ(T).

- $\alpha(*) = \phi\,(*)$.
- $\alpha(\mathsf{M})$ é tal que:
  - $\alpha(\mathsf{M})(m) = \phi(\mathsf{M})(m)$ se $m \in \mathsf{F}(\mathsf{M})$.
  - $\alpha(\mathsf{M})$ preserva a soma.

3) O diagrama da figura A.12 comuta por construção de α.

4) Provaremos que α é único por casos. Suponha que exista um morfismo β de $\mathbf{Cat}_{+}^{\Sigma}$, $\beta \neq \alpha$, tal que o diagrama acima comute. Então β não satisfaz a uma das condições da definição de α:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T_1} \arrow[r, "\eta_{+/T}\mathbf{T_1}"] \arrow[dr, "\phi"'] & U_{+/T}L_{+/T}\mathbf{T_1} \arrow[d, "U_{+/T}\alpha"] & L_{+/T}\mathbf{T_1} \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\
& U_{+/T}\mathbf{D_2} & \mathbf{D_2}
\end{tikzcd}$$

Figura A.12 Diagrama da adjunção $(\eta_{+/T}, L_{+/T}, U_{+/T})$.

4a) $\beta\,(\mathsf{T}) \neq \phi(\mathsf{T})$.

Neste caso, $\eta_{\eta}(\mathsf{T}) \circ U_{+/T}\beta(\mathsf{T}) \neq \phi(\mathsf{T})$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4b) $\beta\,(*) \neq \phi(*)$.

Neste caso, $\eta_{\eta}(*) \circ U_{+/T}\beta(*) \neq \phi(*)$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4c) Para algum $m \in \mathsf{F}(\mathsf{M})$, $\beta(\mathsf{M})(m) \neq \phi(\mathsf{M})(m)$.

Neste caso, $\eta_{\eta}(\mathsf{M}) \circ U_{+/T}\beta(\mathsf{M}) \neq \phi(\mathsf{M})$, o que contradiz a hipótese do diagrama comutar.

4d) $\beta(\mathsf{M})$ não preserva a soma.

Este caso contradiz a hipótese de β ser um morfismo de $\mathbf{Cat}_{+}^{\Sigma}$. CQD

Referências Bibliográficas

[Abu-Hamdeh et. al., 1994] Abu-Hamdeh, R., Cordy, J. e Martin, P. (1994). “Schema Translation Using Structural Transformation.” Proceedings of IBM 1994 Centre for Advanced Studies Conference, pp. 202-215. Toronto, Canada.

[Aho e Ullman, 1972] Aho, A. e Ullman, J. (1972). “The Theory of Parsing, Translation and Compiling – Volume I: Parsing”. Prentice-Hall.

[Aho e Ullman, 1972b] Aho, A. e Ullman, J. (1972). “The Theory of Parsing, Translation and Compiling – Volume II: Compiling”. Prentice-Hall.

[Angus e Stolzy, 1991] Angus, I. e Stolzy, J. (1991). “Experiences Converting an Application from Fortran to C++: Beyond f2c”. C++ at Work Conference.

[Arbib e Manes, 1974] Arbib, M. e Manes, E. (1975) “Arrows, Structures and Functors: The Categorical Imperative.”. Academic Press.

[Baliga e Schende, 1994] Baliga, G. e Schende, A. (1994). “Programming Languages Constructs and Program Size.” Proceedings of 1994 International Conference on Computing and Information, pp. 327-332.

[Barr e Wells 1995] Barr, M. e Wells, C. (1995). “Category Theory for Computing Science.” Prentice-Hall.

[Beder et. al, 1997] Beder, D., Buzato, L., e Rubira, C. (1997). “Exceções e a construção de programas cofiáveis.” Anais do II Simpósio Brasileiro de Linguagens de Programação, pp. 231-244. Campinas, Brasil.

[Boyle, 1989] Boyle, J. (1989). “Abstract Programming and Program Transformations”. Software Reusability, 1, 1989. ACM Press.

[Carvalho, 1996] Carvalho, S. (1996). “The DDL Programming Language”. Relatório Técnico, Departamento de Informática, PUC-Rio.

[Carvalho et al., 1997] Carvalho, S., Fiadeiro, J. e Haeusler, E. (1997). “A Formal Approach to Real-Time Object Oriented Software”. Anais do Twenty Second IFAC/IFIP Workshop on Real Time Programming. Lyon, França.

[CCITT, 1997] CCITT SG XI (1997). “Proposal for a Recommendation for a CCITT High Level Programming Language”.

[Cordy et al., 1991] Cordy, J. et al. (1991). “TXL: A Rapid Prototyping System for Programming Language Dialects.” Computer Languages, 16:1, pp. 97-107.

[Cordy e Carmichael, 1993] Cordy, J. e Carmichael, I. (1993). “The TXL Programming Language Syntax and Informal Semantics, Version 7”. Relatório técnico, Queen’s University. Kingston, Canada.

[Cordy e Shukla, 1992] Cordy, J. e Shukla, M. (1992). “Practical Metaprogramming”. Proceedings of IBM 1992 Centre for Advanced Studies Conference, pp. 202-215. Toronto, Canada.

[Cortés et al., 1999] Cortés, M., Garcia, A., Oliveira, A. e Carvalho, S. (1999). “Especificação Formal do Tratamento de Exceções na Linguagem DDL”. Anais do III Simpósio Brasileiro de Linguagens de Programação, Porto Alegre, pp. 61-76.

[Dahl et. al., 1972] Dhal, O., Dijkstra, E., Hoare, C. (1972). “Structured Programming”. Academic Press.

[Felix e Haeusler, 1999] Felix, M. e Haeusler, E. (1999). “LET: Uma Linguagem para Especificar Transformações”. Anais do III Simpósio Brasileiro de Linguagens de Programação, pp. 109-124. Porto Alegre, Brasil.

[FOR_C, 1999] FOR_C (1999). “FOR_C: Fortran to C translator”. Cobalt Blue Incorporated, Alpharetta, Estados Unidos.

[Garcia e Haeusler, 1997] Garcia, A. e Haeusler, E. (1997). “Towards a Categorical Model for Language Translation”. Anais do II Simpósio Brasileiro de Linguagens de Programação, pp. 193-203. Campinas, Brasil.

[Garcia e Haeusler, 2000] Garcia, A. e Haeusler, E. (2000). “Um Modelo Categórico para Traduções entre Linguagens de Programação”. Anais do IV Simpósio Brasileiro de Linguagens de Programação. Recife, Brasil.

[Garcia et al., 1997] Garcia, A., Haeusler, E. e Haeberer, A. (1997). “A Semantic Approach to the Solution of the Legacy Code Problem”. Anais do Formal Methods Pacific, Wellington, Nova Zelândia.

[Garcia et al., 1997a] Garcia, A., Haeusler, E. e Haeberer, A. (1997). “A Semantic Approach to the Solution of the Legacy Code Problem”. Relatório Técnico, Departamento de Informática, PUC-Rio.

[Garcia et al., 1997b] Garcia, A., Haeusler, E. e Haeberer, A. (1997). “An Architecture for Semantically Based Code Migration”. Anais do II Simpósio Brasileiro de Linguagens de Programação, pp. 179-192. Campinas, Brasil.

[Garcia e Guedes, 1999] Garcia, A. e Guedes, L. (1999). “Translating Programs from Chill to C++ Preserving Efficiency and Maintainability”. Anais do III Simpósio Brasileiro de Linguagens de Programação, pp. 219-224. Porto Alegre, Brasil.

[Ghezzi et. al., 1991] Ghezzi, C., Jazayeri, M., Mandrioli, D. (1991). “Fundamentals of Software Engineering.” Prentice Hall.

[Guedes e Staa, 1993] Guedes, L. e Staa, A. (1993). “Um processo de reengenharia econômico e eficaz”. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Engenharia de Software.

[Haeberer et. al., 1993] Haeberer, A., Haeusler, E., e Coelho, O. “A Denotatio-Transformational Approach to the Solution of the Legacy Code Problem.” Notas Pessoais, 1993.

[Halstead, 1977] Halstead, M. (1977). “Elements of Sofware Science.”. North-Holland.

[Hamer e Frewin, 1982] Hamer, P. e Frewin, G. (1982). “M. H. Halstead's software science – a critical examination.” Proceedings of the 6th International Conference on Software Engineering, pp. 197-205. Tokio, Japão.

[Hopcroft e Ullman, 1969] Hopcroft, J., e Ullman, J. (1969). “Formal Languages and their Relation to Automata.” Addison-Wesley.

[Lauer & Wallwitz, 1989] Lauer & Wallwitz (1989). QuickStep P2C Pascal to C Translator. Lauer & Wallwitz, Wiesbaden, Alemanha.

[Leite et al., 1994] Leite, J., Sant’Anna, M. e Freitas, F. (1994). “A Technology Assembly for Domain Oriented Sofware Development”. Proceedings of the third International Workshop on Software Reuse. IEEE Computer Society Press.

[Levy, 1995] Levy, G. (1995). “Improving the Output of the Fortran to C Translator, f2c”. Software Practice and Experience, 25:2.

[Mac Lane, 1971] Mac Lane, S. (1971). “Categories for the Working Mathematician”. Springer-Verlag.

[Martins et al., 1997] Martins, C., Silva G., Amaral, F., Rabelo, P. (1997). “Tradução de Estruturas de Controle para Sistemas de Tempo Real em Linguagens Orientadas a Objetos”. Monografia do Departamento de Computação da UFF.

[Menezes, 1997] Menezes, P. (1997). “Linguagens Formais e Autômatos”. Sagra Luzzato, Porto Alegre, Brasil.

[REFINE, 1992] REFINE (1992). “REFINE User’s Guide”. Reasoning Systems Incorporated, Palo Alto, Estados Unidos.

[Schmidt ,1986] Schmidt, D. (1986). “Denotational Semantics – a methodology for language development”. Allyn & Bacon, Newton. Massachussets, Estados Unidos.

[Stoy, 1977] Stoy, J. (1977). “Denotational Semantics: The Scott-Strachey approach to programming language theory”. MIT Press.

[Veloso, 1987] Veloso, P. (1987). “Estruturação e verificação de programas com tipos de dados.” Ed. Blucher.

[Walters, 1989] Walters, R. (1989). “A Note on Context-Free Languages”. Journal of Pure and Applied Algebra, 62, pp.199-203. North-Holland.

[Walters, 1991] Walters, R. (1991). “Categories and Computer Science.” Cambridge University Press.

[Wells e Barr, 1988] Wells, C. e Barr, M. (1988). “The formal description of data types using sketches.” Lecture Notes in Computer Science, 298. Springer-Verlag.