María Claudia Meré

Lógicas Relevantes: formalismo e semântica

Tese de Doutorado

Departamento de Informática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, Novembro de 1993

María Claudia Meré

Lógicas Relevantes: formalismo e semântica

Tese apresentada ao Departamento de Informática da PUC-Rio como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Informática: Teoria da Computação

Orientador: Paulo Augusto Silva Veloso
Co-orientador: Valéria C. V. de Paiva

Departamento de Informática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, Novembro de 1993

A minha família

Meus agradecimentos

- a Paulo A. S. Veloso pela excelente orientação, pela paciência e dedicação durante estes anos e principalmente pela sua amizade.
- a Luiz Carlos Pereira a quem sou grata por me introduzir no mundo da Teoria da Prova, mas principalmente por seu constante apoio, incentivo, cooperação e amizade.
- a Valéria de Paiva por me sugerir as idéias que originaram esta tese e fazer realidade minha visita a Cambridge da qual surgiram as primeiras versões da tese. E aos integrantes do grupo CLICS pela cordial acolhida durante minha visita ao Computer Laboratory.
- a Daniel Mazzuca por estar sempre perto de mim, apesar de distâncias.
- a meus pais pelo constante apoio e incentivo.
- a Carlos José Pereira de Lucena e Armando Martín Haeberer que permitiram minha vinda ao Rio, e a todo o pessoal do Departamento de Informática por ter facilitado a execução deste trabalho.
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), pela ajuda financeira recebida durante o curso.

Resumo

Esta tese procura estabelecer uma metodologia de trabalho em Lógica Categórica, que permita descrever lógicas através do uso de categorias e álgebras. É apresentada, entre outras lógicas, a família das lógicas relevantes, usadas atualmente para estudar aspectos de computação. Esta família é discutida usando os conceitos da Lógica Categórica. Para cada lógica apresentamos os sistemas sintáticos e discutimos as semânticas (algébricas e categóricas). Finalmente, generalizando os conceitos usados ao longo da modelagem das lógicas tratadas, construímos definições formais de modelos categóricos e algébricos. Estas definições servem como guia na realização de novos intentos de formalização categórica e algébrica de lógicas.

Abstract

The main purpose of this thesis is to present a methodology of work in Categorical Logic that allows us to write logics in terms of categories and algebras. We present, among other logics, the family of relevant logics, which have been using to study computational aspects. This family is showed from the point of view of Categorical Logic. For each logic we present the syntactic systems and discuss their semantics (algebraic and categorical). Finally, we construct formal definitions for categorical and algebraic models. These definitions represent a guide for the construction of new categorical and algebraic models.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas a Teoria da Computação tem contribuído para que a Teoria da Prova da lógica matemática deixe de ser um estudo filosófico das fundamentações do raciocínio humano e se torne um ramo da matemática aplicada. Muitos sistemas lógicos que surgiram na década de 70 e que têm-se mostrado de grande relevância para a computação teórica, foram pensados por autores que estavam interessados em problemas construtivos e de fundamentação matemática. Por exemplo, Takeuti em seu livro sobre Teoria da Prova ([Tak75]) introduziu a formalização das provas da matemática e a pesquisa na estrutura dessas provas, como um método para estudar matemática. Ele ainda observa, nas primeiras páginas de seu livro, que enquanto a Teoria de Conjuntos tem contribuído no desenvolvimento da matemática moderna, ainda falta ver qual será a influência que a Teoria da Prova terá na matemática. Nos dias de hoje a Teoria da Prova tem mostrado sua influência na Teoria da Computação e, por outro lado, a Teoria da Computação tem sido para a lógica matemática uma fonte de enriquecimento e estímulo. Esta interrelação deve-se principalmente a que tanto a computação quanto a Teoria da Prova focalizam seu interesse na análise de processos simbólicos. Neste sentido, esta tese tenta fechar um triângulo, estudando **eixos ausentes**, entre algumas lógicas estudadas na literatura dos anos 60, a Teoria da Prova e a Teoria de Categorias, fornecendo subsídios para trabalhos interessados em formalizar aspectos da computação.

1.1 Lógica Categórica

A Teoria de Categorias é um ramo da Matemática, relativamente recente (já que data de meados dos anos 40) que se dedica a estudar as estruturas fundamentais presentes em todos os ramos da matemática. Ela é uma alternativa à Teoria de Conjuntos com uma ênfase diferente: enquanto a Teoria de Conjuntos baseia-se na noção primitiva de *pertinência*, na teoria de Categorias a noção primitiva é a de *morfismo* ou “função” entre objetos. A Teoria de Categorias provê construções mais abstratas, as quais evidenciam similaridades estruturais que poderiam ficar ocultas quando estudadas com outras ferramentas formais, permitindo descobrir estruturas comuns a ramos diferentes que pareceriam não ter, à primeira vista, nenhuma relação. Surge assim uma teoria bastante elegante que também tem várias aplicações em ciência da computação.

Uma das primeiras aplicações vem do trabalho conjunto de Dana Scott e de C. Strachey em Oxford no final da década de 60 quando tentavam produzir modelos matemáticos para linguagens de programação. Este trabalho, no qual a Teoria de Categorias serviu de ajuda para estabelecer modelos corretos das linguagens, gerou novas linhas de pesquisa, conhecidas como **Semântica Denotacional ou Teoria de Domínios** [HS80].

Outra aplicação da Teoria de Categorias em ciência da computação refere-se ao desenvolvimento de uma teoria (*instituições*) de **Tipos Abstratos de Dados e especificações formais** de uma maneira geral. Nesta área são muito importantes os trabalhos do chamado grupo ADJ nos Estados Unidos. Uma ampla bibliografia existe a respeito, como por exemplo [Eri82, FM92, UG90].

Uma área mais recente onde está sendo aplicada a Teoria de Categorias é a **modelagem de sistemas concorrentes e interativos**. Neste aspecto estão sendo desenvolvidas várias tentativas no sentido de relacionar os modelos existentes, como Redes de Petri, Sistemas de Transição, Estruturas de Eventos, etc., onde a Teoria de Categorias é a ferramenta básica que permite explicitar as características de cada gênero de sistema independentemente de um particular formalismo. Cabe mencionar o recente trabalho de [BG90].

Antes de entrar na área de interesse, é importante deixar claro que esta lista de aplicações não esgota as possibilidades que a Teoria de Categorias dá à computação teórica; por exemplo o surgimento da chamada **Categorial Grammar** de J. Lambek na década de 60 deu um novo rumo para os chamados linguistas computacionais, trabalho documentado em [Lam58, Lam61].

Outra das aplicações da Teoria de Categorias é a Lógica Categórica, que relaciona categorias com lógicas. A análise categórica de lógicas tem a virtude de que resultados obtidos para uma lógica podem ser facilmente passados para outra lógica similar e que a Teoria da Prova da lógica pode ser enriquecida com a informação decorrente da análise categórica.

A idéia básica da **Lógica Categórica** é estender o isomorfismo ou correspondência Curry-Howard [How80] ao nível das categorias. A correspondência de Curry-Howard transforma fórmulas lógicas em tipos de um λ-cálculo tipado e demonstrações na Dedução Natural da lógica em um termo do λ-cálculo. Isto é, o percurso de uma demonstração da fórmula A a partir de certas hipóteses $A_1, \ldots, A_n$ é codificado num termo de tipo A que tem variáveis livres dos tipos $A_1, \ldots, A_n$. Também demonstrações que se reduzem na Dedução Natural correspondem a termos que se reduzem no λ-cálculo, espelhando-se desta maneira os processos de normalização.

A Lógica Categórica transforma fórmulas lógicas em objetos de uma categoria e demonstrações em morfismos. Neste caso, o percurso ("trace") de uma demonstração está codificado num morfismo que vai do objeto que representa às hipóteses ao objeto que representa a fórmula atingida. Da mesma maneira que no caso do isomorfismo Curry-Howard, queremos também espelhar, através da linguagem categórica, o processo de normalização. Isto significa que devemos garantir que demonstrações que se reduzem devem corresponder ao mesmo morfismo na categoria.

Desta forma, torna-se possível movimentar-se entre estes três formalismos, lógica, λ-cálculo e categorias, tirando vantagens e conhecimento de cada um deles, conhecimento este que poderia ajudar, por exemplo, na construção de provadores automáticos de teoremas. O exemplo mais destacado desta correspondência é o existente entre a Lógica Intuicionista, o λK-cálculo e as categorias cartesianas fechadas com coproduto, que é amplamente apresentado no livro de Lambek e Scott ([LS86]).

A análise categórica de lógicas encontrava-se, até este momento, basicamente restrita ao estudo de casos particulares como a análise feita para a Lógica Intuicionista, a Lógica Linear e o Cálculo de Lambek.

1.2 Objetivos da Tese

O objetivo principal desta tese é fornecer subsídios para uma metodologia de trabalho em Lógica Categórica, que permita descrever lógicas através do uso de categorias e álgebras. Procura-se construir definições formais de modelos categóricos e algébricos que possam servir como guia na realização de novas tentativas de formalização categórica e algébrica de lógicas.

Na área de Teoria da Computação da PUC-Rio, esta linha de pesquisa ainda não foi estudada intensamente. Esta tese originou-se de pesquisas e discussões de trabalho realizadas em conjunto com professores dos Departamentos de Informática e Filosofia da PUC-Rio e do Computer Laboratory da Universidade de Cambridge, UK.

O propósito mais geral do presente trabalho é cobrir os seguinte aspectos essenciais:

- estudar a família das lógicas relevantes e as lógicas a ela relacionada.
- situar estas lógicas num panorama adequado para seu tratamento sob perspectiva da lógica categórica.
- apresentar a teoria da prova de cada uma das lógicas e comparar os diversos sistemas lógicos entre si.
- apresentar, através de uma metodologia construtiva, modelos algébricos e categóricos de cada uma das lógicas.
- generalizar os conceitos usados ao longo da modelagem das lógicas, para obter definições claras de modelos categóricos e algébricos,
- apontar futuros caminhos para pesquisa em Lógica Categórica.

1.3 Lógicas Relevantes

O foco principal desta tese centra-se no estudo da família das lógicas relevantes. A ideia é situar estas lógicas num panorama adequado para seu tratamento sob perspectiva da lógica categórica.

As lógicas relevantes surgiram na década de 60 por questões puramente filosóficas, mas neste momento podem ser de interesse para a computação conforme mostram trabalhos recentes na área de programação funcional e de sistemas concorrentes ([BF92, Dam92, Dam88, DCGV92]). Algumas das lógicas relevantes estão fortemente relacionadas com as lógicas modais. Por esta razão este estudo abarca também algumas das lógicas modais de Lewis, as que já têm-se mostrado de grande utilidade para computação. Além disto, algumas outras lógicas sub-estruturais (por exemplo o Cálculo de Lambek) são também consideradas.

Com o surgimento da Lógica Linear, as lógicas relevantes passaram a ser muito mais interessantes. A Lógica Linear e a Lógica Intuicionista possuem uma análise categórica e uma teoria da prova bem desenvolvidas. Por esta razão é importante comparar as lógicas relevantes com elas e mostrar como as lógicas relevantes se encaixam dentro desse contexto.

A Lógica Proposicional Intuicionista, como foi originalmente apresentada por Gentzen, usando uma formulação de Cálculo de Sequentes, chamada de **LJ**, tem três regras estruturais, Contração, Atenuação e Permutação (cf. Apêndice A):

$$(C)\frac{\Gamma, A, A, \Gamma' \ \Rightarrow \ C}{\Gamma, A, \Gamma' \ \Rightarrow \ C} \qquad (A)\frac{\Gamma, \Gamma' \ \Rightarrow \ C}{\Gamma, A, \Gamma' \ \Rightarrow \ C} \qquad (P)\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \ \Rightarrow \ C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \ \Rightarrow \ C}$$

O efeito das regras acima pode ser obtido de diversas maneiras: por exemplo, Prawitz e Schütte usam no lugar dos axiomas de Gentzen $A \Rightarrow A$, os axiomas $\Gamma, A \Rightarrow A$ (onde Γ é um conjunto de fórmulas), o que torna redundante as regras acima. Já a Lógica Proposicional Clássica **LK** tem as mesmas três regras tanto no lado direito como no lado esquerdo do símbolo $\Rightarrow$ (cf. Apêndice A).

Dentre as lógicas relevantes tem destaque especial a *Lógica Linear* de J. Y. Girard [Gir87]. Esta lógica surgiu a meados dos anos 80 em semântica de coherencia, mas é uma ferramenta para entender melhor, no nível teórico, as noções de sequencialidade, paralelismo, efeitos colaterais e alocação de memória [Gir89]. Nela, tiram-se as duas regras de Contração e Atenuação de uma só vez. Esta é uma situação muito diferente daquela discutida acima: na Lógica Linear as duas regras estruturais não valem nem são derivadas. Isto tem duas consequencias imediatas:

- a falta das regras de Contração e Atenuação provoca o desmembramento da conjunção lógica em duas versões, uma multiplicativa ($\otimes$) e uma aditiva ($\&$), as quais, na presença dessas duas regras estruturais, são equivalentes.

- a implicação ($\multimap$) que se obtém como resultado da falta das regras estruturais mencionadas acima, comporta-se como uma implicação relevante. Como a regra de Atenuação não pode ser usada e o Teorema de Eliminação da regra do corte é válido, na derivação livre de corte de qualquer fórmula da forma $A \multimap B$, usando como hipóteses fórmulas em Γ, deve ocorrer o sequente $\Gamma, A \Rightarrow B$ e assim a hipótese A tem alguma classe de ligação com B.

Recentemente tem aparecido uma quantidade razoável de trabalhos estudando a hierarquia de lógicas que resulta ao excluir todas ou algumas das regras estruturais. As lógicas resultantes são conhecidas na literatura como *Lógicas Sub-estruturais*.

Em particular, as lógicas sem a regra de Contração são chamadas *Lógicas de Ocorrências*, já que a ausência desta regra significa que as ocorrências de uma mesma fórmula são diferentes. Nelas a complexidade de um sequente aumenta ao longo de uma prova.

As lógicas sem a regra de Atenuação são chamadas lógicas não-monotônicas, no sentido de que se uma fórmula C é obtida a partir de um contexto Γ de hipóteses, então não se pode dizer que a mesma fórmula C seja derivável de Γ, F, sendo F qualquer hipótese adicional. Isto também significa que no antecedente do sequente devem se colocar somente hipóteses que são necessárias (relevantes) para a derivação de uma fórmula. Estas lógicas são chamadas *Relevantes*.

O resultado de impedir o uso das regras de Contração e Atenuação não é absolutamente simétrico. Quando se impede o uso da regra de Atenuação está se proibindo também o uso de um caso muito especial: o caso que permite a introdução de uma "nova" ocorrência de uma fórmula que já era usada na derivação de uma conclusão. Assim, a derivação:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma, A, A \Rightarrow B}$$

é claramente válida em **LJ** mas não é válida em Lógica Linear. Além disto, esta derivação é válida em algumas das lógicas da familia relevante. A introdução de uma nova ocorrência de uma fórmula usada numa derivação é a operação "inversa" da contração de diferentes ocorrências de uma mesma fórmula. Assim, estas duas regras encontram-se mais intimamente ligadas do que poderia parecer à primeira vista.

Nesta tese tentaremos entender, apresentar e formalizar, categórica e algebricamente, a "selva das lógicas relevantes" ([AB75]), sem as preocupações filosóficas em que os chamados relevantistas tem caído durante anos. Isto é, apresenta-se a relação entre a família das lógicas relevantes o λ-cálculo e a Teoria de Categorias.

1.4 Organização da Tese

A tese está dividida em mais seis capítulos cujos conteúdos são apresentados a seguir.

No capítulo 2 são apresentadas as idéais básicas e conceitos gerais sobre Teoria da Prova e modelagem algébrica e categórica. Este capítulo é importante para assentar notação e conceitos que serão usados ao longo de toda a tese.

Os primeiros objetivos são tratados em três capítulos da tese: os capítulos 3, 4 e 5. Ao longo destes capítulos foi realizada uma análise exaustiva, num processo passo a passo, de várias lógicas.

Nos capítulos 3 e 4 centramos nossa atenção nas regras estruturais válidas na lógica e no capítulo 5 tratamos de modalidades. A idéia desenvolvida nesta etapa é partir da Lógica Linear Intuicionista, da qual conhecemos tanto a Teoria da Prova como modelos algébricos e categóricos, e estender este tipo de análise para lógicas que se encontram próximas a ela, i.e. analisar certas lógicas que resultam ser extensões ou restrições diretas da Lógica Linear.

O capítulo 3 destaca a Lógica Linear e a lógica relevante **R**. No capítulo 4 apresentam-se lógicas não comutativas e não associativas, onde se apresenta uma versão original não-associativa da Lógica Linear Intuicionista. E, finalmente, o capítulo 5 trata de lógicas modais e sua relação com lógicas relevantes, apresentando-se uma versão modal original da lógica relevante **R**.

A estrutura de cada um destes capítulos é a seguinte:

- cada uma das lógicas envolvidas é apresentada formalmente através de um sistema axiomático do gênero Hilbert, um cálculo de Sequentes e Dedução Natural;
- usando um isomorfismo Curry-Howard, obtemos um Cálculo de Termos correspondente a essa lógica;
- finalmente, mostramos modelos algébricos e, como uma generalização destes, propomos modelos categóricos.

Para a maioria das lógicas tratadas esse tipo de análise não se encontrava feita ou não existia na sua totalidade. Para obter o tratamento completo de todas as lógicas consideradas serão apresentados alguns sistemas sintáticos originais de elaboração própria, além de modelos categóricos.

Generalizando os conceitos usados ao longo da modelagem das lógicas tratadas nos capítulos anteriores, no capítulo 6 são propostas definições formais de modelos categóricos e algébricos. Estas definições são suficientemente gerais para cobrir os casos particulares apresentados e resultam adequadas para verificar a completude dos modelos categóricos tratados nos capítulos 3 a 5.

No capítulo 7 são tecidas considerações finais do trabalho de tese apresentado e são propostas algumas idéias que podem servir como tema de trabalhos futuros.

Serão usados certos conceitos básicos seguindo de perto, sempre que conveniente, a terminologia e notação de [Pra65, Tak75] para Teoria da Prova, [Bar85] para λ-cálculos e [ML71] para Teoria das Categorias, os quais podem ser consultados para maiores esclarecimentos.

Capítulo 2

Teoria da Prova e Modelagem Categórica e Algébrica

Em trabalhos recentes sobre Lógica Categórica (por exemplo em [BMdP92, BBdPH92]) é comum apresentar um determinado sistema lógico através de vários formalismos: uma formulação em Cálculo de Sequentes, uma formulação em Dedução Natural e uma apresentação axiomática do gênero Hilbert. Um sistema de Termos ou λ-cálculo pode ser obtido a partir da formulação em Cálculo de Sequentes ou de Dedução Natural usando a conhecida correspondência ou isomorfismo Curry-Howard. Em Lógica Categórica é de fundamental interesse estabelecer um modelo categórico para a Teoria da Prova de sistemas lógicos. Também um modelo algébrico pode ser obtido particularizando o modelo categórico a conjuntos parcialmente ordenados.

Cada um dos formalismos sintáticos e também as semânticas consideradas, com suas características próprias, proporcionam grande informação sobre o poder da lógica em questão. Esta informação é importante se estamos interessados em formalizar processos da computação usando lógica. Um exemplo disto é dado pelo Cálculo de Termos, que relaciona a lógica com programação funcional.

Nesta tese serão tratadas várias lógicas proposicionais, e tomamos como norma geral que elas devem ser apresentadas através de todos os formalismos sintáticos acima, e que devem ser estabelecidas semânticas algébricas e categóricas para elas. Este capítulo serve como uma introdução, o leitor familiarizado com estes conceitos pode considerar desnecessário lê-lo e preferir continuar com o capítulo seguinte. Por outro lado, este capítulo não tenta ser autocontido, mas estabelece notação e idéias importantes para o futuro desenvolvimento da tese.

2.1 Sistemas Sintáticos

Sistema Axiomático

Um **sistema axiomático** para uma lógica consiste de um conjunto de *(esquemas de) axiomas*, que definem o comportamento dos conectivos e de *regras de inferência* da forma

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$$

(onde $A_1, \dots, A_n, A$ são fórmulas). Estas regras permitem manipular os axiomas e, assim, construir derivações.

Num sistema axiomático, uma *derivação ou dedução* de uma fórmula A a partir de hipóteses Γ (Γ denota várias fórmulas), é uma sequência (ou uma árvore) finita ordenada de fórmulas, cada uma das quais é um membro de Γ ou é uma instância de um dos esquemas de axiomas ou é derivada das fórmulas precedentes através das regras de inferência e A é a última fórmula da sequência. $\Gamma \vdash_{Ax} A$ significa que existe uma derivação de A a partir de Γ no sistema axiomático Ax. $\vdash_{Ax} A$ significa que A é demonstrável no sistema Ax.

A estrutura interna das hipóteses Γ depende da lógica tratada (i.e, se Γ representa um conjunto, uma sequência, um multiset, etc. de fórmulas $A_1, \dots, A_n$). Se a lógica possue um conectivo implicacional, a estrutura das hipóteses colabora para garantir o Teorema da Dedução: $A_1, \dots, A_n, A \vdash B$ então $A_1, \dots, A_n \vdash A \to B$, onde $\to$ é o conectivo da implicação da lógica em questão.

Dedução Natural

Dada uma linguagem proposicional L (com variáveis proposicionais e constantes lógicas), um sistema de **Dedução Natural** é uma formalização que estabelece o comportamento dos conectivos da lógica em questão através de regras de inferência que introduzem cada um dos conectivos e também como, a partir deles, obter conclusões.

As regras de inferência apresentam a conclusão como dependendo de certas hipóteses. Em alguns casos a conclusão depende das hipóteses das quais dependem as premisas; mas, algumas regras *descarregam* algumas hipóteses, isto é, a conclusão não depende mais da hipótese descarregada. Aquelas fórmulas não descarregadas ao término da derivação são as hipóteses das quais depende a conclusão final.

É muito importante, num sistema de Dedução Natural, que ao longo da derivação seja mantida informação sobre de que hipóteses cada fórmula depende. Há várias maneiras de fazer isto. Uma forma bastante familiar é pensar numa derivação como uma sequência finita ordenada de fórmulas, cada uma das quais é introduzida como hipótese ou segue-se pela aplicação de uma regra a fórmulas que a precedem; além disto as hipóteses são numeradas, e cada fórmula tem a seu lado os números das hipóteses de que ela depende.

Alternativamente, as hipóteses das quais uma fórmula depende podem ser indicadas diretamente. Uma derivação é, então, uma sequência de *sequentes* e não mas de fórmulas. Um sequente é um par ordenado $< \Gamma, A >$ onde A é uma fórmula e Γ são as hipóteses (consideradas como árvores, multisets, conjuntos ou sequências de fórmulas, dependendo da lógica em questão, em geral em quantidade finita) das quais A depende. Um sequente $< \Gamma, A >$ é usualmente representado por $\Gamma \Rightarrow A$. Γ é chamado de antecedente e A o sucedente do sequente. Outras maneiras de representar uma derivação são encontradas na literatura, mas estas duas são das mais usadas hoje em dia.

Uma regra de inferência é uma expressão da forma:

$$\frac{S_1 \ldots S_n}{S}$$

onde $S_1, \ldots, S_n$ e S são sequentes. Neste cálculo chamamos de *sequentes superiores* à lista de sequentes da parte de cima das regras de inferência (esta lista pode ser vazia) e de *sequente inferior* ao sequente de baixo da regra. As fórmulas de *contexto* são aquelas fórmulas que não mudam pela aplicação da regra.

As regras de inferência de um sistema de Dedução Natural, são divididas em: *sequentes básicos, regras estruturais e regras lógicas.* Os sequentes básicos ou axiomas são necessários quando uma derivação é representada através de sequentes, neste caso não há sequentes superiores. As regras estruturais são as que estabelecem a estrutura dos antecedentes dos sequentes, elas estabelecem se os antecedentes devem ser considerados como sequências, conjuntos, multisets ou árvores de fórmulas. As regras lógicas, estão divididas em regras de *introdução e eliminação* e estabelecem o comportamento de cada conectivo da linguagem da lógica.

Numa regra de eliminação, uma *premisa principal* é uma fórmula que aparece nos sequentes superiores, e que contém a constante lógica a ser eliminada. Um *sequente principal* é um que contenha a premisa principal; os outros sequentes superiores, se houver, são chamados de *sequentes secundários.*

Uma *dedução ou derivação* é uma árvore de sequentes onde cada sequente é um sequente básico, ou segue dos imediatamente anteriores por aplicação de uma das regras. Uma *demonstração* do sequente $\Gamma \Rightarrow A$ é uma dedução que termina com o sequente $\Gamma \Rightarrow A$, chamado de conclusão da demonstração. Diz-se que A é derivável a partir de Γ no sistema de Dedução Natural DN, representado por $\vdash_{DN} \Gamma \Rightarrow A$, se existe uma demonstração do sequente $\Gamma \Rightarrow A$ no sistema de Dedução Natural. A é demonstrável no sistema DN, $\vdash_{DN}\ \Rightarrow A$ (ou $\vdash_{DN} A$) quando há uma demonstração de A que não depende de hipóteses.

Uma característica importante que pode possuir um sistema de Dedução Natural é a capacidade para "colar" demonstrações. Este fato é conhecido como Lema da Substituição ou do corte, e enunciado por: $\vdash \Gamma \Rightarrow A$ e $\vdash \Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ então $\vdash \Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B$.

Cálculo de Sequentes

Um **Cálculo de Sequentes** é um conjunto de regras que manipulam sequentes, definidos como sendo pares $< \Gamma, \Delta >$ onde o antecedente Γ representa as hipóteses e Δ as fórmulas obtidas a partir dessas hipóteses. Γ pode ser vazio, representando que Δ não depende de hipótese nenhuma e, se sequentes são representados por $\Gamma \Rightarrow \Delta$, então $\Gamma \Rightarrow$ significa que Γ

é inconsistente. Neste cálculo, lógicas do gênero intuicionista podem ser apresentadas com sequentes com uma única fórmula no sucedente [Tak75, Tro90].

Um Cálculo de Sequentes, também, está definido por *sequentes básicos, regras estruturais e regras lógicas*. As regras lógicas, que definem os conectivos, são regras de introdução, divididas em regras de introdução à direita e à esquerda do símbolo $\Rightarrow$. Num Cálculo de Sequentes é desejável que as regras de introdução à direita e à esquerda sejam simétricas.

Uma *dedução ou derivação* é uma árvore de sequentes onde cada sequente é um sequente básico, ou segue dos imediatos anteriores pela aplicação de uma das regras. Uma *demonstração* do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ e uma dedução que termina com o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, chamado de conclusão da demonstração. Diz-se que Δ é derivável a partir de Γ no sistema de Cálculo de Sequentes CS, representado por $\vdash_{CS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, se existe uma demonstração do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ no sistema de Cálculo de Sequentes. Δ é demonstrável no sistema CS, $\vdash_{CS} \;\Rightarrow \Delta$, quando há uma demonstração de Δ que não depende de hipóteses.

Dentre as regras estruturais do Cálculo de Sequentes, a regra do corte:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta' \quad \Delta, A, \Sigma \Rightarrow \Delta''}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta', \Delta''}$$

é de particular importância. Esta regra garante que o uso de "lemas" no decurso de uma demonstração é correto (em Dedução Natural isto está garantido pela Lema da Substituição e pelo processo de normalização). Com ela também é possível demonstrar que as regras de eliminação num sistema de Dedução Natural são regras derivadas no correspondente sistema de Sequentes. Mas, ela tem um caráter diferente das outras regras do Cálculo de Sequentes. Em geral, as outras regras têm a característica de que todas as fórmulas dos sequentes superiores são subfórmulas das fórmulas que aparecem no sequente inferior. Por isto, num Cálculo de Sequentes que possua esta regra, é importante demonstrar que tudo o que é demonstrado no sistema que a contêm, pode também ser demonstrado sem ela. Este teorema, chamado de Eliminação da regra do corte, enunciado por Gentzen e chamado *Hauptsatz*, na verdade estabelece que a regra do corte é uma regra derivada no cálculo mostrando que toda aplicação da regra do corte no decurso de uma demonstração pode ser eliminada. O teorema da Eliminação da regra do corte tem importantes corolários, pois pode-se demonstrar que o cálculo sem corte satisfaz a Propriedade da Subfórmula: em qualquer demonstração de um sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, cada fórmula que ocorre em qualquer sequente que aparece ao longo da demonstração é uma subfórmula das fórmulas que aparecem em Γ, Δ. Estes resultados têm importantes consequências, por exemplo, em certos casos, pode-se demonstrar a consistência e a decidibilidade da lógica em questão, e também pode ajudar na obtenção de extensões conservativas.

Para cada uma das lógicas tratadas nesta tese, consideraremos dada uma linguagem proposicional (isto é, variáveis proposicionais e constantes lógicas proposicionais) sobre a qual definiremos os diferentes sistemas.

Os três formalismos são equivalentes, i.e. apresentam a mesma lógica, quando pode se estabelecer entre eles a seguinte relação: $\Gamma \vdash_{Ax} A$ sse $\vdash_{DN} \Gamma \Rightarrow A$ sse $\vdash_{CS} \Gamma \Rightarrow A$.

2.1.1 Normalização vs. Eliminação do corte

O Cálculo de Sequentes foi apresentado por Gentzen, para o caso da Lógica Clássica, como sendo uma ferramenta da teoria da prova mais poderosa que a Dedução Natural, devido à propriedade da eliminação da regra do corte[1]. Trabalhos já mais recentes, de Prawitz entre outros, têm estabelecido que resultados similares podem ser obtidos em sistemas de Dedução Natural. Como no caso da Eliminação do corte, a idéia fundamental é evitar passos desnecessários (ou desvios) ao longo de uma demonstração. Tais desvios aparecem quando à conclusão de uma regra de introdução é aplicada uma regra de eliminação do mesmo conectivo que foi introduzido no passo anterior. Uma ocorrência de um sequente desta classe é chamada *maximal*.

Fácilmente, pode ser visto que a introdução de um sequente máximo foi desnecessária. Isto permite especificar certos passos de redução que eliminam tais sequentes maximais, chamados de *reduções próprias*. Cada passo de redução é apresentado por casos, de acordo à constante lógica envolvida. Por exemplo, uma redução própria no sistema de Dedução Natural para a Lógica Intuicionista é dada pela seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow B\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}}{\Gamma \Rightarrow A}$$

que se reduz a: $\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma \Rightarrow A\end{matrix}$.

Em certos casos, existem, também, as chamadas *reduções permutativas* que são possíveis quando à conclusão de uma regra de eliminação que contém sequentes principais e secundários, é aplicada uma outra regra de eliminação. Neste caso, não se pode usar uma redução própria mas uma redução permutativa que comuta a ordem da aplicação das regras de eliminação e permite continuar com o processo de normalização nos sequentes secundários. Por exemplo, no

[1].."Nevertheless it cannot be said that the 'most natural' logical calculus, simply because it corresponds most closely to real reasoning, is also the most suitable calculus for proof-theoretical investigations." ... "The special position of the negation, in particular, which constituted a troublesome exception in the natural calculus, has been completely removed in a seemingly magical way. The manner in which this observation is expressed is undoubtedly justified since I myself was completely surprised by this property of the LK-calculus when first formulating that calculus" [Sza69, cap.8].

sistema de Dedução Natural para a Lógica Intuicionista, a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow A \vee B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \Rightarrow C\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Phi \Rightarrow D\end{array}}{A, \Phi \Rightarrow C \wedge D} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ B \Rightarrow C \wedge D\end{array}}{\Gamma, \Phi \Rightarrow C \wedge D}}{\Gamma, \Phi \Rightarrow C}$$

reduz-se a:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow A \vee B\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \Rightarrow C\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Phi \Rightarrow D\end{array}}{A, \Phi \Rightarrow C \wedge D}}{A, \Phi \Rightarrow C} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ B \Rightarrow C \wedge D\end{array}}{B \Rightarrow C}}{\Gamma, \Phi \Rightarrow C}$$

Diz-se que uma demonstração em Dedução Natural está em *forma normal* (em relação a um dado conjunto de reduções) se nenhuma redução desse conjunto pode ser aplicada a essa demonstração. De posse destas reduções, que preservam a conclusão das demonstrações, é possível obter o Teorema da Forma Normal que afirma que cada sequente demonstrável pode ser derivado por meio de uma demonstração em forma normal. O Teorema da Normalização, afirma que cada demonstração pode ser transformada em uma demonstração normal por meio de uma sequência apropriada de passos de redução. O Teorema da Normalização Forte afirma que cada sequência de passos de redução, começando com uma demonstração dada termina numa demonstração em forma normal. A propriedade de Church-Rosser estabelece que formas normais são únicas. O Teorema da Normalização, tem importantes consequências, por exemplo, em certos casos, pode-se demonstrar o Teorema da Interpolação, o Teorema de Definibilidade e/ou a consistência da lógica em questão ([Tak75, Dum75]).

As demonstrações em forma normal têm a propriedade que todas as regras de eliminação são aplicadas na primeira parte da derivação e as regras de introdução são todas aplicadas numa segunda etapa, sendo que estas duas partes estão separadas por uma fórmula, chamada *fórmula mínima* [Pra65, pag.41].

Outras reduções que aparecem em sistemas de Dedução Natural são as chamadas *reduções "pruning"*, que surgem quando são permitidas aplicações "degeneradas" das regras de eliminação. Por exemplo, a seguinte derivação:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \oplus B \quad \Sigma \Rightarrow C \quad \Delta, B, \Delta' \Rightarrow C}{\Gamma, \Sigma, \Delta, \Delta' \Rightarrow C}$$

reduz-se à derivação que não depende de B como hipótese: $\Sigma \Rightarrow C$

E a derivação:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \oplus B \quad \Sigma \Rightarrow C \quad \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Sigma, \Delta \Rightarrow C}$$

reduz-se a qualquer uma das duas derivações de C.

Estas reduções não determinísticas têm importantes aplicações em computação, principalmente na área de otimização de programas. Porém, um sistema com esta classe de reduções não tem a propriedade de Church-Rosser, [Goa80].

Em Cálculo de Sequentes o análogo ao processo de normalização, é a eliminação da regra do corte. A idéia básica é que uma demonstração que usa a regra do corte não vai direto a seu objetivo. Em algum lugar foi introduzida uma fórmula que depois é eliminada pela regra do corte. Neste processo podem-se verificar diferentes tipos de corte. Um *corte principal* (ou essencial) ocorre quando a fórmula que o corte elimina foi introduzida (à esquerda e à direita) nos dois sequentes superiores na regra do corte. Neste caso a redução substitui um corte por outros cortes onde a fórmula a ser cortada é mais simples. Por exemplo, no sistema de Sequentes para a Lógica Intuicionista, a seguinte derivação:

$$\frac{\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B} \qquad \dfrac{\Delta \Rightarrow A \quad B \Rightarrow C}{A \to B, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}$$

transforma-se em qualquer uma das seguintes derivações:

$$\frac{\Delta \Rightarrow A \qquad \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{\Gamma, A \Rightarrow C}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C} \qquad \frac{\dfrac{\Delta \Rightarrow A \quad A, \Gamma \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma \Rightarrow B} \qquad B \Rightarrow C}{\Delta, \Gamma \Rightarrow C}$$

Os cortes principais essencialmente correspondem ao conjunto de reduções próprias no processo de normalização.

Outras eliminações do corte, chamados de *cortes permutativos*, são as reduções onde uma aplicação da regra do corte é substituída por outro corte da mesma fórmula mas numa derivação de menor comprimento. Por exemplo, no sistema de Sequentes para a Lógica Intuicionista, a seguinte derivação:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow B}{A \wedge C \Rightarrow B} \qquad B \Rightarrow D}{A \wedge C \Rightarrow D} \quad \text{transforma-se em} \quad \frac{\dfrac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow D}{A \Rightarrow D}}{A \wedge C \Rightarrow D}$$

As reduções permutativas de Dedução Natural correspondem a casos particulares de permutação do corte. Um caso particular dos cortes permutativos são os chamados *cortes triviais ou insignificantes* que ocorrem quando uma das premissas da regra do corte é um sequente inicial identidade, neste caso o corte desaparece.

Em Cálculo de Sequentes chamamos uma dedução de normal quando não há mais cortes a eliminar pelo processo de eliminação da regra do corte.

Em [Zuc74] é feito uma análise minuciosa, comparando os sistemas de Dedução Natural e de Cálculo de Sequentes com seus conjuntos de reduções para o caso da Lógica Intuicionista e a Clássica. Nesse trabalho define-se uma função ϕ, sobrejetora mas não injetora do conjunto de todas as derivações no Cálculo de Sequentes para a Lógica Intuicionista no conjunto das derivações em Dedução Natural. Então, obtêm-se os seguintes teoremas: se D é uma derivação (em Cálculo de Sequentes) livre da regra do corte então $\phi(D)$ é uma derivação normal (no sistema de Dedução Natural). Por outro lado a inversa é mais fraca, se $\phi(D)$ é normal então existe uma derivação D_0, tal que D transforma-se por cortes permutativos a D_0 e D_0 é livre da regra do corte, [Zuc74, pag.67]. Em [Pot, Per82] faz-se uma análise um pouco mais geral para a Lógica Intuicionista.

Uma análise similar à de [Zuc74] é feita para o fragmento $(\otimes, \multimap, !)$ da Lógica Linear Intuicionista em [BBdPH92].

2.2 Dedução Natural e λ-Cálculo

Um outro formalismo interessante do ponto de vista computacional é o λ-cálculo tipado.

Neste caso precisa-se definir uma classe de *tipos*, que é definida usando certos tipos básicos e operações que manipulam os tipos e uma classe de *termos*, livremente gerada usando variáveis e operações que formam termos. Cada um dos termos é de exatamente um tipo. Para cada tipo há uma quantidade enumerável de variáveis. Além disto, há um conjunto de equações entre termos; a menor relação de congruência, chamada de *convertibilidade*, que satisfaz estas equações estabelece quando dois termos denotam o mesmo elemento no conjunto dos termos, mesmo sem serem sintáticamente iguais.

As definições de variável ligada, livre, termo fechado, e de substituição (representado por $M[L/x]$ ou $M[x := L]$) são as usuais (vide [Bar85]).

A vantagem do λ-cálculo sobre a Dedução Natural e o Cálculo de Sequentes é que a demonstração de um sequente $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ está "codificada" num termo t de tipo A que tem variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$ de tipo $A_1, \ldots, A_n$ respectivamente; na verdade, o termo t diz quais foram os passos feitos ao longo da dedução até esse momento (o chamado "trace").

As equações de convertibilidade devem ser lidas num sentido só: aquele que vai de um termo para outro que em algum sentido determinado tem complexidade menor. Estas equações direcionadas chamadas *reduções de conversão* produzem um sistema de reescrita que define a semântica operacional do cálculo.

A relação de *redução* R é a menor relação de congruência entre termos tipados tal que satisfaz às reduções de conversão dadas.

As reduções de conversão são classificadas na literatura como β-reduções, ξ-regras, α-reduções, η-reduções, e reduções permutativas. As β-reduções ou reduções operacionais definem o comportamento dos operadores, por exemplo, as reduções: $\pi_1(t \times s) \hookrightarrow t$ e $\pi_2(t \times s) \hookrightarrow s$ dizem que $\times$ é um operador que forma pares com projeções π_1 e π_2, i.e. que o diagrama obtido, através deste operador, comuta com as projeções (em [Pra71, Man75] estas reduções, no contexto da Dedução Natural, são chamadas de &-reduções). As reduções η estabelecem a unicidade da construção, por exemplo, a regra: $(\pi_1(t) \times \pi_2(t)) \hookrightarrow t$ diz que a operação de formar pares é unica, e assim é um produto com projeções π_1 e π_2 (em [Pra71, Man75] estas reduções, no contexto da Dedução Natural, são chamadas de &-expansão). As reduções α permitem renomear as variáveis ligadas num termo usando variáveis novas. As regras ξ estabelecem a compatibilidade da relação com os operadores. As reduções permutativas têm sua motivação na Dedução Natural e no isomorfismo Curry-Howard, mas também têm um papel escencial nas provas de normalização conhecidas.

As reduções de expansão em Dedução Natural permitem, em certos casos, demonstrar que cada derivação normal pode ser transformada em uma derivação normal expandida, isto significa que toda fórmula mínima numa derivação normal é atômica. Em um sistema de Cálculo de Sequentes, esta condição significa que cada derivação pode começar com sequentes inicias de fórmulas atômicas.

Um termo M é chamado de R-redex (ou redex quando R está entendida) se $(M, N) \in R$, para algúm termo N e R é uma relação de redução. Neste caso N é chamado de R-contractum (ou contractum quando R está entendida). Um termo M é chamado um termo R normal se M não contém (como subtermo) qualquer R-redex. O processo de passar de um R-redex a um R-contractum é chamado de *R-contração de termos*.

Um caminho de R-reduções é uma sequência (finita ou infinita) de R-contrações de termos. Se um caminho de R-reduções começa com um termo M_0 e termina num termo M_n, então M_n está em R-forma normal e é chamado da forma normal de M_0. Diz-se que uma relação R é fortemente normalizável se todos os caminhos de R-reduções que começam em qualquer termo M são finitos.

Diz-se que uma noção de redução R é Church-Rosser (ou que R satisfaz a propriedade do diamante) se: para todo termo M, M_1, M_2 tal que $(M, M_1) \in R$ e $(M, M_2) \in R$ então existe um termo M_3 tal que $(M_1, M_3) \in R$ e $(M_2, M_3) \in R$. Um corolário desta propriedade é que um termo pode ter no máximo uma forma normal.

Outras propriedades desejadas da relação R são: a propriedade da *substituição*, isto é, se $(M, N) \in R$ então $(M[L/x], N[L/x]) \in R$, para qualquer M, N, L e variável x. E a propriedade da *redução*, i.e., se $\vdash \Gamma \Rightarrow M : A$ e $(M, N) \in R$ então $\vdash \Gamma \Rightarrow N : A$.

Uma apresentação mais recente para um λ-cálculo é o chamado Cálculo de Termos ("Term Assignment", [Wad91, Abr90, BBdPH92]). Esta apresentação usa sequentes da forma $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow t : A$, onde as variáveis livres do termo t de tipo A estão entre as variáveis x_i do tipo A_i $(i = 1, \ldots, n)$ que aparecem no antecedente. Este cálculo apresenta ao mesmo tempo o conjunto de tipos, os termos que pertencem a cada tipo e quais as variáveis que cada termo liga. O Cálculo de Termos tem regras de inferência classificadas em axiomas, estruturais (que permitem controle sobre as variáveis nos antecedentes dos sequentes) e lógicas (que tratam da formação de termos). As noções de dedução, demonstração e demonstrabilidade são definidas como nos casos da Dedução Natural e Cálculo de Sequentes.

Ao longo da tese apresentaremos cada λ-cálculo, na sua forma de Cálculo de Termos e o conjunto das reduções de conversão (as reduções β, η, ξ e as permutativas) que a relação de redução deve satisfazer em cada caso. Como veremos na próxima seção estas regras estão relacionadas com as reduções do processo de normalização de Dedução Natural, e assim com o processo de Eliminação da regra do corte em Cálculo de Sequentes.

2.2.1 O isomorfismo Curry-Howard

O isomorfismo Curry-Howard ([How80]) essencialmente transforma cada etapa de uma dedução em Dedução Natural em um termo, que é a codificação da construção da dedução até esse momento. Isto significa que uma lógica pode ser vista como um sistema de tipos para um sistema de Cálculo de Termos. A correspondência também relaciona o processo de normalização com o de contração de termos. O caso da Lógica Intuicionista é tratado em detalhe em [Gir89] e o do fragmento $(\otimes, \multimap, !)$ da Lógica Linear Intuicionista em [BBdPH92].

Esse isomorfismo faz corresponder fórmulas lógicas com tipos de um λ-cálculo tipado e demonstrações da Dedução Natural (ou do Cálculo de Sequentes) com termos; mas precisamente, cada demonstração da fórmula A que depende de hipóteses $A_1, \ldots A_n$ se transforma num termo t de tipo A que tem variáveis livres $x_1, \ldots x_n$ de tipo $A_1, \ldots A_n$ respectivamente.

A bijeção também relaciona a estrutura existente em cada um dos casos. As reduções β e as permutativas no λ-cálculo correspondem exatamente às reduções próprias e às permutativas da Dedução Natural. A noção de normalidade, e o teorema da forma normal introduzidos nos dois formalismos também se correspondem. Pode-se demonstrar então que um sequente $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow t : A$ é demonstrável no Cálculo de Termos sse $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ é demonstrável no sistema de Dedução Natural gerado pelo isomorfismo Curry-Howard. Além disto t é um termo normal sse a demonstração em Dedução Natural é normal.

2.3 Modelos Algébricos e Categóricos

Nesta seção trataremos de modelos matemáticos para os formalismos que foram apresentados nas seções anteriores. Mais precisamente, apresentaremos dois gêneros de modelos baseados em conceitos bem diferentes da matemática.

O objetivo desta seção é explicar o que significa um modelo categórico e um modelo algébrico para os formalismos de derivação de uma lógica e examinar a capacidade que cada um deles tem para explicar processos computacionais. Estas idéias serão usadas nos próximos capítulos para apresentar modelos, categóricos e algébricos, de lógicas específicas. No último capítulo serão feitas definições formais abstratas destes gêneros de modelos.

Serão usados conceitos básicos de Álgebra e de Teoria de Categorias. O leitor pode achar necessário consultar alguma bibliografia, como por exemplo [ML71] no que se refere às categorias.

Modelos Algébricos

O estudo de modelos algébricos nesta tese tem duas motivações. Uma delas é que modelos algébricos são interessantes quando se está trabalhando com processos de computação algébricos (ou computações simbólicas), e a outra é porque modelos algébricos podem ser facilmente obtidos como uma particularização de modelos categóricos, que são o objetivo central desta tese.

A idéia básica da modelagem algébrica para uma lógica é apresentar uma **álgebra** que simule o efeito dos conectivos da lógica junto com uma relação binária que espelhe a relação de dedutibilidade.

A cada fórmula da linguagem deve-se associar um elemento de um conjunto M. Dá-se uma interpretação $\mathcal{I}$ em M para as variáveis proposicionais e dá-se uma operação n-ária em M para cada conectivo n-ário da linguagem proposicional. $\mathcal{I}$ estende-se indutivamente às outras fórmulas. Além disto, é preciso uma relação binária $\leq$ entre elementos do conjunto M que preserve a relação de dedutibilidade, isto é, toda vez que da fórmula A obtém-se uma fórmula B também deve-se ter $\mathcal{I}(A) \leq \mathcal{I}(B)$ em M, e vice-versa. Isto garante os resultados de completude e validade (ou "Soundness").

Os modelos algébricos para uma lógica dada constituem uma classe de álgebras como a álgebra de Lindenbaum da lógica (isto é, o conjunto das classes de equivalência das fórmulas interdedutíveis, junto com as operações induzidas pelos conectivos nas classes de equivalencias).

O exemplo mais destacado deste estilo de modelos são as álgebras Booleanas para a Lógica Clássica. Por exemplo, neste caso, precisa-se de um conjunto M junto com duas operações binárias $\times, + : M \times M \to M$ para tratar dos conectivos $\wedge$ e $\vee$. $\times, +$ definem um reticulado distributivo em M, então a relação $\leq$ é a relação de ordem parcial definida no reticulado. Além disto, precisa-se de uma operação binária, o pseudo-complemento, para tratar do conectivo da implicação e de uma operação unária de complemento para tratar da negação.

Trabalhando com modelos algébricos é habitual que a diferença notacional entre elementos do conjunto e fórmulas seja de letras maiúsculas e minúsculas; assim, para a interpretação da fórmula A no conjunto M, usaremos sem distinção tanto $\mathcal{I}(A)$ como o elemento a de M.

Modelos Categóricos

Algumas noções básicas referentes a conceitos da Teoria de Categorias podem ser encontradas no Apêndice F.

A idéia fundamental do tratamento categórico da Teoria da Prova de uma lógica é que fórmulas devem ser interpretadas como objetos de uma categoria (ou de uma multicategoria, ou policategoria, [Lam68, Lam89]), conectivos n-ários como endo-funtores n-ários, e demonstrações devem ser interpretadas como morfismos dessa categoria. Operações que transformam demonstrações em demonstrações correspondem a transformações naturais, no sentido categórico, entre hom-funtores apropriados. Os morfismos que modelam as demonstrações são então construídos usando estas operações categóricas, e assim o problema de prover um modelo categórico é essencialmente o problema de prover as operações naturais.

Como é habitual em Lógica Categórica, não faremos diferença notacional entre objetos da categoria e fórmulas, assim, para a interpretação da fórmula A, usaremos sem distinção tanto $\mathcal{I}(A)$ como o objeto A da categoria.

Uma demonstração de um sequente da forma $A_1, \ldots, A_m \Rightarrow A$, deveria ser interpretada através de um morfismo m-ário $f : A_1, \ldots, A_m \to A$, isto é deveríamos trabalhar com multicategorias ([Lam68, Lam89]). Mas, se entre as constantes lógicas do sistema lógico existir um conectivo, que simule (ou internalize na lógica) o comportamento da vírgula que separa os antecedentes dos sequentes é possível interpretar tal sequente como um morfismo

$g : A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \to A$ numa categoria, onde $\otimes$ é o bi-endofuntor que representa o conectivo que simula o efeito da vírgula. Isto é, neste caso pode-se considerar que a estrutura de multicategoria está representada através da interpretação de um conectivo, e pode-se trabalhar diretamente com categorias. A identidade do conectivo $\otimes$ servirá para interpretar antecedentes vazios de sequentes.

Num sistema dedutivo a demonstração de um sequente é gerada realizando um processo de "pattern-matching" com as regras do cálculo. Isto é, aplicar uma regra ao longo de uma demonstração é instanciar os sequentes superiores da regra ao caso em questão e obter uma instância do sequente inferior. Na verdade uma regra de um sistema dedutivo estabelece como transformar os sequentes superiores no sequente inferior independente de quais sejam as fórmulas envolvidas em cada caso. Para aplicar uma regra é suficiente satisfazer as condições dessa regra.

No modelo categórico este processo de "pattern-matching" é refletido exigindo que cada regra do cálculo tenha associado a ela uma transformação natural, isto garante que os morfismos associados a cada demonstração sejam construídos segundo cada passo da derivação de uma maneira uniforme, independente de argumentos particulares.

Em outras palavras, na modelagem categórica codificam-se os passos de uma dedução através de morfismos da categoria. Um modelo categórico associa a cada demonstração de um sequente um morfismo composto das construções categóricas que identificam cada um dos passos da derivação. Mas, nos sistemas dedutivos existem transformações entre derivações (ou entre termos), mais precisamente, os processos de Eliminação do corte e de normalização (e/ou de contração de termos) identificam deduções (ou termos). Precisamos, então, também refletir esta identificação entre deduções na categoria.

Já que em Lógica Categórica deseja-se modelar o processo completo de eliminação da regra do corte (e também os processos de normalização de demonstrações e de contração de termos) e não simplesmente o resultado final do processo, o que se deve garantir é que demonstrações que se reduzem se correpondem com os mesmos morfismos. Para isto contamos com diagramas comutativos (ou equações entre morfismos) que estabelecem a igualdade de morfismos na categoria. Diagramas comutativos, como os estabelecidos na definição de categoria, de funtores, de transformações naturais e os chamados diagramas de coerência (que estabelecem que cada diagrama construído por iteração de certos morfismos básicos comuta, [ML71, pag.161]) são ferramentas que a Teoria de Categorias nos provê para obter o resultado procurado.

Exemplos de modelos categóricos são as categorias livres (os objetos são as fórmulas e os morfismos classes de equivalência de demonstrações, [Sza74, LS86]).

É bem conhecido ([LS86]) que modelos categóricos para a Lógica Intuicionista são as categorias cartesianas fechadas com coprodutos finitos. Neste caso, o funtor produto corresponde à conjunção, o funtor coproduto à disjunção e o funtor de internal-hom (adjunto à direita do produto) corresponde ao conectivo implicacional. Por exemplo, no caso da conjunção temos que $\vdash A \wedge B \Rightarrow A$, $\vdash A \wedge B \Rightarrow B$ e $\vdash A \Rightarrow A \wedge A$; um funtor produto $\times$ é um bi-endofuntor que tem associado a ele as transformações naturais chamadas projeções, $\Pi_{A,B} : A \times B \to A$, $\Pi'_{A,B} : A \times B \to B$, e a diagonal, $\Delta_A : A \to A \times A$, que são os morfismos necessários para modelar essas deduções correspondentes à conjunção. Além disto, no caso da conjunção pode-se ter que a derivação:

$$\frac{A \wedge B \Rightarrow A \quad A \wedge B \Rightarrow B}{A \wedge B \Rightarrow A \wedge B}$$

reduz-se a $A \wedge B \Rightarrow A \wedge B$. Numa categoria cartesiana a equação $\Pi_{A,B}(A \times B) \times \Pi'_{A,B}(A \times B) = A \times B$ simula o efeito da redução anterior.

É importante observar que uma categoria pequena $\mathbf{C}$ gera um conjunto parcialmente ordenado. O conjunto consiste dos objetos da categoria $\mathbf{C}$ e a pré-ordem é induzida pela relação $A \leq B$ sse existe um morfismo $A \rightarrow B$ na categoria $\mathbf{C}$. No caso das categorias cartesianas fechadas (um modelo categórico para a Lógica Intuicionista) o conjunto ordenado obtido é uma álgebra de Heyting ([LS86]), modelo algébrico para a Lógica Intuicionista.

2.4 Conclusão

Neste capítulo examinamos diferentes formalismos úteis para o tratamento de uma lógica em teoria da Computação.

O uso, anterior a Gentzen, de formalizações axiomáticas teve alguns efeitos enganosos. Por exemplo, confundia-se que enquanto em uma teoria (como por exemplo a teoria dos grupos) o interesse principal é estabelecer sentenças válidas (os teoremas que são válidos para os grupos), e a derivação de sentenças é um meio para isso, em lógica o próprio processo de derivação é um objeto de estudo. Formalizações axiomáticas, em contraste com os outros formalismos, tentam mostrar uma lógica como a busca de verdades. O efeito disto foi que se pensou em caracterizar uma lógica, não por uma relação de derivabilidade, mas pelo conjunto das fórmulas demonstráveis.

Dedução Natural e Cálculo de Sequentes são dois formalismos de derivação. Eles caracterisam uma lógica definindo uma relação de derivabilidade e estabeleciendo uma relação entre deduções, a noção de redução. Mas, eles não são sistemas equivalentes. Ao estudar os procedimentos de redução há uma diferença combinatorial entre eles. Um Cálculo de Sequentes pode ser pensado como um *meta-cálculo* para a relação de derivabilidade no correspondente sistema de Dedução Natural, ele parece ser mais adequado para estudar a estrutura de uma demonstração. Como nem todas as transformações em Cálculo de Sequentes correspondem a reduções em Dedução Natural, surge a possibilidade da existência de propriedades significativas das demonstrações que sejam preservadas pelas reduções da Dedução Natural, mas não pelas transformações da Eliminação do corte. Pode-se dizer que há diferenças entre eles num nível computacional. Por outro lado, o processo para a eliminação da regra do corte apresenta mais dificuldades para ser tratado que o processo de normalização. Por exemplo, nem todas as transformacões têm uma única redução, algumas derivações se reduzem umas às outras e alguns cortes, como os chamados triviais, aparecem sem nenhuma necessidade.

O procedimento para construir uma demonstração lógica é mais claramente entendido num sistema como o de Dedução Natural, onde temos um método para gerar inferências a partir de hipóteses, do que num sistema axiomático do gênero Hilbert, onde as inferências dependem de certos axiomas. Além disto, as regras de inferência dos cálculos de Gentzen estão relacionados à interpretação operacional intuitiva dos conectivos, e este fato permite construir facilmente as demonstrações. Entre estas demonstrações estão as deduções diretas, ou em forma normal, as quais não têm contrapartida clara em sistema do gênero Hilbert.

Neste capítulo, examinamos também o que entendemos por um modelo categórico e por um modelo algébrico.

Como era de se esperar, já que a Teoria de Categorias provê construções matemáticas bem abstratas, um modelo categórico para uma lógica é uma construção muito geral que simula o efeito dos sistemas de derivação usados para apresentar essa lógica. Podemos dizer, então, que um modelo categórico "modela" (o poder dedutivo de) uma lógica, apresentada por qualquer um dos formalismos dedutivos citados neste capítulo. Isto é, como ocorre em outro gênero de aplicações, a Teoria de Categorias é a ferramenta básica que permite explicitar as características de uma lógica independentemente de um particular formalismo.

Para conhecer e entender um sistema lógico é desejável ter várias descrições do sistema. Os formalismos tratados nesta tese são diferentes estilos de apresentações para uma lógica e quantas mais apresentações possam-se prover para essa lógica mais conhecimento sobre o poder de demonstrabilidade dela se terá. Um modelo categórico pode ser visto, também, como uma ferramenta que ajuda no processo de prover formulações sintáticas para uma lógica, e para estabelecer relações entre elas. Por exemplo, em [BBdPH92] o modelo categórico para a Lógica Linear Intuicionista colaborou para descobrir um Cálculo de Termos adequado.

Por outro lado, os modelos algébricos são mais fáceis para se tratar mas eles nos dão menos informação que os modelos categóricos. Num modelo categórico as diferentes maneiras de demonstrar um sequente estão representadas por diferentes morfismos na categoria (a menos de reduções). No modelo algébrico só se representa a existência ou não de uma demonstração, sem estabelecer-se as várias maneiras possíveis de se fazer a demonstração. Assim, modelos categóricos resultam mais adequados que os algébricos quando se está interessado em modelar formalismos que tratam da estrutura das derivações e de reduções entre derivações.

Os modelos algébricos podem servir de ajuda para verificar primeiro se um sequente é demonstrável num dado sistema ou não, e para verificar a completude da lógica. Por outro lado, se estamos tratando com sistemas que possuem axiomas de identidades e a regra do corte, então o modelo algébrico pode-se definir como um conjunto parcialmente ordenado, que é uma categoria muito particular (onde só existe um morfismo entre os objetos), mas também tendo um modelo categórico é suficiente particularizá-lo ao caso de conjuntos parcialmente ordenados, e obter assim um modelo algébrico.

Nos próximos capítulos usaremos as idéias tratadas aqui, para estudar sistemas lógicos particulares. Como veremos, do ponto de vista da lógica, estes sistemas estão muito relacionados entre sim, mostraremos como esta relação manifesta-se, também, na linguagem dos modelos algébricos e categóricos.

Capítulo 3

A Lógica Relevante R

Anderson e Belnap iniciaram toda uma linha de trabalho, apresentando a lógica que surge ao se restringir a lógica clássica para impedir certas falácias que aparecem principalmente pela validade nesta última lógica do chamado axioma do Paradoxo Positivo, a saber $A \to (B \to A)$ (veja [AB75]). Eliminando-se estas falácias, poder-se-ia obter uma definição confiável do que significa o conectivo de implicação, chamado de implicação relevante.

A idéia seguida foi que no conectivo da implicação a fórmula do antecedente deveria ter alguma relação com a fórmula do consequente. Esta relação seria que, para obter uma fórmula da forma $A \to B$, a fórmula A tem realmente que ser usada durante a demonstração para obter a fórmula B, i.e. A é de importância ou relevância para obter B; relação esta que é obviamente perdida se o Paradoxo Positivo é válido. Por isso a idéia básica de lógica relevante é impedir tanto as derivações em que o antecedente não produza realmente o consequente quanto as derivações em que o consequente não seja uma consequência real do antecedente.

Mas, não se conseguiu chegar a um consenso sobre quais são todas as afirmações que devem ser eliminadas e quais desses fatos a lógica ainda pode permitir deduzir. Isto deu origem, não a uma única lógica, mas a uma família de lógicas, chamadas de relevantes, as quais tem em comum o fato que em nenhuma delas o Paradoxo Positivo é dedutível.

Na verdade, a mesma motivação levou a Lewis a definir a implicação que é chamada de estrita. Ele apresentou uma família de lógicas, enumeradas de S1 a S5, e deixou em aberto o problema de qual delas seria realmente a lógica que define exatamente o conceito de ser estrita. Mas, na família de lógicas de Lewis o critério seguido foi diferente do considerado por Anderson e Belnap. Como veremos mais adiante, no capítulo 4, as duas famílias não estão totalmente isoladas.

Este capítulo apresenta a lógica R de relevância e outras lógicas relacionadas com ela. E os próximos capítulos tratarão de outras lógicas relevantes com características diferentes. Estas não são as únicas lógicas relevantes existentes na literatura, mas elas podem ser consideradas como paradigmas para a implicação, já que cada uma delas corresponde a lógicas relevantes com características próprias.

Os trabalhos dos chamados relevantistas usualmente começam tratando só do fragmento implicacional da lógica em questão e depois são acrescentados os conectivos aditivos $(\wedge, \vee)$, ou feitas somente algumas considerações sobre eles. Isto se deve ao fato de que as lógicas relevantes concentram sua atenção em definir um conceito razoável de implicação, sendo os outros conectivos tão próximos quanto possível daqueles da lógica tradicional. Mas, o fato de que o Paradoxo Positivo não é mais válido traz como consequência que os conectivos aditivos não mais se distribuem entre sim, propriedade válida tanto na lógica clássica quanto na intuicionista, por isso os seguidores desta corrente têm que acrescentar esta propriedade explicitamente na apresentação da lógica. Neste trabalho serão considerados em cada caso todos os conectivos envolvidos, o que facilita a comparação entre as diferentes lógicas que serão analisadas ao longo de toda a tese.

Na verdade, a ausência da regra da Atenuação na apresentação das lógicas relevantes através de Cálculos de Sequentes (ou, o que é mesmo, a falta do axioma do Paradoxo Positivo numa apresentação axiomática) tem como consequência que não possa-se interpretar uma sequência de fórmulas como a conjunção delas, mas sim através de uma outra operação mais fraca que a conjunção. Este fato observado pelos relevantistas, provocou a introdução de um novo conectivo no cálculo chamado de *cotenabilidade* ("cotenability", junto com uma nova identidade para ele, chamada de t) que corresponde a essa interpretação. A lógica relevante com este novo conectivo é uma extensão conservativa da lógica correspondente sem o conectivo cotenabilidade.

Este fato foi amplamente estudado pela Lógica Linear, a qual separa os conectivos $\wedge, \vee$ em duas versões, a aditiva, correspondendo aos conectivos de conjunção e disjunção, e a versão multiplicativa que dão o significado das sequências de fórmulas em cada lado do símbolo de dedução $\Rightarrow$. Na Lógica Linear Intuicionista só se tem uma fórmula no lado direito dos sequentes, e por isso se considerou que nesta versão não teria sentido dividir o conectivo da disjunção em dois. Mas, trabalhos recentes em Lógica Categórica mostram que a separação da disjunção em duas, inclusive num contexto intuicionista, é perfeitamente factível. A lógica que surge com este desmembramento tem sido chamada "Full Intuicionistic Linear Logic" (FILL, [HdP92]).

Segundo as idéias da Lógica Linear, as lógicas discutidas neste trabalho conterão o conectivo da conjunção em duas versões, a aditiva e a multiplicativa. Assim, poderiam ser chamadas de extensões das lógicas relevantes originais, mas isto permite modelos mais claros, como será mostrado nas próximas seções. Estas extensões, ademais, já foram consideradas nos trabalhos dos relevantistas. Cabe aqui ressaltar que os fragmentos positivos das lógicas relevantes estão, na verdade, incluídos na Lógica Intuicionista, como se mostra em [AB75, pag 373]. Este trabalho estará interessado, principalmente, nos fragmentos positivos das lógicas relevantes.

Na próxima seção, lembramos a Lógica Linear Intuicionista proposicional, sem o conectivo modal (LLI). Serão tratadas tanto as formulacões sintáticas, como seus modelos algébricos e categóricos. Também, um Cálculo de Termos é apresentado. É feita a relação desta lógica com a família de lógicas relevantes.

Na seção seguinte, será mostrado como, acrescentando à lógica anterior a contração de fórmulas iguais, é obtida uma versão da lógica relevante R, chamada R^-. Os modelos correspondentes e o Cálculo de Termos também são obtidos a partir dos de LLI.

Algumas extensões da lógica R^- são discutidas; a versão com a expansão ou anti-contração, a versão com a distribuição dos aditivos, e a própria Lógica Intuicionista são apresentadas na última seção junto com algumas conclusões deste capítulo. Uma formulação para R onde a contração é feita através de uma modalidade é apresentada no capítulo 5.

3.1 A Lógica Linear Intuicionista

A Lógica Linear foi introduzida por J.Y. Girard em 1987 no trabalho [Gir87] e a versão intuicionista foi publicada em [GL87]. A seguir são lembradas as apresentações sintáticas e semânticas da Lógica Linear Intuicionista proposicional sem o conectivo modal (cf. Apêndice A), a qual é chamada neste trabalho de LLI.

Os conectivos são $\multimap, \otimes, \&, \oplus$.

A implicação linear $A \multimap B$ pode ser pensada como uma função que considera seu argumento examente uma vez.

A conjunção multiplicativa $\otimes$ ou o conectivo "tensor" pode ser considerado como uma "justaposição" de dados, podem-se reordenar mas não podem-se duplicar nem esquecer. Na verdade o tensor é uma conjunção fraca porque tem só algumas das propridades da conjunção normal, como a permutação de argumentos mas não tem projeções. A fórmula I é a identidade para este conectivo: $\vdash A \otimes I \rightleftarrows A \rightleftarrows I \otimes A$.

A conjunção aditiva $\&$ é como um produto direto, a "identidade" de cada argumento nunca é perdida. 1 é a identidade para este conectivo. E a disjunção aditiva $\oplus$ é como uma soma direta com 0 como sua identidade.

3.1.1 Sistemas formais

Cálculo de Sequentes

Regras Estruturais:

$$(Ident)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (Perm)\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad (Corte)\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Sigma, A, \Delta \Rightarrow B}{\Sigma, \Gamma, \Delta \Rightarrow B}$$

Regras Lógicas:

$$I_e\frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A}{\Gamma, I, \Gamma' \Rightarrow A} \qquad I_d\frac{}{\Rightarrow I}$$

$$\otimes_e\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad \otimes_d\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B}$$

$$\multimap_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, A \multimap B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C} \qquad \multimap_d \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B}$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow 1} \qquad \frac{}{\Gamma, 0, \Delta \Rightarrow A}$$

$$\&_e\frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, A\&B, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad \frac{\Gamma, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, A\&B, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad \&_d\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\&B}$$

$$\oplus_e \frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \oplus B, \Delta \Rightarrow C} \qquad \oplus_d \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}$$

Letras maiúsculas gregas são usadas para denotar sequências de fórmulas, e letras maiúsculas latinas para denotar fórmulas. A regra da permutação ($Perm$) simplesmente permite a permutação de fórmulas dentro de uma sequência. Indistintamente pode se considerar esta regra implícita e considerar as letras gregas maiúsculas como "multisets" (ou "bags") de fórmulas ao invés de sequências.

Observe que em LLI pode-se provar $\vdash A\&A \rightleftarrows A$, mas não $A \otimes A \rightleftarrows A$.

Este sistema tem a propriedade de Eliminação da regra do corte ([Sch90]) e é decidível ([GL87]).

Sistema Axiomático do gênero Hilbert

Uma versão axiomática para LLI, segundo os trabalhos de [Avr88, Tro90], consiste dos seguintes axiomas e regras:

1. $A \multimap A$
2. $(A \multimap B) \multimap ((B \multimap C) \multimap (A \multimap C))$ (transitividade)
3. $(A \multimap (B \multimap C)) \multimap (B \multimap (A \multimap C))$ (permutação)
4. $(A \multimap (B \multimap C)) \multimap (A \otimes B \multimap C)$ (tensor no consequente)
5. $(A \otimes B \multimap C) \multimap (A \multimap (B \multimap C))$ (tensor no antecedente)
6. $(I \multimap A) \multimap A$
7. $I \multimap (A \multimap A)$
8. $A\&B \multimap A$
9. $A\&B \multimap B$
10. $(A \multimap B)\&(A \multimap C) \multimap (A \multimap B\&C)$
11. $A \multimap A \oplus B$
12. $B \multimap A \oplus B$
13. $(A \multimap C)\&(B \multimap C) \multimap (A \oplus B \multimap C)$
14. $A \multimap 1$
15. $0 \multimap A$

$$(MP)\frac{\vdash A \quad \vdash A \multimap B}{\vdash B} \qquad (Adj)\frac{\vdash A \quad \vdash B}{\vdash A\&B}$$

O axioma de introdução do & (axioma número 10) evita a introdução do conectivo no caso em que as fórmulas A e B tenham diferentes conjuntos de hipóteses (porque se este fosse o caso poder-se-iam obter algumas instâncias do Paradoxo Positivo, que não é válido em LLI), mas então é necessária a regra da adjunção (Adj). Este problema foi resolvido na apresentação anterior exigindo nas regras que manipulam o conectivo & que ambas fórmulas tenham os mesmos contextos de sequências.

Neste sistema, a noção de derivação $\Gamma \vdash A$, onde Γ é um multiset de fórmulas, é definida como sendo uma árvore tal que cada membro é da forma $B \vdash B$ (B aparece em Γ) ou é uma instancia dos axiomas $\vdash B$ da lista, ou é obtido juntando árvores com as regras:

$$\frac{\Delta \vdash C \quad \Gamma' \vdash C \multimap B}{\Delta, \Gamma' \vdash B} \qquad \frac{\Delta \vdash C \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash C\&B}$$

e $\Gamma \vdash A$ é a último membro da árvore, [Avr88, Tro90]. O teorema de dedução: $\Gamma, A \vdash B$ então $\Gamma \vdash A \multimap B$, vale para este sistema, [Tro90].

A apresentação original das lógicas relevantes, nos trabalhos de Anderson e Belnap ([AB75]) e Dunn [Dun86], é feita usando sistemas axiomáticos. Por isso, a comparação entre as diferentes lógicas será feita nesta formulação.

Observa-se inmediatamente que LLI deve ser uma lógica relevante, já que segundo o critério que as caracteriza, o Paradoxo Positivo não é válido aqui. Mais ainda, com um simples confronto de axiomas, conclui-se que este sistema corresponde ao fragmento positivo da lógica que se tem chamado de R-W com cotenabilidade e sem distribuição dos aditivos em [AB75, Dun86]. Nesses trabalhos, o conectivo de $\otimes$ é representado por $\circ$ (chamado cotenabilidade ou conjunção intensional), I por t (a conjunção de todas as verdades lógicas), & por $\wedge$, 1 por T (a disjunção de todas as proposicões), $\oplus$ por $\vee$, 0 por F (a conjunção de todas as proposições), e, $\multimap$ por $\rightarrow$.

Dedução Natural

A formulação em Dedução Natural para LLI é também já conhecida, mas lembramos como ela aparece em ([Avr88, Tro90]) usando uma formulação de sequentes:

$$\frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$I_e\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow I}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A} \qquad I_i\frac{}{\Rightarrow I}$$

$$\otimes_e\frac{\Gamma \Rightarrow A \otimes B \quad \Delta, A, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C} \qquad \otimes_i\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B}$$

$$\multimap_e \frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A \multimap B \quad \Delta \ \Rightarrow \ A}{\Gamma, \Delta \ \Rightarrow B} \qquad \multimap_i \frac{\Gamma, A \ \Rightarrow B}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \multimap B}$$

$$\frac{}{\Gamma, 0, \Delta \Rightarrow A} \qquad \frac{}{\Gamma \Rightarrow 1}$$

$$\&_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \& B}{\Gamma \Rightarrow A} \qquad \&_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \& B}{\Gamma \Rightarrow B} \qquad \&_i \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B}$$

$$\oplus_e \frac{\Delta \Rightarrow A \oplus B \quad \Sigma, A, \Gamma \Rightarrow C \quad \Sigma, B, \Gamma \Rightarrow C}{\Sigma, \Delta, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \oplus_i \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \qquad \oplus_i \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}$$

Num sequente $\Gamma \Rightarrow A$, Γ é um multiset de fórmulas que representa todas as fórmulas que não foram descarregadas ao longo da dedução, e a fórmula A representa a conclusão desta dedução. Esta formulação não deve ser confundida com a formulação em Cálculo de Sequentes, onde as regras atuam no lado direito e esquerdo do símbolo $\Rightarrow$ e não como regras de introdução e eliminação para cada um das constantes lógicas.

O sistema acima possui a seguinte propriedade do corte (ou da substituição): $\Gamma \Rightarrow A$ e $\Delta, A, \Sigma \Rightarrow B$ então $\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B$, [Avr88, Tro90]. O Teorema da Normalização vale para LLI, i.e., cada demonstração do sequente $\Gamma \Rightarrow A$ no sistema de Dedução Natural pode ser transformada em uma derivação em forma normal [Avr88].

3.1.2 O Cálculo de Termos

A seguir apresentamos o Cálculo de Termos correspondente à lógica LLI. Neste sistema usa-se a terminologia de [BBdPH92, BMdP92, Mer90].

$$\frac{}{x : A \Rightarrow x : A}$$

$$\frac{\Delta \Rightarrow s : I \quad \Gamma \Rightarrow t : A}{\Delta, \Gamma \Rightarrow (\text{ let } s \text{ be } i \text{ in } t) : A} \qquad \frac{}{\Rightarrow i : I}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : A \otimes B \quad \Delta, x : A, y : B, \Sigma \Rightarrow s : C}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow (\text{ let } t \text{ be } x \otimes y \text{ in } s) : C} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : A \quad \Delta \Rightarrow s : B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (t \otimes s) : A \otimes B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : A \multimap B \quad \Delta \Rightarrow s : A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (ts) : B} \qquad \frac{\Gamma, x : A \Rightarrow t : B}{\Gamma \Rightarrow (\lambda x.t) : A \multimap B}$$

$$\frac{}{\Gamma, n:0, \Delta \Rightarrow c:A} \qquad \frac{}{\Gamma \Rightarrow h:1}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : A\&B}{\Gamma \Rightarrow (\pi_1 t) : A} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : A\&B}{\Gamma \Rightarrow (\pi_2 t) : B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : A \quad \Gamma \Rightarrow s : B}{\Gamma \Rightarrow (t \times s) : A\&B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow u : A \oplus B \quad \Delta, x : A, \Sigma \Rightarrow t : C \quad \Delta, y : B, \Sigma \Rightarrow s : C}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow (\text{ case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) : C}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : A}{\Gamma \Rightarrow (i_1 t) : A \oplus B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow s : B}{\Gamma \Rightarrow (i_2 s) : A \oplus B}$$

Letras maiúsculas gregas denotam conjuntos disjuntos de variáveis (com seus tipos).

Note-se que na regra de introdução de um termo $\lambda x.t$ de tipo $A \multimap B$, a variável x de tipo A aparece necessariamente no termo t de tipo B.

O renome da variável $x \otimes y$ pelo termo t na regra de construção de um termo **let** mantém a diferença entre várias ocorrências da mesma hipótese, representada por diferentes variáveis livres do mesmo tipo no λ-cálculo.

O seguinte conjunto são reduções para os termos do cálculo acima:
reduções operacionais

1. • $(\lambda x.t[x])s \hookrightarrow t[s/x]$
2. • $\pi_1(t \times s) \hookrightarrow t$
   • $\pi_2(t \times s) \hookrightarrow s$
3. • $(\text{ case } i_1 r \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) \hookrightarrow t[r/x]$
   • $(\text{ case } i_2 r \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) \hookrightarrow s[r/y]$
4. • $\text{let } i \text{ be } i \text{ in } t \hookrightarrow t$
   • $\text{let } s \otimes t \text{ be } x \otimes y \text{ in } u \hookrightarrow u[s/x, t/y]$

   reduções permutativas

5. • $\pi_1(\text{ case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) \hookrightarrow$
   $\text{case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } \pi_1 t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } \pi_1 s$
   • $\pi_2(\text{ case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) \hookrightarrow$
   $\text{case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } \pi_2 t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } \pi_2 s$
6. • $(\text{ case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s)w \hookrightarrow$
   $\text{case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } tw \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } sw$

7. • (case (case r use (i_1a) then t else use (i_2b) then s) use (i_1a') then t' else use (i_2b') then s') $\hookrightarrow$
(case r use (i_1a) then (case t use (i_1a') then t' else use (i_2b') then s') else use (i_2b) then (case s use (i_1a') then t' else use (i_2b') then s'))

8. • let (case u use (i_1x) then t else use (i_2y) then s) be $x' \otimes y'$ in w $\hookrightarrow$
(case u use (i_1x) then (let t be $x' \otimes y'$ in w) else use (i_2y) then (let s be $x' \otimes y'$ in w))

9. • let (case u use (i_1x) then t else use (i_2y) then s) be i in w $\hookrightarrow$
case u use (i_1x) then (let t be i in w) else use (i_2y) then (let s be i in w)

10. • case (let u be $z \otimes z'$ in w) use (i_1x) then s else use (i_2y) then t $\hookrightarrow$
let u be $z \otimes z'$ in (case w use (i_1x) then s else use (i_2y) then t)

11. • (let e be $x \otimes y$ in $f)g$ $\hookrightarrow$ let e be $x \otimes y$ in (fg)

12. • let (let e be $x \otimes y$ in f) be $z \otimes w$ in g $\hookrightarrow$ let e be $x \otimes y$ in (let f be $z \otimes w$ in g)

13. • let (let e be $x \otimes y$ in f) be i in g $\hookrightarrow$ let e be $x \otimes y$ in (let f be i in g)

14. • (let e be i in $f)g$ $\hookrightarrow$ let e be i in (fg)

15. • let (let e be i in f) be $z \otimes w$ in g $\hookrightarrow$ let e be i in (let f be $z \otimes w$ in g)

16. • let (let e be i in f) be i in g $\hookrightarrow$ let e be i in (let f be i in g)

reduções η

17. • $\pi_1(t) \times \pi_2(t) \hookrightarrow t$
    • $f^1 \hookrightarrow h$

18. • $\lambda x.tx \hookrightarrow t$

19. • case t use (i_1a) then (i_1a) else use (i_2b) then (i_2b) $\hookrightarrow t$
    • $f[n]^A \hookrightarrow c^A$

20. • let u be $x \otimes y$ in $t[x \otimes y/z] \hookrightarrow t[u/z]$
    • let u be i in $t[i/z] \hookrightarrow t[u/z]$

Alguns casos ilustrativos do uso destas reduções são mostrados a seguir. Nos dois primeiros exemplos, a derivação da esquerda é uma derivação possível de ser obtida neste cálculo, mas nela existe um desvio na construção do termo. A derivação da direita, é obtida aplicando à derivação da esquerda uma das regras de redução anteriores que eliminam a ocorrência desse desvio. No último exemplo, na derivação da esquerda não há um desvio visível mas pode estar mascarado. Uma redução é aplicada para, se for o caso, deixar esse desvio explícito e permitir a aplicação de uma redução posterior que o eliminará.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, x : A \Rightarrow t : B}{\Gamma \Rightarrow (\lambda x.t) : A \multimap B} \quad \Delta \Rightarrow s : A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (\lambda x.t)s : B} \quad \text{reduz-se a} \quad \dfrac{\Gamma, x : A \Rightarrow t : B \quad \Delta \Rightarrow s : A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow t[s/x]}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow r : A}{\Gamma \Rightarrow (i_1 r) : A \oplus B} \quad \Delta, x : A, \Sigma \Rightarrow t : C \quad \Delta, y : B, \Sigma \Rightarrow s : C}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow (\text{case}(i_1 r) \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) : C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow r : A \quad \Delta, x : A, \Sigma \Rightarrow t : C}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow t[r/x] : C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow u : A \oplus B \quad \Delta, x : A, \Sigma \Rightarrow t : C\&D \quad \Delta, y : B, \Sigma \Rightarrow s : C\&D}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow (\text{case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) : C\&D}}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \pi_1(\text{case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) : C}$$

reduz-se a:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow u : A \oplus B \quad \dfrac{\Delta, x : A, \Sigma \Rightarrow t : C\&D}{\Delta, x : A, \Sigma \Rightarrow (\pi_1 t) : C} \quad \dfrac{\Delta, y : B, \Sigma \Rightarrow s : C\&D}{\Delta, y : B, \Sigma \Rightarrow (\pi_1 s) : C}}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow (\text{case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } (\pi_1 t) \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } (\pi_1 s)) : C}$$

Proposição 3.1 *$\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ é demonstrável no sistema de Dedução Natural para LLI sse para qualquer conjunto de variáveis $\{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$ existe um termo $t : A$ tal que $\vdash x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow t : A$ é obtido no Sistema de Termos para LLI.*
Prova: por indução no comprimento da derivação. Os axiomas (base da indução) são traduzidos em axiomas. Os casos indutivos, determinados pela última regra de inferência usada na derivação, são obtidos das hipóteses indutivas e a correspondência entre as regras que definem cada sistema.

A redução de um passo $\longrightarrow$ é definida como o fecho da redução $\hookrightarrow$ sob as regras de formação de termos. A relação $\leadsto$ é definida como o fecho reflexivo-transitivo da redução de um passo:

- $t \leadsto t$
- $t \hookrightarrow s$ então $t \leadsto s$

- $t \rightsquigarrow s$ e $s \rightsquigarrow u$ então $t \rightsquigarrow u$
- $t \rightsquigarrow t'$ e $s \rightsquigarrow s'$ então $ts \rightsquigarrow t's'$
- $t \rightsquigarrow t'$ então $\lambda x.t \rightsquigarrow \lambda x.t'$
- $t \rightsquigarrow t'$ e $s \rightsquigarrow s'$ então $t \times s \rightsquigarrow t' \times s'$
- $t \rightsquigarrow t'$ então $\pi_j t \rightsquigarrow \pi_j t', \quad j = 1, 2$
- $t \rightsquigarrow t'$ então $i_j t \rightsquigarrow i_j t', \quad j = 1, 2$
- $t \rightsquigarrow t'$, $s \rightsquigarrow s'$ e $r \rightsquigarrow r'$ então case r use $(i_1 x)$ then t else use $(i_2 y)$ then s $\rightsquigarrow$ case r' use $(i_1 x)$ then t' else use $(i_2 y)$ then s'
- $t \rightsquigarrow t'$ e $s \rightsquigarrow s'$ então $t \otimes s \rightsquigarrow t' \otimes s'$
- $t \rightsquigarrow t'$ e $s \rightsquigarrow s'$ então let t be $x \otimes y$ in s $\rightsquigarrow$ let t' be $x \otimes y$ in s'

O sistema possui a propriedade da substituição de termos:

Proposição 3.2 *Se* $\vdash \Gamma \Rightarrow t : A$ *e* $\vdash \Delta, x : A \Rightarrow l : B$ *então* $\vdash \Delta, \Gamma \Rightarrow l[t/x] : B$.
Prova: por indução no comprimento da derivação $\Delta, x : A \Rightarrow l : B$. *Veremos só alguns casos.*

Para a base temos que dado $\Gamma \Rightarrow t : A$ *e a derivação* $x : A \Rightarrow x : A$, *então a substituição é o próprio termo* $\Gamma \Rightarrow t : A$.

Para o caso da introdução de um termo do tipo soma, temos: dado $\Gamma \Rightarrow t : A$ *e a derivação*

$$\frac{\Delta, x : A \Rightarrow l : B}{\Delta, x : A \Rightarrow (i_1 l) : B \oplus C}$$

então por hipótese de indução temos que $\vdash \Delta, \Gamma \Rightarrow l[t/x] : B$ *e então aplicando a regra de introdução da soma temos* $\Delta, \Gamma \Rightarrow (i_1 l[t/x]) : B \oplus C$, *ou* $\Delta, \Gamma \Rightarrow (i_1 l)[t/x] : B \oplus C$.

Teorema 3.1 *Seja* $\Pi : A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ *uma derivação no sistema de Dedução Natural, e seja* $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow t : A$ *o termo relacionado à derivação. Então* t *pode ser reduzido a um termo* t' *em forma normal que representa a derivação normal* Π' *correspondente a* Π.
Prova: é suficiente notar que cada passo da contração de termos corresponde a uma redução no processo de normalização (em Dedução Natural). Assim, por indução no comprimento do termo t, *que está relacionado com o comprimento da derivação* Π, *prova-se a terminação do processo de contração. Os passos do processo de normalizaçao encontram-se, por exemplo, em [HPdP92, Gir89].*

Corolário 3.1 $\rightsquigarrow$ *é normalizável.*
Prova: direta porque $\hookrightarrow$ *é normalizável pelo teorema anterior.*

3.1.3 Semântica

Nesta seção são apresentadas semânticas da lógica LLI, primeiro através de modelos algébricos e logo depois através de modelos categóricos.

Modelo Algébrico

Existem na literatura várias notações diferentes para apresentar o modelo algébrico de LLI. Será seguida aqui a notação de [HdP91], apresentando primeiro a estrutura necessária para explicar o conectivo de tensor. Acrescenta-se depois a estrutura correspondente ao conectivo de implicação e finalmente os aditivos.

Isto permite construir modelos independentes para cada conectivo da lógica. A única ligação existente entre um conectivo e os restantes é entre ele e o tensor. Isto se deve ao fato de que o tensor é o conectivo que "internaliza" no cálculo o efeito de ter uma vírgula entre duas fórmulas. O comportamento da vírgula está explicado através das regras estruturais do cálculo e que o tensor se comporta da mesma forma que a vírgula está estabelecido através das regras $\otimes_e, \otimes_d$.

Lembramos primeiro que um par $(M, \leq)$, onde M é um conjunto e $\leq$ é uma relacão binária definida em M tal que $\leq$ é ref l exiva, transitiva e antisimétrica, é chamado de conjunto parcialmente ordenado ("poset"). E uma tripla $(N, \circ, e)$, onde N é um conjunto, $\circ : N \times N \rightarrow N$ é uma operação associativa e com elemento neutro $e \in N$, é chamada de monóide (ou estrutura monoidal). Se $\circ$ é comutativa, então $(N, \circ, e)$ é um monóide simétrico.

Definição 3.1 *Um* monóide ordenado *é um conjunto parcialmente ordenado* $(M, \leq)$ *com uma estrutura monoidal simétrica compatível* $(M, \circ, e)$. *Uma estrutura monoidal compatível significa que: Se* $a \leq b$ *então* $a \circ c \ \leq \ b \circ c$, *para todo* c *em* M.

Como é usual, um monóide ordenado será representado por uma quádrupla $(M, \leq, \circ, e)$.

Interpretando as variáveis proposicionais da linguagem de LLI no conjunto M através de uma função de interpretação $\mathcal{I}$, o conectivo $\otimes$ como a operação monoidal $\circ$ e a fórmula identidade I como o elemento e, pode-se estender a interpretação $\mathcal{I}$ às fórmulas complexas. Interpretando o simbolo de dedutibilidade $\Rightarrow$ como $\leq$, podemos provar por indução no comprimento da derivação que se $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ então em qualquer monóide ordenado temos $\mathcal{I}(A_1) \circ \ldots \circ \mathcal{I}(A_n) \leq \mathcal{I}(B)$. Para obter que se em qualquer monóide ordenado temos $\mathcal{I}(A_1) \circ \ldots \circ \mathcal{I}(A_n) \leq \mathcal{I}(B)$ então $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ é suficiente mostrar que a álgebra de Lindembaum deste fragmento de LLI é um monóide ordenado (já que se dois elementos estão relacionados em todos os monóides, em particular estão relacionados na álgebra de Lindembaum, mas os elementos relacionados nesta álgebra correspondem exatamente aos sequentes prováveis). Além disto, como $\vdash \Rightarrow B$ sse $\vdash I \Rightarrow B$ obtemos que $e \leq \mathcal{I}(B)$ como um caso particular dos resultados acima. Por tanto, qualquer monóide ordenado $(M, \leq, \circ, e)$ modela algebricamente o fragmento de LLI que consiste do conectivo tensor e a identidade I, [HdP91].

Definição 3.2 *Um* monóide fechado *é um monóide ordenado* $(M, \leq, \circ, e)$ *tal que para cada* a, b *em* M *existe um maior* x *em* M *tal que* $x \circ a \ \leq \ b$ *(ou, o que é o mesmo,* $a \circ x \ \leq \ b$*). Este elemento é denotado por* $a \multimap b$ *e é chamado o pseudo-complemento (ou "resíduo" [MR72]) de* a *em relação a* b.

Um monóide fechado será representado por uma quíntupla $(M, \leq, \circ, e, \multimap)$. Note que se $(M, \leq, \circ, e)$ é um monóide ordenado tal que $(M, \circ, e)$ seja um grupo então ele é um monóide fechado.

A classe dos monóides fechados modela o fragmento de LLI que consiste dos conectivos $\otimes, \multimap$ e a identidade I,[HdP91], já que podemos interpretar o conectivo $\multimap$ como o pseudo-complemento e obter $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ sse $\mathcal{I}(A_1) \circ \ldots \circ \mathcal{I}(A_n) \leq \mathcal{I}(B)$, e como um caso particular disto, $\vdash\Rightarrow B$ sse $e \leq \mathcal{I}(B)$.

Definição 3.3 *Um* monóide fechado aditivo $(M, \leq, \circ, e, \multimap, \vee, 0, \wedge, 1)$ *é um monóide fechado* $(M, \leq, \circ, e, \multimap)$ *com duas operações binárias tais que:*

- $a \wedge b \leq a$ *e* $a \wedge b \leq b$
- *se* m *é tal que* $m \leq a$ *e* $m \leq b$ *então* $m \leq a \wedge b$
- *1 é a identidade de* $\wedge : a \wedge 1 = a = 1 \wedge a$
- $a \leq a \vee b$ *e* $b \leq a \vee b$
- *se* m *é tal que* $a \leq m$ *e* $b \leq m$ *então* $a \vee b \leq m$
- *0 é a identidade de* $\vee : a \vee 0 = 0 \vee a = a$

Em outras palavras, $\vee$ é o o supremo binário para $\leq$ em M, e $\wedge$ o ínfimo. A classe dos monóides fechados aditivos é um modelo algébrico de LLI, [HdP91] (onde esta estrutura é chamada de "additive lineal").

Observe que um monóide fechado aditivo tem a seguinte propriedade, observada em [HdP91]: $a \circ (b \vee c) = (a \circ b) \vee (a \circ c)$.

Esta estrutura tem recebido diferentes nomes na literatura, por exemplo ela é chamada de uma Álgebra de Lafont em [Age91], ou de Álgebra de Consequência em [Amb91]. Note que tem-se considerado que o modelo algébrico para LLI são os chamados *quantales*, mas a completude dos quantales (i.e., que o reticulado subjacente seja completo) não é necessária para modelar a lógica linear intuicionista proposicional.

Exemplos de monóides fechados que modelam LLI são as álgebras de Heyting, onde $\circ$ coincide com $\wedge$ e I coincide com 1.

Modelo Categórico

Seguindo a disposição da seção anterior, apresentamos primeiro quais são as categorias que correspondem a ter na lógica só o conectivo $\otimes$, para logo depois acrescentar os demais símbolos lógicos. Obteremos, desta maneira, modelos categóricos onde a construção que modela um conectivo é independente das outras construções a menos do tensor, o qual dá significado à vírgula entre fórmulas.

Definição 3.4 *Uma* categoria monoidal *é uma categoria* $\mathbf{C}$ *junto com um bi-funtor (covariante nas duas componentes)* $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *e um objeto* $I \in \mathbf{C}$ *tal que existem os seguintes três isomorfismos naturais:*
$a : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$;
$b : I \otimes X \xrightarrow{\sim} X$;
$b' : X \otimes I \xrightarrow{\sim} X$.

Estes isomorfismos satisfazem às seguintes equações:
$b_I = b'_I$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes C) \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "id \otimes b"'] & & (A \otimes I) \otimes C \arrow[dl, "b' \otimes id"] \\
& A \otimes C &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id \otimes a"'] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "a"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "a"] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "a \otimes id"']
\end{tikzcd}$$

Definição 3.5 *Uma* categoria monoidal simétrica *é uma categoria monoidal* $\mathbf{C}$ *tal que existe o isomorfismo natural:*
$c : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X.$

Este isomorfismo satisfaz às seguintes equações:
$c \,.\, c = id$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id \otimes c"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "c"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "a"] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "a"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "c \otimes id"] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes C) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id \otimes b"'] & (A \otimes I) \otimes C \arrow[d, "c \otimes id"] \\
A \otimes C & (I \otimes A) \otimes C \arrow[l, "b \otimes id"]
\end{tikzcd}$$

O isomorfismo natural c é chamado de "twist isomorphism" em alguns trabalhos ([Ben87]).

Podemos obter uma interpretação categórica do fragmento de LLI que consiste do conectivo $\otimes$ e da identidade I da seguinte maneira, [BBdPH92]: interpretan-se as fórmulas da linguagem de LLI como objetos da categoria simétrica monoidal C, o conectivo $\otimes$ como o funtor tensor $\otimes$, a fórmula identidade I como o objeto I identidade do tensor e o simbolo de dedutibilidade $\Rightarrow$ como a existência de morfismos na categoria. Associando-se os axiomas $A \Rightarrow A$ com os morfismos identidades $id_A : A \to A$, temos por indução no comprimento da derivação que se $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ então existe um morfismo $f : \mathcal{I}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{I}(A_n) \to \mathcal{I}(B)$ e já que $\vdash \Rightarrow B$ sse $\vdash I \Rightarrow B$ temos então que existe um morfismo $h : I \to \mathcal{I}(B)$. Por tanto podemos dizer que, uma categoria simétrica monoidal modela categoricamente o fragmento de LLI que consiste do conectivo $\otimes$ e da identidade I.

A noção de monóide fechado corresponde à seguinte definição:

Definição 3.6 *Uma* categoria simétrica monoidal fechada *(também chamada de autônoma) é uma categoria simétrica monoidal* $\mathbf{C}$ *tal que o funtor* $\_ \otimes A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *tem como adjunto à direita o funtor (associado ao) de internal-hom* $A \multimap \_ : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$*.*

Que o funtor $\_ \otimes A$ tem este adjunto à direita significa que para cada X, A, Y em $\mathbf{C}$: $hom(X \otimes A, Y) \cong hom(X, A \multimap Y)$. Uma categoria simétrica monoidal fechada $\mathbf{C}$ será representada por uma quádrupla $(\mathbf{C}, \otimes, I, \multimap)$.

Em ([EK66, Bar79]) é mostrado que em uma categoria simétrica monoidal fechada (representando o funtor de internal-hom por $[\_, \_]$) têm-se as seguintes equivalências:
$A \cong [I, A]$, $[V, [V', V'']] \cong [V', [V, V'']]$
e também que podem-se definir as transformações naturais:
$ev_{A,B} : [A, B] \otimes A \to B$
$d_{V,V',V''} : [V', V''] \to [[V, V'], [V, V'']]$

$j_V : I \to [V, V]$
$e_{V,V',V''} : [V, V'] \to [[V', V''], [V, V'']]$

Um exemplo deste gênero de categorias é a categoria **Ab**, que tem como seus objetos os grupos abelianos e os homomorfismos de grupos como os morfismos da categoria. O tensor $A \otimes B$ de dois grupos A e B é o objeto tal que para qualquer outro grupo abeliano C e qualquer função bilinear $f : A \times B \to C$, há um único homomorfismo $h : A \otimes B \to C$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} AxB \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes B \arrow[d, dashed, "h"] \\ & C \end{tikzcd}$$

A identide deste tensor é o grupo Z dos números inteiros. O adjunto deste funtor para objetos A, B é dado pelo grupo abeliano dos morfismos de B em A.

Uma categoria simétrica monoidal fechada modela categoricamente o fragmento de LLI que consiste dos conectivos $\otimes, \multimap$ e a identidade I, [BBdPH92]. Interpretando-se o conectivo $\multimap$ como o funtor de internal-hom pode-se obter que sequentes demonstráveis têm um correspondente morfismo na categoria, em [BBdPH92] é mostrado como os morfismos que se reduzem correspondem ao mesmo morfismo na categoria.

Definição 3.7 *Uma* categoria linear *é uma categoria simétrica monoidal fechada com produto e coproduto para cada par de objetos da categoria e com objetos terminal e inicial.*

Uma categoria linear é um modelo categorico para LLI, como apresentado em [GL87] e em [Tro90, pag 56] onde esta estrutura é chamada de categoria intuicionista linear. O produto modela o conectivo & e o coproduto modela o conectivo $\oplus$. Além disto, as reduções entre derivações são equações válidas nas categorias lineares.

Exemplos destas categorias são as categoria cartesianas fechadas com coprodutos (ou categorias bicartesianas fechadas).

Uma categoria linear modela o cálculo LLI, mas produtos e coprodutos poderiam ser fracos, onde a propriedade universal não seja verdadeira. Um modelo para LLI com coprodutos fracos é a Categoria Dialética **DC**, apresentado em [dP88] (cf. Apêndice D).

3.2 A Lógica $\mathbf{R}^-$

Nesta seção acrescenta-se à lógica LLI a possibilidade de contrair ocorrências repetidas de uma mesma fórmula.

O Cálculo de Sequentes e a regra da Contração

No Cálculo de Sequentes isto representa acrescentar a LLI a regra chamada da contração somente do lado esquerdo do símbolo de sequentes $\Rightarrow$, isto é deve-se acrescentar a regra:

$$\downarrow \frac{\Gamma, A, A, \Gamma' \ \Rightarrow \ C}{\Gamma, A, \Gamma' \ \Rightarrow \ C} \quad (C)$$

somente valendo no sentido de cima para baixo. Neste novo cálculo é possível obter uma derivação dos seguintes sequentes $A \ \Rightarrow A \otimes A$, $\ A\&B \Rightarrow A \otimes B$, mas não de suas inversas.

O Teorema de Eliminação do corte vale também para este caso (cf. Apêndice B).

A primeira apresentação usando sistema de Sequentes, livre da regra do Corte, para o fragmento implicacional desta lógica encontra-se em [Kri59], onde é obtida a partir da formulação para a Lógica Clássica LK, restringindo-se a regra do $\multimap_r$ de maneira que ela possua só uma fórmula do lado direito do sequente e abandonando a regra da Atenuação.

Sistema Axiomático do gênero Hilbert

Acrescentamos ao sistema axiomático correpondente a LLI o seguinte axioma:

$(A \multimap (A \multimap B)) \multimap (A \multimap B)$ (contração)

A noção de dedução é definida como no caso para LLI, mas na regra que junta árvores:

$$\frac{\Delta \vdash C \quad \Gamma' \vdash C \multimap B}{\Sigma \vdash B}$$

Σ é um multiset que é uma contração dos multisets Δ, Γ', [Avr88]. Este sistema correponde ao fragmento positivo da chamada lógica de relevância R^- com cotenabilidade e sem a distribuição dos aditivos. O fragmento implicacional de esta lógica, $\mathrm{R}_\multimap$ ou R_I, é chamado de teoria fraca da implicação de Church.

Dedução Natural

O sistema de Deducão Natural, num estilo de sequentes, para representar LLI com a contração de fórmulas é obtido a partir do sistema para LLI acrescentando-se a seguinte regra:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, A, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B}$$

Esta é a regra num estilo de sequentes de Dedução Natural que corresponde à regra:

$$\frac{\begin{matrix} \\ \vdots \\ A^z \end{matrix} \quad \begin{matrix} A^x, A^y \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}$$

onde A^x, A^y, A^z significam ocorrências diferentes da fórmula A. Numa formulação de Dedução Natural como a usada em [Pra65], esta última regra permite contrair as diferentes ocorrências de uma mesma fórmula. Na verdade, esta regra pode ser considerada como uma regra de *substituição múltiple*.

Neste sistema letras gregas maiúsculas denotam multisets de hipóteses, mas com a regra adicional que permite "colar" duas ocorrências da mesma fórmula. Este sistema corresponde ao apresentado em [Avr88, pag.167], onde define a relação de consequência lógica para a lógica R com uma contração dos multisets de hipóteses.

Proposição 3.3 *O sequente $\Gamma \Rightarrow A$ é demonstrável no Cálculo de Sequentes para LLI mais a regra da contração sse $\Gamma \Rightarrow A$ é demonstrável na formulação em dedução natural acima.*
Prova: por indução no comprimento da derivação de $\Gamma \Rightarrow A$. Por exemplo, para o caso da regra da Contração temos que dada uma derivação de $\Gamma \Rightarrow A$ no Cálculo de Sequentes, onde a última regra aplicada é a regra da contração, i.e.

$$\downarrow \frac{\Delta, B, B, \Sigma \;\Rightarrow\; A}{\Delta, B, \Sigma \;\Rightarrow\; A}$$

por hipótese inductiva, a derivação do sequente superior corresponde com uma derivação em Dedução Natural: $\Delta, B, B, \Sigma \;\Rightarrow\; A$ e assim obtem-se:

$$\frac{B \Rightarrow B \quad \Delta, B, B, \Sigma \Rightarrow A}{\Delta, B, \Sigma \Rightarrow A}$$

Por outro lado, se temos uma derivação de $\Gamma \Rightarrow A$ no sistema de Dedução Natural onde a última regra aplicada é a substituição múltiple,i.e.

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow B \quad \Delta, B, B, \Sigma \Rightarrow A}{\Delta, \Gamma', \Sigma \Rightarrow A}$$

por hipótese indutiva, temos as seguintes derivações no Cálculo de Sequentes: $\Gamma' \Rightarrow B$ e $\Delta, B, B, \Sigma \Rightarrow A$. Aplicando cortes sucessivos nessas duas ocorrências de B obtemos o sequente $\Delta, \Gamma', \Gamma', \Sigma \Rightarrow A$. Por adequadas permutações e contrações obtemos o sequente desejado: $\Delta, \Gamma', \Sigma \Rightarrow A$.

Teorema 3.2 *Cada sequente no sistema de Dedução Natural para R^-, pode ser derivado através de uma demonstração em forma normal.*
A prova é um procedimento que analisa cada um dos casos onde podem ocorrer fórmulas máximas e as elimina.

A regra de substituição múltiple não produz novas fórmulas máximas em relação a LLI, mas pode mascarar ocorrências deste tipo. A idéia é acrescentar reduções permutativas. Estas reduções aplicam-se no caso em que a regra de substituição múltiple interage com outras regras e produz fórmulas máximas ocultas. As reduções permutativas mudam a ordem da aplicação das regras, permitindo continuar com o processo de normalização (as reduções permutativas para R^- são apresentadas na seção seguinte na forma de reduções de termos).

3.2.1 O Cálculo de Termos

O λ-cálculo correspondendo à idéia de impedir a introdução de ocorrências irrelevantes numa derivação é o chamado λI-calculus, apresentado por Church em 1941, (veja, por exemplo, [Bar85]), onde só é permitida a formação de um termo de tipo $A \multimap B$ se a variável x de tipo A aparece entre as variáveis livres do termo $e : B$ a abstrair.

Mas, aproveitando o cálculo de termos para LLI, pode-se obter um cálculo de termos que permite contrair ocorrências repetidas de uma mesma fórmula, isto é correspondendo à lógica R^-. Para isto, ao cálculo de termos de LLI da seção anterior, deve-se acrescentar a seguinte regra de formação de termos:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : A \qquad \Delta, x : A, y : A \Rightarrow s : B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (\text{ copy } t \text{ as } x, y, \text{ in } s) : B}$$

Com as seguintes reduções permutativas:

- $(\text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } f)g \hookrightarrow \text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } (fg)$
- $\text{let } (\text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } f) \text{ be } z \otimes w \text{ in } g \hookrightarrow \text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } (\text{ let } f \text{ be } z \otimes w \text{ in } g)$
- $\text{let } (\text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } f) \text{ be } i \text{ in } g \hookrightarrow \text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } (\text{ let } f \text{ be } i \text{ in } g)$
- $\text{copy } (\text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } f) \text{ as } z, w \text{ in } g \hookrightarrow \text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } (\text{ copy } f \text{ as } z, w \text{ in } g)$
- $\pi_j(\text{copy } e \text{ as } x, y \text{ in } f) \hookrightarrow \text{ copy } e \text{ as } x, y \text{ in } \pi_j(f) \quad \text{j=1,2}$
- $\text{case } (\text{copy } e \text{ as } x, y \text{ in } f) \text{ use } i_1(z) \text{ then } t \text{ else use } i_2(w) \text{ then } s \hookrightarrow$
  $\text{copy } e \text{ as } x, y \text{ in(case } f \text{ use } i_1(z) \text{ then } t \text{ else use } i_2(w) \text{ then } s)$

1. $\text{copy } (e \times t) \text{ as } x, y \text{ in } f \hookrightarrow$
   $\text{copy}_i\ z_i \text{ as } x_i, y_i \text{ in } f[e \times t/x, e \times t/y]$. $\text{copy}_i\ z_i$ as x_i, y_i $0 \leq i \leq n$ significa aplicar várias vezes a regra "copy" para eliminar as n ocorrências repetidas das hipóteses de e e t.

2. $\text{copy } (i_1 e) \text{ as } x, y \text{ in } f \hookrightarrow$
   $\text{copy } e \text{ as } z, w \text{ in } f[(i_1 z)/x, (i_1 w)/y]$

3. $\text{copy } (i_2 e) \text{ as } x, y \text{ in } f \hookrightarrow$
   $\text{copy } e \text{ as } z, w \text{ in } f[(i_2 z)/x, (i_2 w)/y]$

4. $\text{copy } (e \otimes t) \text{ as } x, y \text{ in } f \hookrightarrow$
   $\text{copy } t \text{ as } z, w \text{ in } (\text{ copy } e \text{ as } z', w' \text{ in } f[z \otimes z'/x, w \otimes w'/y])$

5. $\text{copy } (i) \text{ as } x, y \text{ in } f \hookrightarrow f$

6. $\text{copy } (\lambda x.t) \text{ as } x, y \text{ in } f \hookrightarrow$
   $\text{copy}_i\ z_i \text{ as } x_i, y_i \text{ in } f[t/x, t/y]$. $\text{copy}_i z_i$ as x_i, y_i $0 \leq i \leq n$ significa aplicar várias vezes a regra "copy" para eliminar as n ocorrências repetidas das hipóteses de t.

Também temos a redução: se $t \rightsquigarrow t'$ e $s \rightsquigarrow s'$ então $\text{copy } t \text{ as } x, y, \text{ in } s \rightsquigarrow \text{copy } t' \text{ as } x, y, \text{ in } s'$.

O primeiro grupo de reduções aplica-se quando uma regra de eliminação é usada após uma contração. Isto se reduz a eliminar primeiro e depois contrair as variáveis.

O segundo grupo de reduções aplica-se quando o termo que substitui ocorrências repetidas de uma variável, é construído, no último passo, por uma regra de introdução. Neste caso, uma fórmula máxima pode ficar mascarada e o processo de normalização deve pô-la em evidência para que possa ser futuramente eliminada. Por exemplo (usando a Dedução Natural) no caso da redução onde se introduz um termo $\otimes$ pode-se ter:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\otimes B}\qquad \begin{matrix}\dfrac{\dfrac{A\otimes B\quad \begin{matrix}A,B\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\quad\dfrac{A\otimes B\quad \begin{matrix}A,B\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}}{}\\ \vdots\\ D\end{matrix}}{D}$$

que se reduz a:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ B\end{matrix}\quad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\quad B}{A\otimes B}\quad\begin{matrix}A,B\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\quad\dfrac{\dfrac{A\quad B}{A\otimes B}\quad\begin{matrix}A,B\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}}{D}}{D}}{D}$$

sendo que a fórmula máxima $A \otimes B$ pode ser eliminada pela redução correspondente.

Proposição 3.4 *$\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ é demonstrável no sistema de Dedução Natural para R^- sse para qualquer conjunto de variáveis $\{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$ existe um termo $t : A$ tal que $\vdash x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow t : A$ é obtido no Sistema de Termos para R^-.*
Prova: num sentido é por indução na complexidade da fórmula A, no outro por indução na estrutura do termo t.

Proposição 3.5 *Se $\Gamma \Rightarrow t : A$ e $\Delta, x : A \Rightarrow l : B$ então $\Gamma, \Delta \Rightarrow l[t/x] : B$.*
A prova é similar ao caso de LLI, pois o fato importante é que os antecedentes dos sequentes são conjuntos disjuntos de variáveis com seu tipo.

Teorema 3.3 *$\rightsquigarrow$ é normalizável.*
Prova: similar à prova para o sistema de Dedução Natural.

3.2.2 A Semântica de R^-

Como na seção anterior apresenta-se primeiro uma semântica algébrica para logo depois passar a uma semântica categórica.

A semântica algébrica

Uma maneira de modelar a regra da contração

$$\frac{\Gamma, A, A, \Gamma' \ \Rightarrow\ C}{\Gamma, A, \Gamma' \ \Rightarrow\ C}\ (C)$$

é exigir que para cada objeto a num monóide fechado $(M, \leq, \circ, e, \multimap)$ aconteça que $a \leq a \circ a$, isto é que a operação monoidal seja "quadrado-crescente" ("square-increasing"). Porque, assim, se $b \circ a \circ a \circ b' \ \leq\ c$, então pela compatibilidade temos que, $b \circ a \circ b' \ \leq b \circ a \circ a \circ b' \ \leq\ c$.

Então temos a seguinte definição:

Definição 3.8 *Um* monóide com diagonal *é um monóide ordenado* $(M, \leq, \circ, e)$ *onde* $\circ$ *é* quadrado-crescente *(ou* semi-idempotente*), i.e.,* $a \leq a \circ a$ *para todo* a *em* M*.*

Note que multisets com a inclusão, união, diferença e o multiset vazio são exemplos de monóides fechados com diagonal, enquanto as sequências com a concatenação são exemplos de monóides fechados semi-idempotentes não comutativos.

A classe dos monóides fechados, aditivos, com diagonal é um modelo algébrico para R^-, [MR72].

A semântica categórica

Neste modelo serão generalizadas as idéias do modelo algébrico.

Definição 3.9 *Seja* $\mathbf{C} = (C, \otimes, I)$ *uma categoria simétrica monoidal.* $\mathbf{C}$ *tem* diagonal *se existe uma transformação natural* $\delta : Id \longrightarrow \Delta'_\otimes$*, onde* $\Delta'_\otimes$ *é o funtor diagonal tensorial, definido por* $\Delta'_\otimes(X) = X \otimes X$ *(não confundir com o mais usual funtor diagonal cartesiano* $\Delta_\times(X) = X \times X$*).*

Além disto, os seguintes diagramas têm que comutar:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & A \otimes A \arrow[r, "id \otimes \delta"] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "a"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "\delta \otimes id"] & & (A \otimes A) \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, "id"] & \\ I \otimes I \arrow[r, "b"'] & I \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\ A \otimes A \arrow[r, "c"'] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

Um exemplo destas categorias é a categoria $\mathbf{Set}_\star$ de conjuntos "marcados" ("pointed sets"). Esta categoria tem como objetos conjuntos não vazios com um elemento selecionado, chamado de ponto base ("base-point") e os morfismos são as funções que preservam o ponto base.

O produto tensorial de dois objetos quaisquer desta categoria $< P, \star_P >$ e $< Q, \star_Q >$, é definido por $< P, \star_P > \otimes < Q, \star_Q > = < (P - \{*_P\}) \times (Q - \{*_Q\}) \cup \{(*_P, *_Q)\}, (*_P, *_Q) >$. A unidade do tensor é qualquer conjunto "marcado" que possua dois elementos $< \{p, q\}, p >$.

O adjunto à direita $A \multimap B$, $< R, \star_R >$, é o conjunto marcado definido por:
$< \{f :< A, \star_A > \rightarrow < B, \star_B > \ / \ f$ preserva ponto base$\}, f(x) = \star_B \ , \ \forall x \in A >$.

A diagonal para um conjunto "marcado" $< A, \star_A >$ é definido por $a \rightarrow < a, a >$ se $a \neq \ \star_A$ e, $\star_A \longrightarrow \star_{A \otimes A}$.

A categoria dos conjuntos parcialmente ordenados com funções estritas, que preservam o último elemento do reticulado ("the least element"), tem uma estrutura monoidal, dada pelo chamado "smash product" (se D_1, D_2 são conjuntos parcialmente ordenados, $D_1 \otimes D_2 = \{(x, y) \ / \ x = \perp$ sse $y = \perp\}$), com diagonal $\delta : D \rightarrow D \otimes D$, dada por $\delta(x) = (x, x)$, [Jac91]. Outro exemplo de categoria simétrica monoidal com diagonal, também observado no trabalho citado, é a categoria $\mathbf{RC}_{est}$ dos reticulados completos com funções estritas.

Uma categoria linear $\mathbf{C}$ com diagonal é um modelo categórico para R^- ([Sza78]). Dado um morfismo $f : \Gamma \otimes A \otimes A \otimes \Gamma' \rightarrow B$ correspondente ao sequente superior da regra da contração, precompondo com o morfismo $id_\Gamma \otimes \delta_A \otimes id_{\Gamma'} : \Gamma \otimes A \otimes \Gamma' \rightarrow \Gamma \otimes A \otimes A \otimes \Gamma'$, obtemos um morfismo correspondente ao sequente inferior da regra, com isto garantimos que $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ então existe na categoria um morfismo $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \rightarrow B$. Como um caso particular, temos que se $\vdash \Rightarrow B$ então existe um morfismo $f : I \rightarrow B$. Além disto, temos que reduzões entre derivações

correspondem ao mesmo morfismo. Por exemplo, a redução
$\pi_1($ copy $z : A$ as x, y in $f : C \times D) \hookrightarrow$ copy $z : A$ as x, y in $\pi_1(f : C \times D)$
corresponde à equação $\Pi_{C,D}.(f.m_A) = (\Pi_{C,D}.f).m_A$ entre morfismos.
A redução: copy (copy $x' : A$ as x, y in $f : C)$ as z, w in $g \hookrightarrow$ copy $x' : A$ as x, y in (copy f : C as z, w in $g)$ corresponde à equação $g.m_C.(f.m_A) = (g.m_C.f).m_A$ entre morfismos.
A redução: copy $(i_1 e) : C \oplus D$ as x, y in $f : A \hookrightarrow$ copy $e : C$ as z, w in $f[(i_1 z)/x, (i_1 w)/y] : A$ corresponde ao seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
C \oplus D \arrow[r, "\delta"] & C \oplus D \otimes C \oplus D \arrow[r, "f"] & A \\
C \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\delta"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & C \otimes C \arrow[u, "i \otimes i"] \arrow[r, "i \otimes i"] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & C \oplus D \otimes C \oplus D \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}
$$

(1) comuta porque δ é uma transformação natural, e (2) comuta trivialmente.

3.3 A lógica LLI e outras extensões

Nesta seção apresentam-se algumas outras extensões da lógica LLI que surgem bastante naturalmente da análise feita nas seções anteriores.

3.3.1 A lógica LLI mais Contração e Expansão

Num sistema de Cálculo de Sequentes com as três regras estruturais, como LJ ou LK, todas estas regras valem naturalmente no sentido de cima-para-baixo, e com a ajuda das outras regras é possível derivar o outro sentido (pelo menos para algumas delas). Mas, quando alguma das regras estruturais é proibida, pode-se perder, entre outras propriedades, a validade de algum dos sentidos de baixo-para-cima das outras regras que ainda continuam no sistema. Se é desejado que o sistema possua algumas das propriedades que foram perdidas então elas devem ser reintroduzidas no cálculo.

Este é o caso quando a regra da atenuação é proibida no sistema LJ. Em LJ a regra da contração é válida nos dois sentidos, de cima-para-baixo e de baixo-para-cima, já que este último sentido é um caso particular da regra de atenuação, o qual é de importância quando interessa o número de vezes em que uma fórmula aparece numa derivação.

Obtêm-se, então, duas lógicas subestruturais diferentes. Um é o sistema que chamamos nas seções anteriores de LLI mais a contração (i.e. a regra vale só no sentido de cima-para-baixo). Outro é o sistema onde tanto esta regra quanto sua inversa (chamada de repetição de premissas em[Rea88] ou de anticontração ou expansão em [Tam71]) são permitidas. Estes dois sistemas correspondem a duas lógicas relevantes diferentes apresentadas nos trabalhos de Anderson e Belnap. Já foi mostrado nas seções anteriores como a lógica LLI mais a contração corresponde exatamente à lógica relevante R sem a distribuição dos aditivos. A segunda possibilidade corresponde à lógica relevante chamada RM em [AB75, Dun86].

A sintaxe da lógica RM

O Cálculo de Sequentes para RM é definido acrescentando ao Cálculo de Sequentes para LLI, a seguinte regra:

$$\uparrow\downarrow \dfrac{\Gamma, A, A, \Gamma' \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, A, \Gamma' \;\Rightarrow\; C}$$

Uma consequência da validade desta regra é que as sequências de hipóteses no lado esquerdo do símbolo $\Rightarrow$ podem ser interpretadas como conjuntos. Isto é a idéia de diferentes ocorrências de uma mesma fórmula numa derivação foi totalmente perdida. Neste sistema é possível provar $A \overset{\leftrightarrows}{\Rightarrow} A \otimes A$.

Observe-se que o sentido $\uparrow$ desta regra é realmente um caso particular da regra de atenuação, onde a fórmula que se introduz já pertencia ao conjunto de hipóteses do sequente.

O resultado obtido ao acrescentar esta forma particular de atenuação pode ser alcançado através de diferentes maneiras. Na verdade, a regra da anti-contração é equivalente à regra chamada *mistura* ("mingle"):

$$mis \dfrac{\Sigma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow A}{\Sigma, \Gamma \Rightarrow A}$$

Facilmente pode-se ver a equivalência entre os sistemas obtidos com o intercâmbio das regras de mistura e da expansão:

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow A}{\Sigma, \Gamma \Rightarrow A \otimes A}\otimes_d \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A}\otimes_e}{A \otimes A \Rightarrow A}exp}{\Sigma, \Gamma \Rightarrow A}corte$$

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A}mistura \qquad A, \Gamma \Rightarrow B}{A, A, \Gamma \Rightarrow B}corte$$

Alternativamente pode-se também apresentar o sistema de Sequentes para RM como o Cálculo de Sequentes para LLI, onde os contextos (i.e., as letras maiúsculas gregas), são interpretados como sequências sem repetições (ou como conjuntos, ao tirar também a regra da Permutação) e não como multisets. O Teorema da Eliminação do corte, então, é provado como em LLI.

Por outro, lado o sistema axiomático para esta lógica é o sistema axiomático de LLI junto com os seguintes dois axiomas:
$(A \multimap (A \multimap B)) \multimap (A \multimap B)$ (contração)
$A \multimap (A \multimap A)$ (mistura)

Note que o axioma chamado de mistura é equivalente ao axioma da expansão, o qual é realmente a inversa do axioma da contração:
$(A \multimap B) \multimap (A \multimap (A \multimap B))$. Neste caso uma derivação é definida como em LLI, mas usando conjuntos no lugar de multisets de premissas, [Avr88].

Este sistema corresponde ao fragmento positivo da chamada lógica RM (sem a distribuição dos aditivos) em [AB75, Dun86]. Surpreendentemente, foi provado que o fragmento implicacional de R, $R_{\multimap}$, estendido com o axioma de mistura, chamado $RM0_{\multimap}$, não é o fragmento implicacional de RM. Também foi demostrado que RM não é uma extensão conservativa de $RM0_{\multimap}$ ([AB75, Avr87]). A lógica RM é decidível, [AB75, pag 413]. Anderson e Belnap acrescentaram o axioma de mistura porque pensaram que era natural que as premissas fossem conjuntos e não sequências. Realmente, parece muito estranho que um argumento válido deixe de sê-lo porque foram repetidas algumas vezes as mesmas premissas. Mas esta parece ser a conclusão a que o critério de relevância leva [AB75, p. 395]. Na verdade, RM perde características próprias da relevância.

O sistema de Dedução Natural que corresponde ao Cálculo de Sequentes acima é o sistema de Dedução Natural que corresponde a LLI mas onde as letras maiúsculas gregas são interpretadas como conjuntos de fórmulas e não como multisets de fórmulas. De novo, esta definição coincide com a apresentada em [Avr88, 166,167] para a lógica relevante que contém a regra mistura.

O cálculo de termos para RM é também obtido a partir do cálculo para LLI, mas onde as letras gregas maiúsculas são interpretadas como conjuntos de variáveis.

A semântica para RM

Como já foi mostrado por Meyer em [MR72] uma semântica algébrica para a lógica RM é a classe dos monóides fechados aditivos $(M, \leq, \circ, e, \multimap, \wedge, 1, \vee, 0)$ onde $\circ$ é tanto *quadrado-crescente* quanto *quadrado-decresciente* ("square-decreasing"), $a \circ a \leq a$, i.e., $\circ$ é *idempotente.*

Conjuntos com a inclusão, união, diferença e o conjunto vazio são exemplos de monóides fechados idempotentes. Mas $(N, \geq, +, 0, \dot{-})$, i.e. o conjunto dos números naturais com ordem inversa, soma e diferença truncada ($b \dot{-} c$ é $b - c$ se $b > c$ e, 0 em qualquer outro caso) é um exemplo de monóide fechado quadrado-decrescente.

Por outro lado, para modelar categoricamente a inversa da regra da Contração, precisa-se da noção "inversa" do fato de um tensor ter diagonal.

Definição 3.10 *Seja* $\mathbf{C} = (C, \otimes, I)$ *uma categoria simétrica monoidal.* $\mathbf{C}$ *tem* antidiagonal *se existe uma transformação natural* $\delta' : \Delta'_{\otimes} \longrightarrow Id$*, onde o funtor* $\Delta'_{\otimes}(X) = X \otimes X$ *é o funtor diagonal.*

Além disto, os seguintes diagramas (inversos dos diagramas para a noção de diagonal) devem comutar:

$$
\begin{tikzcd}
A & A\otimes A \arrow[l, "\delta'"'] & A\otimes(A\otimes A) \arrow[l, "id\otimes\delta'"'] \arrow[d, "a"] \\
A\otimes A \arrow[u, "\delta'"] & & (A\otimes A)\otimes A \arrow[ll, "\delta'\otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A & \\
A\otimes A \arrow[u, "\delta'"] & A\otimes A \arrow[ul, "\delta'"'] \arrow[l, "c"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I & \\
I\otimes I \arrow[u, "\delta'"] \arrow[r, "b"'] & I \arrow[ul, "id"']
\end{tikzcd}
$$

Um exemplo deste gênero de categorias são as categorias de monoides.

Definição 3.11 *Um monóide numa categoria monoidal* $\mathbf{C}$ *é uma tripla* (A, m, n)*, onde* A *é um objeto da categoria* $\mathbf{C}$ *junto com dois morfismos* $m : A \otimes A \longrightarrow A$*,* $n : I \longrightarrow A$ *tais que os seguintes diagramas comutam*

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes A \arrow[r, "n \otimes id"] \arrow[dr, "b"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes I \arrow[l, "id \otimes n"'] \arrow[dl, "b'"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A & A \otimes A \arrow[l, "m"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[l, "id \otimes m"'] \arrow[d, "a"] \\
A \otimes A \arrow[u, "m"] & & (A \otimes A) \otimes A \arrow[ll, "m \otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

Observe que se $(\mathbf{C}, \otimes, I)$ é uma categoria monoidal simétrica, o objeto I é um monoide.

Dada qualquer categoria monoidal $\mathbf{C}$, é sempre possível construir a categoria $\mathbf{Mon}_C$ cujos objetos são monóides da categoria $\mathbf{C}$ e os morfismos $f :< A, m, n > \longrightarrow < A', m', n' >$ são morfismos $f : A \longrightarrow A'$ em $\mathbf{C}$ tal que $f.m = m'.(f \otimes f)$ e $f.n = n'$. Então, $\mathbf{Mon}_C$ é uma categoria que possui antidiagonal. Outro exemplo deste caso é a categoria dos anéis, com morfismos preservando as unidades.

Nas categorias cartesianas fechadas não é verdade que cada objeto seja um monóide, mas cada objeto é trivialmente um comonóide (com a diagonal $\Delta_\times(X) = X \times X$ e o morfismo de cada objeto indo no objeto terminal).

Uma categoria linear $\mathbf{C}$ onde existe um isomorfismo natural $\delta : Id \xrightarrow{\sim} \Delta$ junto com os diagramas comutativos correspondentes (i.e. δ é diagonal e antidiagonal) é um modelo categórico para RM. Isto é, para modelar a regra da contração no sentido de cima para baixo, temos que, dado um morfismo $f : \Gamma \otimes A \otimes A \otimes \Sigma \to C$ que corresponde ao sequente superior da regra, é construído o morfismo para o sequente inferior: $g = f.(1_\Gamma \otimes \delta_A \otimes 1_\Sigma) : \Gamma \otimes A \otimes \Sigma \to C$.

Da mesma forma, para modelar a regra no sentido de baixo para cima, dado um morfismo $h : \Gamma \otimes A \otimes \Sigma \to C$, obtemos um morfismo: $l = h.(1_\Gamma \otimes \delta_A \otimes 1_\Sigma) : \Gamma \otimes A \otimes A \otimes \Sigma \to C$ que corresponde ao sequente $\Gamma \otimes A \otimes A \otimes \Sigma \Rightarrow C$.

Além disto, derivações que se reduzem no cálculo, correspondem ao mesmo morfismo na categoria. Isto ocorre devido a que a regra de contração-expansão não introduz novas reduções sobre as já existentes em LLI, já que está indicando que os contextos não devem distinguir diferentes ocorrências da mesma fórmula, assim como o isomorfismo natural "não distingue" entre A e $A \otimes A$.

3.3.2 LLI mais contração e distribuição dos aditivos

A sintaxe

Se no sistema de Cálculo de Sequentes que caracteriza uma lógica, algumas das regras estruturais tradicionais é proibida, também se perde a propriedade da distributividade dos aditivos, propriedade válida tanto na lógica Intuicionista quanto na Clássica. Em particular, não é possível provar a versão mais fraca da distributividade dos aditivos $A\&(B\oplus C) \Rightarrow (A\&B)\oplus C$. Desta maneira obtém-se uma *lógica não-distributiva*. Por exemplo, a Lógica Linear é uma lógica não-distributiva. O sequente válido em LLI é $\vdash A \otimes (B \oplus C) \Rightarrow (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$. Porém este sequente não é a distribuição entre aditivos.

Para trabalhar com uma lógica onde a distributividade dos aditivos exista, deve-se reintroduzir, no sistema, a capacidade para obter esta propriedade. Várias versões em Cálculo de Sequentes (onde vale o Teorema da Eliminação do corte) para lógicas que possuem a propriedade da distribuição dos aditivos (e sem a regra estrutural de atenuação) têm sido apresentadas. Todas elas usam sistemas de sequentes de níveis superiores ou com sequências de dois tipos, chamadas extensionais e intensionais, onde na verdade, uma especie de atenuação é permitida num destes tipos de sequências [Sla84]. Neste trabalho, só será considerado o simples caso de acrescentar a LLI um axioma inicial que expresse a distribuição, $A\&(B \oplus C) \Rightarrow (A\&B) \oplus (A\&C)$ (como em [OK85]). Mas, neste caso vale um teorema de eliminação da regra do corte fraco, isto é, os cortes podem ser eliminados, menos nos casos onde aparece o sequente inicial. Na verdade, parece que os relevantistas insistiram na distributividade meramente para manter os conectivos da lógica relevante (con exceção da implicação), o mais parecidos possível como os conectivos tradicionais. Atualmente, principalmente com o surgimento da Lógica Linear e da Teoria da Computação, esta idéia de manter os conectivos clássicos não parece ser assunto de fundamental interesse.

Acrescentando à lógica R^- a distributividade dos aditivos, obtém-se o fragmento positivo da lógica chamada R em [AB75, Dun86], mais a cotenabilidade. Esta lógica é obtida acrescentando ao sistema axiomático da lógica LLI, os seguintes axiomas:
$(A \multimap (A \multimap B)) \multimap (A \multimap B)$
$A\&(B \oplus C) \multimap (A\&B) \oplus C$

Esta lógica é indecidível, devido a que o fragmento positivo de R é indecidível, como provado em [Urq84].

A semântica

A classe dos monóides fechados, com diagonal, aditivos e distributivos, i.e., com supremos e ínfimos que se distribuem entre si ($a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee c$), é um modelo algébrico para R, [MR72, Bri88] onde esta estrutura é chamada de monóide de Dunn.

Por outro lado, na semântica categórica para R deve-se considerar a distribuição de produtos sobre coprodutos.

Uma categoria cartesiana fechada (i.e., uma categoria onde o funtor produto tem um adjunto à direita) com coproduto é distributiva (produtos se distribuem sobre coprodutos), já que funtores que possuem adjunto à direita preservam coprodutos ([LS86, pag 25]).

Nas categorias monoidais fechadas com produto e coproduto, o funtor que possui adjunto à direita é o tensor $\otimes$. Assim $\otimes$ se distribui sobre o coproduto. Isto é, tem-se a propriedade $A \otimes (B \oplus C) \; = \; (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$, que é a condição válida em LLI. Mas, nada se diz do funtor produto em relação ao coproduto.

Definição 3.12 *Uma categoria* $\mathbf{C}$ *com produto e coproduto diz-se* distributiva *se o produto se distribui sobre o coproduto, i.e. existe um isomorfismo natural* $d_{A,B,C} : A \times (B \oplus C) \xrightarrow{\sim} (A \times B) \oplus (A \times C)$.

Um contra-exemplo desta situação é proporcionada pela categoria dos grupos abelianos $\mathbf{Ab}$, esta categoria é bicartesiana mas não é distributiva [Sza78, pag 71].

Em trabalhos recentes [CS91, Coc89, BS91], tem-se apresentado o conceito de categorias com distribuição fraca ("weakly distributive categories"), como uma generalização da distribuição para tensores em geral. Mas, para categorias bicartesianas esta noção coincide, práticamente, com o conceito de categoria distributiva [CS91, pag11,13].

Uma categoria linear $\mathbf{C}$ distributiva e tal que o tensor possua diagonal é um modelo categórico para R, já que a transformação natural d modela o axioma da distribuição. Além disto, o axioma da distribuição não gera novas reduções entre derivações, e as derivações em que aparece este axioma, não são reduzidas.

3.3.3 LLI e a negação

Estender LLI para incluir a negação, não é muito elegante nem interessante. Na verdade, como em LLI pode-se ter, no máximo, uma fórmula do lado direito dos sequentes, as regras que definem o comportamento do conectivo da negação são:

$$\neg_e \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, \neg A \;\Rightarrow} \qquad \neg_d \frac{\Gamma, A \;\Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}$$

Note que agora pode-se ter sequentes com sucedentes vazios, caso este que não podia acontecer em LLI sem a negação.

Na versão axiomática, acrescenta-se ao conjunto de axiomas de LLI:
$(A \multimap \neg B) \multimap (B \multimap \neg A)$
Ou equivalentemente:
$A \multimap \neg\neg A$
$(A \multimap B) \multimap (\neg B \multimap \neg A)$

Alternativamente, pode-se acrescentar a LLI uma nova e arbitrária constante, chamada $\perp$, através da qual possa-se definir a negação de uma fórmula. Isto é, por definição, $\neg A := A \multimap \perp$. Em LLI deve-se acrescentar as regras que permitam manipular esta constante e que sejam simétricas às regras para a constante I:

$$\perp_d \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \perp} \qquad \perp_e \frac{}{\perp \;\Rightarrow}$$

Observe que a regra $\bot_d$ na verdade é uma regra derivada em LLI com $\bot_e$:

$$\dfrac{\dfrac{\bot\Rightarrow \quad \Gamma\Rightarrow}{\bot,\Gamma\Rightarrow}\ Corte}{\Gamma\Rightarrow\bot}\ \multimap_d$$

Porém, em LLI, o sequente $\Gamma,\bot\Rightarrow A$ não é válido. Este sequente é o axioma que define a constante $\bot$ no caso da lógica Intuicionista. Na realidade, em LLI, a constante $\bot$ não tem nenhuma característica especial; por isso em LLI a negação definida é uma negação puramente implicacional no estilo minimal [Pra65].

Um modelo algébrico para LLI com a negação definida através da constante $\bot$ é o modelo algébrico de LLI $(M,\leq,\circ,e,\multimap,\wedge,1,\vee,0)$ com uma constante adicional $\bot\in M$. Assim, a interpretação de $\neg B := B\multimap\bot$ no monóide é o elemento do monóide $b\multimap\bot$ (i.e. o pseudo-complemento de b com respeito a $\bot$). Em [HdP91, pag 109] é mostrado que esta definição satisfaz aos axiomas.

Por outro lado, no modelo categórico para LLI, deve existir um objeto que seja a interpretação da constante $\bot$ da lógica linear. Assim a interpretação de $\neg B := B\multimap\bot$ é o funtor contravariante $\_\multimap\bot$. Como consequência direta de que $\multimap$ é um internal-hom e é o adjunto de $\otimes$, a interpretação da negação satisfaz aos axiomas (cf. Apêndice B).

Os trabalhos originais dos relevantistas contemplaram somente o caso das lógicas relevantes com uma negação clássica. Mais recentemente, Kosta Dosen apresentou várias versões da lógica relevante R com negação intuicionista [Dos81].

A lógica obtida acrescentado a R^- uma nova constante $\bot$ e definindo $\neg A := A\multimap\bot$, é chamada RA' [Dos81, pag 405] . Ela possui uma negação minimal e satisfaz as condições:
$A\multimap\neg\neg A$
$(A\multimap B)\multimap(\neg B\multimap\neg A)$
$(A\multimap\neg B)\multimap(B\multimap\neg A)$

O sistema equivalente a RA', chamado RA em [Dos81], tem como primitivo o conectivo $\neg$ e é definido pelos axiomas e regras de inferência da lógica R^-, mais o axioma $(A\multimap\neg B)\multimap(B\multimap\neg A)$.

Na verdade, toda negação intuicionista definida no contexto das lógicas relevantes, através de uma constante $\bot$, é uma negação minimal. Isto se deve ao fato que nas lógicas relevantes, o consequente de uma implicação tem que ser uma consequência real do antecedente. Assim uma regra como na Lógica Intuicionista $\Gamma,\bot\Rightarrow A$ (significando que a constante "absurdo" implica qualquer coisa), invalida o princípio das lógicas relevantes. Nos trabalhos dos relevantistas a constante $\bot$ é chamada f e interpretada como a disjunção de todas as falsidades lógicas.

3.3.4 LLI e a Atenuação

Embora a intenção deste trabalho seja estudar lógicas relevantes, por completude e por estar de alguma maneira relacionadas com a lógica R (através da lógica LLI), nesta seção será apresentada a lógica obtida ao acrescentar a LLI a regra da atenuação. Esta lógica, que possui a regra da atenuação, mas não a de contração tem sido chamada *lógica Afim* ([Bla90]).

A sintaxe

No Cálculo de Sequentes para LLI acrescentamos a seguinte regra:

$$(At)\frac{\Gamma', \Gamma \;\Rightarrow\; C}{\Gamma', A, \Gamma \;\Rightarrow\; C}$$

Note que nesta regra é permitido introduzir (ou re-introduzir) uma fórmula A, que pertence às sequências de hipóteses Γ' e Γ. Isto é, temos o seguinte caso particular:

$$\frac{\Gamma', A, \Gamma \;\Rightarrow\; C}{\Gamma', A, A, \Gamma \;\Rightarrow\; C}$$

Este caso coincide com a regra de expansão. O teorema de Eliminação do corte é provado no artigo [OK85].

Tendo no sistema a regra da atenuação, pode-se derivar o sequente $\vdash A \otimes B \;\Rightarrow\; A\&B$, mas não a inversa.

Alternativamente, pode-se apresentar a lógica Afim, como o Cálculo de Sequentes para LLI, onde o axioma inicial da identidade $A \;\Rightarrow\; A$ é substituído pelo axioma $\Gamma, A \;\Rightarrow\; A$. Outra forma equivalente de obter o mesmo efeito é deixar os axiomas iniciais $A \Rightarrow A$, mas permitir a aplicação das regras $\&_d$ e $\oplus_e$ com diferentes contextos, i.e. substituir as regras de LLI por:

$$\&_d\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A\&B} \qquad \oplus_e\frac{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Delta, B \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta, A \oplus B \Rightarrow C}$$

No sistema axiomático para LLI, tudo o que tem que ser feito para obter a lógica Afim é acrescentar o axioma chamado Paradoxo Positivo: $A \multimap (B \multimap A)$ e definir uma derivação como no caso para LLI, mas com a regra:

$$\frac{\Delta \vdash C \quad \Sigma \vdash B}{\Delta, \Sigma \vdash C\&B}$$

Se no sistema de Dedução Natural para LLI acrescenta-se a regra correspondente à introdução de hipóteses novas numa derivação, obtém-se um sistema de Dedução Natural para a lógica Afim, i.e., tem que se acrescentar a seguinte regra:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}$$

Alternativamente pode-se substituir a derivação inicial $A \Rightarrow A$ do sistema de Dedução Natural para LLI, pela derivação $\Gamma, A \Rightarrow A$. Também, podem-se substituir as regras $\&_i$ e $\oplus_e$ por:

$$\&_i \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \& B} \qquad \oplus_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \oplus B \quad \Delta, A \Rightarrow C \quad \Delta', B \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \Rightarrow C}$$

Assim, obtém-se diretamente o Teorema da Forma Normal.

Para obter um Cálculo de Termos da lógica Afim, modifica-se também o sistema LLI por uma generalização que permita a introdução de variáveis novas no axioma inicial ou nas regras de introdução do & e de eliminação do $\oplus$.

A semântica

Uma maneira de modelar a regra da Atenuação é exigir que todo elemento a de M, onde $(M, \otimes, e)$ é um monóide ordenado, cumpra $a \leq e$. Assim, se $b \circ b' \leq c$, pela compatibilidade das estruturas, tem-se que $b \circ a \circ b' \leq b \circ e \circ b' \leq c$
Daqui, pela transitividade da relação $\leq$, obtemos $b \circ a \circ b' \leq c$.

Também, se $a \leq e\ \forall a \in M$, obtemos as "projecões", $a \circ b \leq a$ e $a \circ b \leq b$. Isto se deve a que, $a \circ b \leq a \circ e = a$ e $a \circ b \leq e \circ b = b$. Por outro lado, se na definição das "projecões", b é substituído por e então, $a \leq e$ para qualquer a.

Então podemos dizer que a classe dos monóides fechados aditivos com projeções é um modelo algébrico para a Lógica Afim, já que obtemos $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ sse $\mathcal{I}(A_1) \circ \ldots \circ \mathcal{I}(A_n) \leq \mathcal{I}(B)$ (a prova é feita, num sentido por indução no comprimento da derivação, no outro sentido deve-se provar que a álgebra de Lindembaum é um monóide deste tipo). Também obtemos que $\vdash \Rightarrow B$ sse $e \leq \mathcal{I}(B)$.

No modelo categórico precisa-se definir o conceito que caracteriza as projeções de um funtor tensor. Encontra-se na literatura, por exemplo, a seguinte definição: *um tensor* $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ *tem projeções, se sua identidade* I *é o objeto terminal da categoria* $\mathbf{C}$ ([Jac91, Jac92]). Se este for o caso, temos duas transformações naturais, $P : \otimes \rightarrow Pm$ e $S : \otimes \rightarrow Sg$, cujos componentes são $A \otimes B \rightarrow A \otimes I$ e $A \otimes B \rightarrow I \otimes B$ [1], e tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "a"'] & B \otimes C \arrow[r, "P"] & B \arrow[d, "id"] \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "P"] & A \otimes B \arrow[r, "S"] & B
\end{tikzcd}$$

[1]Observe que, $A \otimes I \cong A$ e $I \otimes B \cong B$, não se fazendo diferença notacional entre $P_{A,B}$ e $b_A.P_{A,B}$ e entre $S_{A,B}$ e $b_B.S_{A,B}$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \otimes B \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, "S"] & \\
A & B \otimes A \arrow[l, "S"'] \arrow[r, "P"] & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "a"'] & A \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "P"] & A \otimes B \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "a"'] & B \otimes C \arrow[d, "S"] \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "S"] & C
\end{tikzcd}
$$

Alternativamente é possível obter o mesmo efeito das projeção P e S através de uma única transformação natural:

Definição 3.13 *Dada* $\mathbf{C}$ *uma categoria monoidal simétrica, o tensor* $\otimes$ *tem projeções sse existe uma transformação natural* $p : Id \to \mathcal{I}$ *em* $\mathbf{C}$*, onde* $\mathcal{I}$ *é o funtor constante* $\mathcal{I} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$*, que associa a cada objeto* C *a identidade* I *e a cada morfismo* $f : A \to B$ *a identidade* $id_I : I \to I$ *([HS73, pag 97]), e tal que satisfazem as seguintes equações:*
$p_I = id_I$

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "id \otimes p"'] & B \arrow[d, "p"] \\
I \otimes I \arrow[r, "b"'] & I
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "p \otimes id"] \arrow[dddd, "a"'] & I \otimes (B \otimes C) \cong B \otimes C \arrow[r, "id \otimes p"] & B \otimes I \\
 & & \cong \\
 & & B \\
 & & \cong \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "id \otimes p"] & (A \otimes B) \otimes I \cong A \otimes B \arrow[r, "p \otimes id"] & I \otimes B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes I & A \otimes B \arrow[l, "id \otimes p"'] \arrow[r, "p \otimes id"] \arrow[dddd, "c"] & I \otimes B \\
\cong & & \cong \\
A & & B \\
\cong & & \cong \\
I \otimes A & B \otimes A \arrow[l, "p \otimes id"] \arrow[r, "id \otimes p"'] & B \otimes I
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "id \otimes p"] \arrow[dd, "a"'] & A \otimes I \\
& (A \otimes B) \arrow[u, "id \otimes p"'] \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "id \otimes p"] & (A \otimes B) \otimes I \arrow[u, phantom, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "p \otimes id"] \arrow[dd, "a"'] & I \otimes (B \otimes C) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
& (B \otimes C) \arrow[d, "p \otimes id"] \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "p \otimes id"] & I \otimes C
\end{tikzcd}
$$

A partir da definição da transformação natural p, é possível definir as transformações naturais $P_{A,B} = id_A \otimes p_B$ e $S_{A,B} = p_A \otimes id_B$. Os diagramas comutativos que devem satisfazer P e S são obtidos dos diagramas para p.

A categoria dos reticulados completos afins (onde cada conjunto não vazio tem supremo) com funcões afins (funções que preservam os supremos) tem uma estrutura monoidal com projeções. Esta estrutura deve-se a que a identidade do tensor (o reticulado completo com só um elemento) é também o objeto terminal ([Jac91]). No caso da definição das projeções para um funtor tensor, através da existência da transformação natural p, estamos considerando também categorias onde o objeto I não é objeto terminal. Mais ainda, estamos considerando categorias que podem não ter objeto terminal. Por tanto esta noção é mais geral que a considerada atê o momento.

Foi visto, na seção referente à lógica RM, o significado de antidiagonal numa categoria **C**. Na verdade este é um caso muito particular de projecões.

Proposição 3.6 *Se em uma categoria simétrica monoidal existe a transformação natural* $p : Id \to \mathcal{I}$*, então a categoria tem antidiagonal.*
Prova: defina $\delta'_A = b'_A.id_A \otimes p_A = b_A.p_A \otimes id_A$*. A comutatividade dos diagramas de coerência e transformação natural para* δ' *são diretos dos diagramas para a transformação natural* p*.*

Uma categoria linear com transformação natural $p : Id \to \mathcal{I}$, modela a Lógica Afim, já que dado o morfismo $f : \Gamma' \otimes \Gamma \to C$, que corresponde ao sequente superior da regra da atenuação, obtemos o morfismo $f.(id_{\Gamma'} \otimes p_A \otimes id_\Gamma) : \Gamma' \otimes A \otimes \Gamma \to C$, correspondente ao sequente inferior.

3.3.5 LLI mais Contração e Atenuação

Se ao sistema de Sequentes para LLI acrescentamos as duas regras:

$$(C)\frac{\Gamma, A, A, \Gamma' \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, A, \Gamma' \;\Rightarrow\; C} \qquad (A)\frac{\Gamma, \Gamma' \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, A, \Gamma' \;\Rightarrow\; C}$$

obtemos o sistema de Lógica Intuicionista LJ (cf. Apêndice A), como apresentado em [Tak75]. Com a ajuda destas duas regras estruturais pode-se provar que os conectivo de & e $\otimes$ são equivalentes (i.e., que valem os sequentes $A \otimes B \Rightarrow A\&B$ e $A\&B \Rightarrow A \otimes B$). Obtem-se também que as regras de $\to_e$ são equivalentes nestes dois sistemas e que a constante $\perp$ com o axioma $\Gamma, \perp \Rightarrow A$ é adequada para definir $\neg A := A \to \perp$.

Este cálculo foi chamado de LJ* em [OK85]. O Teorema da Eliminação do corte vale para este caso e é um fato conhecido que a Lógica Intuicionista proposicional é decidível.

Uma apresentação equivalente à anterior obtém-se ao substituir o axioma inicial de LLI $A \Rightarrow A$ por $\Gamma, A \Rightarrow A$ e considerar as letras gregas maiúsculas como sequências sem repetições (ou como conjuntos, se tiramos também a regra da Permutação, [Pra65]).

Um sistema de Dedução Natural pode ser encontrado em [Pra65] e uma apresentação axiomática em [Avr88].

O sistema de λ-cálculo que corresponde a LJ é o chamado λK-calculus (veja [Bar85]). Na verdade, o cálculo para LJ obtém-se facilmente do cálculo de termos correspondente a LLI, i.e., substitui-se o axioma inicial $x : A \Rightarrow x : A$ por $\Gamma, x : A \Rightarrow x : A$, onde as letras gregas maiúsculas devem ser interpretadas como conjuntos de variáveis.

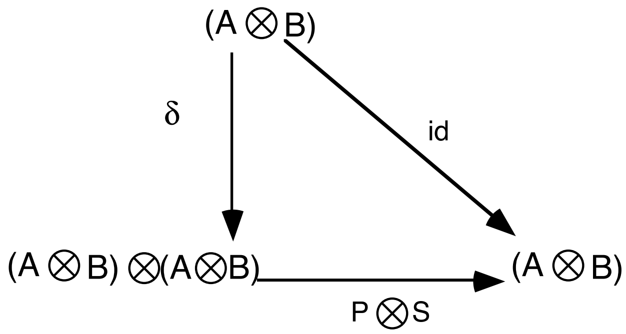
Um modelo algébrico para LJ é uma álgebra de Heyting $(P, 0, 1, \wedge, \vee, \to)$, onde $(P, \wedge, \vee)$ é um reticulado distributivo, 1 é o maior elemento do reticulado, 0 é o menor elemento e $\to$ é uma operação binária tal que $a \wedge b \leq c \iff a \leq b \to c$ para todo a, b, c em P ($\leq$ é a ordem parcial definida pelas operações do reticulado).

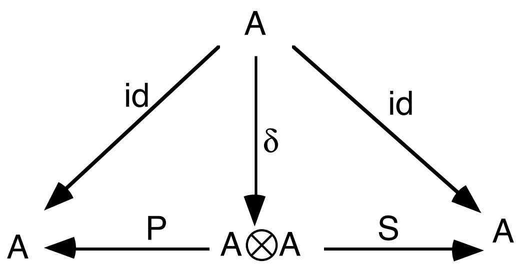
Um modelo categórico para LJ é uma categoria bicartesiana fechada [LS86].

Mas, pensando num processo passo-a-passo e seguindo as construções categóricas das seções prévias, obtemos que começando com uma categoria simétrica monoidal fechada $\mathbf{C}$ com produtos e coprodutos finitos (i.e., um modelo para LLI) e acrescentando as condições de que o funtor tensor tenha "projeções" e diagonal, não podemos concluir que o tensor seja um funtor produto. Isto é, chega-se a categorias com dois funtores diferentes, um que tem a propriedade universal do produto e o outro que não tem.

Por outro lado, se no sistema LLI acrescentam-se as regras de atenuação e contração (modeladas pelas projeções e pela diagonal do funtor), obtem-se a lógica LJ, onde os conectivos $\wedge$ e $\otimes$ (modelados pelos produtos e pelo tensor respectivamente) são equivalentes.

Na verdade o que acontece é ue na estrutura categórica é necessário acrescentar diagramas de coherencia que relacionem o efeito da diagonal com o efeito das projeções. Isto é, devemos acrescentar os seguintes diagramas comutativos:



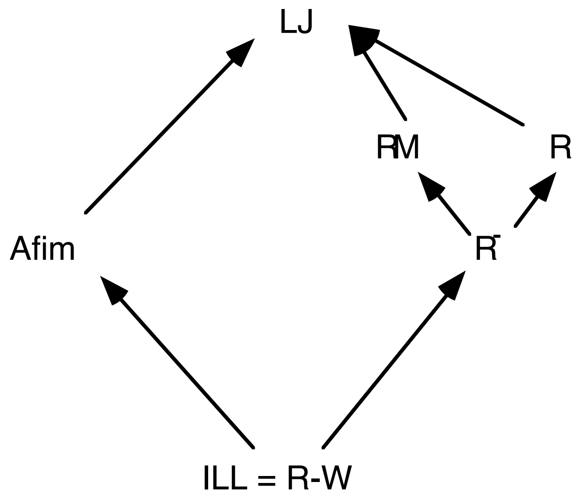


Dadas as condições acima, o tensor transforma-se num produto (cf. Apêndice B), e como o produto é único, a menos de isomorfismos, obtemos que os dois funtores $\times, \otimes$ são isomorfos.

3.4 Conclusão

A partir da Lógica Linear, que tem tanto uma Teoria da Prova bem desenvolvida como modelos categóricos conhecidos, apresentaram-se neste capítulo algumas extensões desta lógica. Estas extensões, obtidas pelo acréscimo no Cálculo de Sequentes de certas regras estruturais, correspondem, numa apresentação da lógica do gênero Hilbert, com lógicas bem conhecidas na literatura. Para cada uma delas apresentaram-se modelos algébricos e categóricos que as caracterizam, e a partir dos sistemas de Dedução Natural obteve-se o sistemas de Termos correspondentes.

Este capítulo cobriu a lógica de relevância R e as lógicas próximas a ela. A situação estudada pode ser representada no seguinte desenho, onde as flechas indicam que a lógica de partida é uma extensão (que preserva provabilidade) da outra lógica:



No próximo capítulo serão analisadas outras lógicas relevantes que não têm a regra da comutatividade ou da associatividade no seus sistemas. No capítulo seguinte serão analisadas algumas lógicas modais e a relação que elas tém com as lógicas relevantes. Também será apresentada a versão modal da lógica relevante R, ao estilo das modalidades de Girard, que permitem re-introduzir num cálculo, certas propriedades ausentes.

Capítulo 4

Lógicas não comutativas e não associativas

O objetivo deste capítulo é analisar algumas lógicas não comutativas e/ou não associativas e obter os correspondentes modelos algébricos e categóricos. Algumas das lógicas que trataremos aqui correspondem a certas lógicas relevantes estudadas em [AB75] e também a lógicas definidas em [Hac63], chamadas lógicas de implicação estrita.

4.1 A Lógica Linear não associativa

Na lógica LLI o conectivo $\otimes$ é associativo, i.e. em LLI é possível demonstrar $\vdash\ A \otimes (B \otimes C) \overset{\Leftarrow}{\Rightarrow} (A \otimes B) \otimes C$, além de ser comutativo, $\vdash\ A \otimes B \overset{\Leftarrow}{\Rightarrow} B \otimes A$. Da mesma forma, os contextos que ocorrem nos sequentes são sequências comutativas (isto é, multisets de fórmulas) e a vírgula entre as fórmulas dos sequentes é a operação que constrói sequências de fórmulas (ou multisets).

Ao pretender estudar certas lógicas achadas na literatura, como as lógicas da implicação estrita, surgiu a necesidade de formular sequentes onde os contextos tenham uma estrutura mais geral que a estrutura de sequência. Além disto, como queremos estudar estas lógicas mas também queremos relaciona-las com a Lógica Linear, apresentamos a seguir uma formulação não associativa (de um fragmento) da Lógica Linear e a partir dela trataremos de lógicas relevantes mais fracas que as lógicas do capítulo anterior.

Se em LLI é restrita a capacidade de associar fórmulas, então é necessário que os contextos sejam árvores de fórmulas (ou sequências não associativas) e que a vírgula corresponda a uma operação que constrói árvores. Definiremos a seguir, de uma maneira mais precisa, conceitos necessários para estabelecer os cálculos dedutivos para lógicas deste gênero.

Dada uma linguagem proposicional definimos:

Definição 4.1 $\emptyset$ *é uma* árvore binária*, a árvore vazia.*
$(\emptyset, A)$ *é uma* árvore binária*, onde A é uma fórmula. Esta árvore é denotada por A.*
Se Γ, Σ *são árvores binárias, então* (Γ, Σ) *é uma* árvore binária.

Observação: $(A, \emptyset)$ não é necessariamente igual à fórmula A, esta diferença notacional é importante no caso de tratar com lógicas onde não é permitida a permutação de fórmulas.

Neste capítulo, letras gregas maiúsculas denotarão árvores binárias e letras latinas maiúsculas denotarão fórmulas. Casos especiais nos quais esta notação não é usada serão observados adequadamente.

Também é necessária a seguinte definição:

Definição 4.2 *A árvore* Π *é uma* sub-árvore *de* Π.
Se (Γ, Σ) *é uma subárvore de* Π, *então* Γ *e* Σ *são* sub-árvores *de* Π.

Notação: $\Pi[\Gamma]$ denota que Γ é uma sub-árvore da árvore Π. Se A é uma subárvore da árvore Π, i.e. $\Pi[A]$, então A é chamada uma subárvore folha ou terminal; $\Pi[\emptyset] = \Pi$; $\Pi[[\Gamma_1], \ldots, [\Gamma_n]]$ denota que $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ são subárvores de Π; $(\emptyset, \emptyset) = \emptyset$.

4.1.1 Sistemas Formais

A seguir apresentamos uma lógica (de idealização própria) a través de um cálculo de sequentes obtido a partir do cálculo para o fragmento multiplicativo de LLI, mas onde a capacidade de associar fórmulas é restrita. Neste cálculo, sequentes são pares $< \Pi, A >$, representados por $\Pi \Rightarrow A$, onde Π é uma árvore e A é uma fórmula. Chamamos a este sistema LLI*.

Regras Estruturais:

$$(Ident)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (Corte)\frac{\Sigma \;\Rightarrow\; A \qquad \Gamma[A] \;\Rightarrow\; B}{\Gamma[\Sigma] \;\Rightarrow\; B}$$

$$(Perm)\frac{\Gamma[(A, B)] \;\Rightarrow\; C}{\Gamma[(B, A)] \;\Rightarrow\; C} \qquad Assoc_e\frac{\Gamma[(A, (B, C))] \;\Rightarrow D}{\Gamma[((A, B), C)] \;\Rightarrow D}$$

Regras Lógicas:

$$I_e\frac{\Gamma[(\emptyset, A)] \;\Rightarrow\; B}{\Gamma[(I, A)] \;\Rightarrow\; B} \qquad I_d\frac{}{\emptyset \Rightarrow I}$$

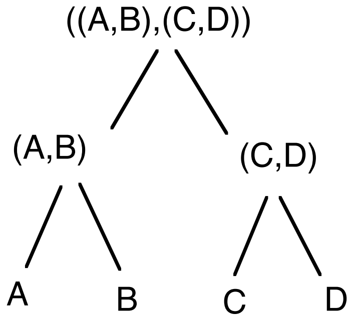
$$\otimes_e\frac{\Gamma[(A, B)] \;\Rightarrow\; C}{\Gamma[A \otimes B] \;\Rightarrow C} \qquad \otimes_d\frac{\Pi \;\Rightarrow\; A \quad \Delta \;\Rightarrow\; B}{(\Pi, \Delta) \;\Rightarrow\; A \otimes B}$$

$$\multimap_e \frac{\Delta \;\Rightarrow\; A \quad \Gamma[B] \;\Rightarrow\; C}{\Gamma[(A \multimap B, \Delta)] \;\Rightarrow C} \qquad \multimap_d \frac{(\Pi, A) \;\Rightarrow B}{\Pi \;\Rightarrow\; A \multimap B}$$

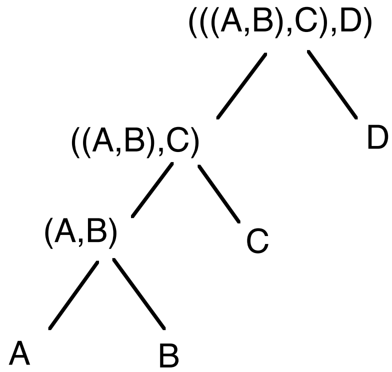
Neste cálculo estabelecemos que $(A, \emptyset) = (\emptyset, A) = A$. Observe que neste Cálculo de Sequentes as regras Perm e Assoc$_e$ podem ser substituídas por regras similares que permitam manipular árvores no lugar de simples fórmulas. Se as regras estruturais permitem permutar árvores, então lograriamos o efeito obtido com $(A, \emptyset) = A$, acrescentando ao cálculo LLI* a seguinte regra:

$$\updownarrow \frac{(A, \emptyset) \Rightarrow D}{A \Rightarrow D}$$

Observe que há uma forma fraca de associatividade dada pela regra Assoc$_e$. Isto tem como consequência que as árvores binárias podem ser representadas através de uma forma canônica, com todas as fórmulas associadas nà esquerda da estrutura. Por exemplo, a árvore



é transformada, por várias aplicações da regra Assoc$_e$, na árvore:



A noção de sequentes com antecedentes representando árvores é interessante porque árvores correspondem à estrutura mais geral obtida através de uma operação construtora binária. Isto é, o conjunto das árvores é o conjunto dos termos (obtidos pelas variáveis proposicionais e a operação binária vírgula). Na verdade, as estruturas de multisets, conjuntos e sequências são obtidas a partir das árvores, i.e. do conjunto dos termos, fazendo certas identificações entre elas (se têm os mesmos elementos, a mesma quantidade de ocorrências dos elementos, etc.). No caso de LLI*, a regra Perm nos permite identificar algumas árvores com as mesmas folhas e a regra Assoc$_e$ identifica as árvores onde as folhas podem ser associadas à esquerda.

A capacidade de associar fórmulas à esquerda é importante para ter no sistema suficiente poder de demonstração. Por exemplo, sem a regra Assoc$_e$, na derivação $(A,(B,C)) \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \otimes (B \otimes C)$ não seria possível aplicar a regra $\multimap_d$.

Observe que acrescentando a LLI* o sentido de baixo para cima da regra Assoc$_e$, então os antecedentes dos sequentes se transforman em sequências e obtemos o cálculo LLI (do capítulo anterior). Uma versão totalmente não associativa pode ser facilmente obtida, eliminando do cálculo para LLI* a regra Assoc$_e$. É importante observar que em [Yet90] é apresentada uma versão não comutativa de lógica linear. Nesse caso a regra da permutação foi substituída por uma regra que permuta as fórmulas de uma maneira circular, chamada "cycle exchange", mas a operação entre fórmulas (e assim o conectivo $\otimes$) é associativa.

Teorema 4.1 *Cada sequente no sistema de Sequentes para LLI* pode ser demonstrado através de uma derivação sem a regra do corte.*
Prova: cf. Apêndice C.

Uma axiomatização para LLI* do gênero dos sistemas de Hilbert é apresentada a seguir:

- $A \multimap A$
- $(A \multimap B) \multimap ((B \multimap C) \multimap (A \multimap C))$
- $(A \otimes B) \otimes C \multimap A \otimes (B \otimes C)$
- $(A \multimap (B \multimap C)) \multimap (B \multimap (A \multimap C))$
- $t \multimap (A \multimap A)$
- $(t \multimap A) \multimap A$

Este sistema possue as regras:

$$\frac{\vdash A \quad \vdash A \multimap B}{\vdash B} \qquad \updownarrow \frac{\vdash A \otimes B \multimap C}{\vdash A \multimap (B \multimap C)}$$

Proposição 4.1 *$\vdash \Pi \Rightarrow B$ no sistema de sequentes para LLI* sse $\vdash \Pi^\star \multimap B$ no sistema axiomático, onde $\Pi^\star$ é a fórmula obtida substituíndo cada vírgula que aparece na árvore Π pelo conectivo $\otimes$, e cada ocorrência da árvore vazia $\emptyset$ pela fórmula t.*
Prova: cf. Apêndice C.

Uma formulação em Dedução Natural para LLI* é apresentada a seguir:

$$\frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$Perm\frac{\Pi[(\Gamma, \Sigma)] \Rightarrow C}{\Pi[\Sigma, \Gamma] \Rightarrow C} \qquad Assoc_e\frac{\Pi[(\Gamma, (\Sigma, \Delta))] \Rightarrow D}{\Pi[((\Gamma, \Sigma), \Delta)] \Rightarrow D}$$

$$I_e\frac{\Delta \Rightarrow I \qquad \Gamma \Rightarrow A}{(\Delta, \Gamma) \Rightarrow A} \qquad I_i\frac{}{\emptyset \Rightarrow I}$$

$$\otimes_e\frac{\Gamma \Rightarrow A \otimes B \qquad \Delta[(A, B)] \Rightarrow C}{\Delta[\Gamma] \Rightarrow C} \qquad \otimes_i\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{(\Gamma, \Delta) \Rightarrow A \otimes B}$$

$$\multimap_e \frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A \multimap B \quad \Delta \ \Rightarrow \ A}{(\Gamma, \Delta) \ \Rightarrow B} \qquad \multimap_i \frac{(\Gamma, A) \ \Rightarrow B}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \multimap B}$$

Sendo que $(A, \emptyset) = (\emptyset, A) = A$. Para este sistema em Dedução Natural obtemos os seguintes resultados:

Lema 4.1 *Se* $\vdash \Gamma \Rightarrow A$ *e* $\vdash \Delta[A] \Rightarrow B$ *então* $\vdash \Delta[\Gamma] \Rightarrow B$.
Prova: por indução no comprimento da derivação de $\Delta[A] \Rightarrow B$.

Proposição 4.2 *O sequente* $\Gamma \Rightarrow A$ *é demonstrável no Cálculo de Sequentes para LLI* sse* $\Gamma \Rightarrow A$ *é demonstrável na formulação em dedução natural acima.*
Prova: por indução no comprimento das derivações. Para mostrar que sequentes demonstráveis no Cálculo de Sequentes podem ser obtidos no sistema de Dedução Natural é necessário usar o lema da substituição. Para mostrar que as regras estruturais de Perm e $Assoc_e$ *da Dedução Natural podem ser obtidas no Cálculo de Sequentes é preciso usar a regra* $\otimes_e$ *para substituir árvores por uma fórmula equivalente.*

Teorema 4.2 *Cada sequente no sistema de Dedução Natural para LLI*, pode ser derivado através de uma demonstração em forma normal.*
As regras $Assoc_e$ *e Perm não produzem novas fórmulas máximas em relação a LLI nem podem mascarar novas ocorrências deste tipo de fórmulas.*

Um Cálculo de Termos para LLI*, equivalente à formulação em Dedução Natural e que possue a propriedade da substituição, é facilmente obtido:

$$\frac{}{x : A \Rightarrow x : A}$$

$$\frac{\Pi[(\Gamma, \Sigma)] \Rightarrow s : C}{\Pi[\Sigma, \Gamma] \Rightarrow s : C} \qquad \frac{\Pi[(\Gamma, (\Delta, \Sigma))] \Rightarrow s : D}{\Pi[((\Gamma, \Delta), \Sigma)] \Rightarrow s : D}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : A \quad \Delta \Rightarrow s : B}{(\Gamma, \Delta) \Rightarrow (t \otimes s) : A \otimes B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : A \otimes B \quad \Delta[(x : A, y : B)] \Rightarrow s : C}{\Delta[\Gamma] \Rightarrow (\text{ let } t \text{ be } x \otimes y \text{ in } s) : C}$$

$$\frac{}{\Rightarrow i : I} \qquad \frac{\Delta \Rightarrow s : I \quad \Gamma \Rightarrow t : A}{(\Delta, \Gamma) \Rightarrow (\text{ let } s \text{ be } i \text{ in } t) : A}$$

$$\frac{(\Gamma, x : A) \Rightarrow t : B}{\Gamma \Rightarrow (\lambda x.t) : A \multimap B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : A \multimap B \quad \Delta \Rightarrow s : A}{(\Gamma, \Delta) \Rightarrow (ts) : B}$$

Neste caso letras gregas maiúsculas denotam árvores binárias de variáveis com seu tipo. Uma árvore não pode ter ocorrências repetidas de uma variável e numa derivação todas as árvores devem ser disjuntas entre si. Além disto, $(\emptyset, x : A) = (x : A, \emptyset) = x : A$.

As reduções para o cálculo LLI* são as mesmas que das reduções do fragmento multiplicativo de LLI.

Proposição 4.3 *$\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ é demonstrável no sistema de Dedução Natural para LLI* sse para qualquer conjunto de variáveis $\{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$ existe um termo $t : A$ tal que $\vdash x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow t : A$ é obtido no Sistema de Termos para LLI*.*
Prova: num sentido, por indução no comprimento da derivação; no outro sentido por indução na estrutura do termo t.

O sistema possui a propriedade da substituição de termos:

Proposição 4.4 *Se $\vdash \Gamma \Rightarrow t : A$ e $\vdash \Delta[x : A] \Rightarrow l : B$ então $\vdash \Delta[\Gamma] \Rightarrow l[t/x] : B$.*
Prova: por indução no comprimento da derivação $\Delta[x : A] \Rightarrow l : B$.

4.1.2 Semânticas algébricas e categóricas

Definição 4.3 *Chamamos a uma quíntupla $(M, \circ, e, \multimap)$ de* quasi-monóide fechado *se $(M, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, $\circ : M \times M \to M$ é uma operação comutativa compatível com $\leq$; e é a identidade da operação $\circ$. $\multimap$ é a operação de pseudo-complemento, i.e. para cada a, b em M existe um maior x em M tal que $x \circ a \leq b$. Além disto, $\circ$ é quasi-associativa: $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 \leq a_1 \circ (a_2 \circ a_3)$.*

Dado um quasi-monóide fechado $(M, \leq, \circ, e, \multimap)$ e uma função de interpretação $\mathcal{I}$ em M para as variáveis proposicionais da linguagem de LLI* que se estende indutivamente às fórmulas complexas (usando $\circ$, $\multimap$, e), temos, por indução no comprimento da derivação, que se $\vdash\ \Pi \Rightarrow A$ então $\mathcal{I}(\Pi^\star) \leq \mathcal{I}(A)$, onde $\Pi^\star$ é a fórmula obtida substituíndo cada vírgula da árvore Π pelo conectivo $\otimes$. Também temos que se $\mathcal{I}(\Pi^\star) \leq \mathcal{I}(A)$ então $\vdash\ \Pi \Rightarrow A$, já que a álgebra de Lindenbaum de LLI* é um quasi-monóide fechado. Destes resultados, obtemos que $e \leq \mathcal{I}(A)$ sse $\vdash I \Rightarrow A$ sse $\vdash \Rightarrow A$. Por tanto, a classe dos quasi-monóides fechados modela algebricamente à LLI*.

Da mesma forma, um modelo categórico é facilmente obtido a partir do modelo categórico para LLI. A idéia é associar cada fórmula da linguagem da lógica com um objeto de uma categoria e cada demonstração de um sequente com um morfismo. Os morfismos são associados às demonstrações de tal maneira que eles espelhem a construção passo-a-passo feita na derivação. Assim, a interpretação das demonstrações deve ser feita por indução no comprimento da derivação e conectivos devem estar associados com endofuntores. Para isto, estebeleceremos primeiro a estrutura necessária na categoria.

Definição 4.4 *Uma quíntupla $(\mathbf{C}, \otimes, I, \multimap)$ é uma* categoria quasi-monoidal fechada *se $\mathbf{C}$ é uma categoria, $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ é um bi-funtor, $\multimap$: $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ é um funtor de "internal-hom" tal que é adjunto à direita de $\otimes$, i.e., $hom(X \otimes A, Y) \cong hom(X, A \multimap Y)$. Além disto, $\otimes$ vem acompanhado da transformação natural $a : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ e dos isomorfismos naturais $b : A \xrightarrow{\sim} A \otimes I$, $b' : A \xrightarrow{\sim} I \otimes A$ e, $c : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ tal que satisfazem as seguintes equações:*

$c.c = id$
$b_I = b'_I$

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes C \arrow[rr, "a"] & & A \otimes (I \otimes C) \arrow[dl, "id \otimes b'"] \\
& A \otimes C \arrow[ul, "b \otimes id"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[l, "a"'] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "a \otimes id"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "id \otimes a"] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[ll, "a"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) & (A \otimes B) \otimes C \arrow[l, "a"'] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[l, "c"'] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[u, "id \otimes c"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[l, "a"'] & (C \otimes A) \otimes B \arrow[l, "c \otimes id"'] \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes(I\otimes C) \arrow[d, leftrightarrow, "id\otimes b'"'] & (A\otimes I)\otimes C \arrow[l, "a"'] \\
A\otimes C \arrow[r, leftrightarrow, "b'\otimes id"'] & (I\otimes A)\otimes C \arrow[u, "c\otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

Dada uma categoria quasi-monoidal fechada $(\mathbf{C}, \otimes, I, \multimap)$, associamos as fórmulas com objetos da categoria e os sequentes inicias com os morfismos identidades. A regra do corte está modelada pela composição de morfismos, nos outros casos temos que dado um morfismo que corresponde ao sequente superior de cada uma das regra do sistema de cálculo de sequentes para LLI*, compondo adequadamente obtemos um morfismo para o sequente inferior. Por exemplo, dado um morfismo $f : \Gamma[A \otimes (B \otimes C)]^\star \to E$ que corresponde ao sequente superior da regra Assoc$_e$, usando $a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ e o funtor $\otimes$ temos um morfismo correspondente ao sequente inferior: $\Gamma[(A \otimes B) \otimes C]^\star \xrightarrow{a^\star} \Gamma[A \otimes (B \otimes C)]^\star \xrightarrow{f} E$, onde $a^\star$ é obtido aplicando o funtor $\otimes$ entre o morfismo $a_{A,B,C}$ e os morfismos identidades nas fórmulas que aparecem em Γ. Isto é, temos que $\vdash\ \Pi \Rightarrow A$ então $\mathcal{I}(\Pi^\star) \to \mathcal{I}(A)$, onde $\Pi^\star$ é a fórmula obtida substituíndo cada vírgula da árvore Π pelo conectivo $\otimes$ e cada ocorrência da árvore vazia $\emptyset$ pela fórmula I, e também que se $\vdash\Rightarrow A$ então $I \to \mathcal{I}(A)$. Além disto, as reduções entre derivações (as reduções de LLI* são as mesmas que as de LLI) correspondem a equações categóricas entre morfismos.

4.2 Lógicas de implicação estrita intuicionista

C.I. Lewis apresentou os sistemas lógicos, chamados de S1-S5 ([Lew32]) como uma contribuição ao estudo da "implicação estrita". Mas, em sua formulação o conceito da implicação estrita ficou inter-relacionado com outras noções, tais como possibilidade, necessidade e negação. Hacking ([Hac63]) resolveu o problema de separar as propriedades da implicação estrita.

A implicação estrita, como a implicação relevante, tenta estabelecer uma noção de vínculo entre as fórmulas envolvidas numa fórmula implicacional mais forte do que a implicação clássica ou intuicionista o fazem. Mas, ao contrário das lógicas relevantes, Lewis não rejeitou de vez o axioma do Paradoxo Positivo, pelo contrário, ele entendeu que este axioma devia "ser interpretado corretamente". Essa interpretação seria que uma fórmula implicacional $A \to B$ é verdadeira quando ela é necessariamente verdade. Sem embargo, este critério não impede de ter certos aspectos paradoxais, chamados de falácias modais, como por exemplo, fórmulas da forma $B \to (A \to A)$, que não são válidas nas lógicas relevantes.

Se bem Lewis não tenha estabelecido entre os vários sistemas propostos qual seria o que definia realmente a noção procurada, ele deixou claro sua preferência pelo chamado sistema S2. Mas tarde, foram os sistemas S4 e S5 os que se mostraram mais interessantes.

Nesta seção serão tratados os fragmentos proposicional e multiplicativo da lógica que tem uma implicação estrita intuicionista (no estilo da implicação da lógica clássica S4) e da lógica que tem uma implicação estrita e relevante, do gênero da lógica E de [AB75].

4.2.1 Formalismos para a lógica de implicação estrita intuicionista S4

Meyer,[Mey70], estabeleceu um conjunto de axiomas junto com a regra de M.P. para apresentar a implicação estrita para S4 de forma equivalente à formulação original de Hacking ([Hac63, pag.52]). A seguir lembramos a formulação de [Mey70] para o fragmento multiplicativo, que chamamos de IES4:

1. $A \rightharpoonup A$
2. $(A \rightharpoonup (A \rightharpoonup B)) \rightharpoonup (A \rightharpoonup B)$
3. $(A \rightharpoonup B) \rightharpoonup ((B \rightharpoonup C) \rightharpoonup (A \rightharpoonup C))$
4. $(A \rightharpoonup (B \rightharpoonup C)) \rightharpoonup (B \rightharpoonup (A \rightharpoonup C))$ onde B é uma fórmula implicacional (permutação restringida).
5. $B \rightharpoonup (A \rightharpoonup A)$ (atenuação restrita).

E a regra:

$$MP\frac{\vdash A \qquad \vdash A \rightharpoonup B}{\vdash B}$$

Note que para este conectivo implicacional tem-se uma espécie de atenuação e de permutação restritas. Neste sistema é possível obter a regra ([Fuh90]):

$$\text{Asserção}\frac{\vdash A}{\vdash (A \rightharpoonup B) \rightharpoonup B}$$

Os axiomas e regras para acrescentar o conectivo $\otimes$ e sua identidade foram estabelecidos em [MR72]:

$$\updownarrow \frac{A \rightharpoonup (B \rightharpoonup C)}{A \otimes B \rightharpoonup C}$$

$t \rightharpoonup (A \rightharpoonup A)$
$(t \rightharpoonup A) \rightharpoonup A$

Um Cálculo de Sequentes para o fragmento implicacional da lógica da implicação estrita encontra-se em [AB75], onde se usa um operador μ para obter a capacidade de misturar contextos (chamado "Merge"). Em [Kri59] é apresentado um Cálculo de Sequentes (livre da regra do corte), sem o conectivo cotenatibilidade e com várias fórmulas nos sucedentes dos sequentes, onde a regra da implicação à direita tem a restrição que as fórmulas no contexto devem ser todas fórmulas implicacionais. Alternativamente apresentamos o seguinte sistema para a lógica IES4:

Regras Estruturais:

$$(Ident)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (Corte)\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Sigma[A] \Rightarrow B}{\Sigma[\Gamma] \Rightarrow B}$$

$$(Pr)\frac{\Gamma[(A,(B,C))] \Rightarrow D}{\Gamma[((B,A),C)] \Rightarrow C} \qquad Assoc_e\frac{\Gamma[(A,(B,C))] \Rightarrow D}{\Gamma[((A,B),C)] \Rightarrow D} \qquad \downarrow\frac{(A,\emptyset) \Rightarrow D}{A \Rightarrow D}$$

$$C\frac{\Pi[(A,A)] \Rightarrow B}{\Pi[A] \Rightarrow B} \qquad At_e\frac{\Pi[(\emptyset,C)] \Rightarrow D}{\Pi[(A,C)] \Rightarrow D}$$

Regras Lógicas:

$$I_e\frac{\Gamma[(\emptyset,C)] \Rightarrow B}{\Gamma[(I,C)] \Rightarrow B} \qquad I_d\frac{}{\emptyset \Rightarrow I}$$

$$\otimes_e\frac{\Gamma[(A,B)] \Rightarrow C}{\Gamma[A \otimes B] \Rightarrow C} \qquad \otimes_d\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{(\Gamma,\Delta) \Rightarrow A \otimes B}$$

$$\rightharpoonup_e\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta[B] \Rightarrow C}{\Delta[(A \rightharpoonup B,\Gamma)] \Rightarrow C} \qquad \rightharpoonup_d\frac{(\Gamma,A) \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightharpoonup B}$$

Observe que a regra I_e é um caso particular da regra At_e.

Proposição 4.5 *$\vdash \Pi \Rightarrow B$ no sistema de sequentes para IES4 sse $\vdash \Pi^\star \rightharpoonup B$ no sistema axiomático, onde $\Pi^\star$ é a fórmula obtida substituíndo cada vírgula que aparece na árvore Π pelo conectivo $\otimes$ e cada ocorrência da árvore vazia pela fórmula t.*
Prova: cf. Apêndice C.

O Teorema da Eliminação da regra do corte não é válido neste sistema porque por exemplo na seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\emptyset \Rightarrow I \qquad \dfrac{I \Rightarrow I}{(A,I) \Rightarrow I}}{(A,\emptyset) \Rightarrow I}}{A \Rightarrow I}$$

não é mais possível obter o sequente $A \Rightarrow I$ através de uma derivação sem o uso da regra do corte, já que só pode-se usar a regra da atenuação quando existe pelo menos uma fórmula no antecedente do sequente.

Semântica algébrica e categórica

Em [MR72] é estabelecido que um modelo algébrico para IES4 é uma 5-upla $(N, \leq, \circ, e, \rightharpoonup)$, onde $(N, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, $\circ : N \times N \to N$ é uma operação compatível com $\leq$ (i.e., se $a \leq b$ então $c \circ a \leq c \circ b$, e, $a \circ c \leq b \circ c$) com identidade à esquerda e, $a = e \circ a$ para todo $a \in N$, e para cada $a, b \in N$ existe o maior $x \in N$ tal que $x \circ a \leq b$. x é denotado por $a \rightharpoonup b$ e é chamado o pseudo-complemento à direita.

Além disto, para todo $a_1, a_2, a_3 \in N$ $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 \leq a_1 \circ (a_2 \circ a_3)$, $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 \leq a_2 \circ (a_1 \circ a_3)$, e também, $a \leq a \circ e$, $a \leq a \circ a$ e $a \circ b \leq b$ para todo $a, b \in N$.

É importante observar que as condições adicionais impostas em [MR72] são dedutíveis a partir destas.

De forma similar, podemos estabelecer o que é um modelo categórico pra IES4.

Um modelo categórico para IES4 é uma categoria $\mathbf{C}$ com um bi-funtor $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, e um funtor de "internal-hom" $[\_, \_] : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tal que é adjunto à direita de $\otimes$, i.e., $hom(X \otimes A, Y) \cong hom(X, [A, Y])$. Além disto, $\otimes$ tem diagonais $\delta : A \to A \otimes A$ e também vem acompanhado das transformações naturais $a : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $a' : (X \otimes Y) \otimes Z \to Y \otimes (X \otimes Z)$, $s : A \otimes B \to B$, $b : A \to A \otimes I$ e do isomorfismo natural $b' : A \xrightarrow{\sim} I \otimes A$, com as seguintes equações:

$b_I = b'_I$

$a_{A,A,A} = a'_{A,A,A}$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes C \arrow[rr, "a"] & & A \otimes (I \otimes C) \arrow[dl, leftrightarrow, "id \otimes b'"] \\
& A \otimes C \arrow[ul, "b \otimes id"] &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[l, "a"'] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "a \otimes id"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "id \otimes a"] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[ll, "a"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(I \otimes B) \otimes C \arrow[rr, "a'"] \arrow[dr, leftrightarrow, "b' \otimes id"'] & & B \otimes (I \otimes C) \arrow[dl, leftrightarrow, "id \otimes b'"] \\
& B \otimes C &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(I \otimes B) \otimes C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a'"] & I \otimes (B \otimes C) \arrow[d, leftrightarrow, "b'"] \\
B \otimes (I \otimes C) \arrow[r, leftrightarrow, "id \otimes b'"] & B \otimes C
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[rr, "a'"] \arrow[d, "a' \otimes id"] & & C \otimes ((A \otimes B) \otimes D) \arrow[dd, "id \otimes a"] \\
(B \otimes (A \otimes C)) \otimes D \arrow[d, "a'"] & & \\
(A \otimes C) \otimes (B \otimes D) \arrow[rr, "a'"] & & C \otimes (A \otimes (B \otimes D))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C \arrow[rr, "a'"] \arrow[dr, "s \otimes id"'] & & B \otimes (A \otimes C) \arrow[dl, "id \otimes s"] \\
& B \otimes C &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & A \otimes A \arrow[r, "id \otimes \delta"] & A \otimes (A \otimes A) \\
A \otimes A \arrow[rr, "\delta \otimes id"] & & (A \otimes A) \otimes A \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "id"] & \\
I \otimes I \arrow[r, leftrightarrow, "b'"'] & I
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, leftrightarrow, "id"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "s"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Com esta estrutura categórica é possível mostrar que para todo sequente demonstrável no lógica há associado a ele um morfismo na categoria. Para isto, verificamos que dado um morfismo que corresponde ao sequente superior das regras do cálculo de sequentes podemos obter um morfismo para o sequente inferior. Por exemplo, dado um morfismo $f : \Gamma[A \otimes (B \otimes C)]^\star \to E$ que corresponde ao sequente superior da regra P, usando $a'_{A,B,C} : (B \otimes A) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ e o funtor $\otimes$ temos um morfismo correspondente ao sequente inferior: $\Gamma[(B \otimes A) \otimes C]^\star \xrightarrow{a'^\star} \Gamma[A \otimes (B \otimes C)]^\star \xrightarrow{f} E$, onde $a'^\star$ é obtido aplicando o funtor $\otimes$ entre o morfismo $a'_{A,B,C}$ e os morfismos identidades nas fórmulas que aparecem em Γ.

4.2.2 A lógica relevante E

Em esta seção será discutida a lógica relevante E de Anderson e Belnap ([AB75]). Esta lógica que num princípio foi considerada, pelos seus creadores, a favorita entre as outras lógicas relevantes, perdeu logo sua hegemonia para a lógica R.

A idéia ao definir a lógica E foi a de restringir o efeito da implicação para evitar tanto os problemas devidos ao Paradoxo Positivo quanto as falacias evitadas pelas lógicas modais de Lewis. Assim, esta lógica tem uma implicação relevante e estrita ao mesmo tempo.

Sistemas Formais

Em [AB75, Dun86, Mey70] é apresentado um sistema axiomático que contém um conectivo de implicação estrita e relevante, junto com os conectivos aditivos relevantes, uma negação clássica e o conectivo de cotenabilidade. O fragmento multiplicativo para a lógica E, E^m, tem os axiomas da lógica IES4 menos o axioma da atenuação restringida.

$\mathrm{E}_{\rightharpoonup}$, o fragmento implicacional de E, é decidível e é conhecido na literatura como o puro cálculo do "entailment" de Ackermann.

O sistema de Sequentes livre da Regra do Corte para E (sem a distribuição dos aditivos e sem o conectivo de cotenabilidade), como ele é apresentado em [AB75], foi primeiro introduzido por Kripke em [Kri59], usando a apresentação para a lógica Clássica LK. Ele modificou o fragmento implicacional de LK em três importantes aspectos. Primeiro, restringiu a regra da implicação à direita de maneira que ela possua só uma fórmula no lado direito do sequente (assim, obtendo à lógica Intuicionista), também restringiu ista regra para que o contexto de fórmulas Γ seja formado só de fórmulas cujo conectivo principal é a implicação estrita e finalmente tirou do cálculo a regra da Atenuação.

Em [AB75] é apresentado um sistema de Sequentes para o fragmento implicacional, usando uma operação chamada Merge que permite misturar contextos.

Mas, um sistema de Sequentes (sem a eliminação da regra do corte) para E^m pode ser facilmente obtido do apresentado na seção anterior para a lógica IES4: basta tirar de esse cálculo a regra que permite a atenuação de fórmulas.

Semântica algébrica e categórica para $\mathbf{E}^m$

As semânticas algébricas e categóricas para E^m são obtidas diretamente das semânticas estabelecidas para IES4.

Um modelo algébrico para E^m, como definido em [MR72], é uma 5-upla $(N, \leq, \circ, e, \rightharpoonup)$, onde $(N, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, $\circ : N \times N \to N$ é uma operação compatível com $\leq$ (i.e., se $a \leq b$ então $c \circ a \leq c \circ b$, e, $a \circ c \leq b \circ c$) com identidade à esquerda e, $a = e \circ a$ para todo $a \in N$, e para cada $a, b \in N$ existe o maior $x \in N$ tal que $x \circ a \leq b$. x é denotado por $a \rightharpoonup b$ e é chamado o pseudo-complemento à direita.

Além disto, para todo $a_1, a_2, a_3 \in N$ $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 \leq a_1 \circ (a_2 \circ a_3)$, $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 \leq a_2 \circ (a_1 \circ a_3)$, e também, $a \leq a \circ e$, $a \leq a \circ a$ $a \in N$.

De maneira semelhante temos que um modelo categórico para E^m é uma categoria $\mathbf{C}$ com um bi-funtor $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ e um funtor de "internal-hom" $[\_, \_] : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tal que é adjunto à direita de $\otimes$, i.e., $hom(X \otimes A, Y) \cong hom(X, [A, Y])$. Além disto, $\otimes$ tem diagonais $\delta : A \to A \otimes A$ e também as transformações naturais $a : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $a' : (X \otimes Y) \otimes Z \to Y \otimes (X \otimes Z)$, $b : A \to A \otimes I$ e o isomorfismo natural $b' : A \xrightarrow{\sim} I \otimes A$ acompanhados dos diagramas de coerência correspondentes.

4.3 Lógicas não Comutativas

4.3.1 A lógica relevante T

Nesta seção lembramos um fragmento da lógica relevante T ("ticket and relevant entailment"), definida em [Dun86, AB75].

A terminologia de "inference-ticket", como usada por Ryle desde 1949, sugere que as proposições implicacionais não podem ser consideradas como sendo da mesma classe que as outras proposições (por exemplo, que as conjuntivas). A proposição conjuntiva, por exemplo, afirma os dois componentes que a formam, enquanto que uma proposição implicacional $A \to B$ significa que a inferência de B a partir de A está justificada. Segundo estas idéias, o importante é distinguir quando uma fórmula implicacional é um "ticket", uma justificativa de uma derivação, e quando é uma premisa com a qual pode-se continuar a derivação. A formalização destes fatos levaram a sistemas axiomáticos ([AB75]) onde se diferencia o uso das proposições implicacionais: se elas são premisas maiores numa regra de Modus Ponens são "tickets", se são premisas menores são fatos.

Além disto, a lógica T tem a característica de ser não comutativa mas é associativa à esquerda e é permitida uma certa permutação na ordem de alguns contextos.

A formulação axiomática para o fragmento multiplicativo de T é apresentada em [Dun86]:

- $A \rightharpoondown A$
- $(A \rightharpoondown (A \rightharpoondown B)) \rightharpoondown (A \rightharpoondown B)$
- $(A \rightharpoondown B) \rightharpoondown ((B \rightharpoondown C) \rightharpoondown (A \rightharpoondown C))$
- $(A \rightharpoondown B) \rightharpoondown ((C \rightharpoondown A) \rightharpoondown (C \rightharpoondown B))$
- t
- $t \rightharpoondown (A \rightharpoondown A)$

E as regras de M.P e

$$\updownarrow \frac{\vdash C \rightharpoondown (A \rightharpoondown B)}{\vdash C \otimes A \rightharpoondown B}$$

A seguir é apresentado um Cálculo de Sequentes:
Regras Estruturais:

$$(Ident)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (Corte)\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A \qquad (A,\Sigma) \ \Rightarrow \ B}{(\Gamma,\Sigma) \ \Rightarrow \ B} \qquad \downarrow \frac{(A,\emptyset) \Rightarrow D}{A \Rightarrow D}$$

$$(P)\frac{\Gamma[(A,(B,C))] \ \Rightarrow \ D}{\Gamma[((B,A),C)] \ \Rightarrow \ C} \qquad Assoc_e\frac{\Gamma[(A,(B,C))] \ \Rightarrow D}{\Gamma[((A,B),C)] \ \Rightarrow D} \qquad C\frac{\Pi[(A,A)] \Rightarrow B}{\Pi[A] \Rightarrow B}$$

Regras Lógicas:

$$I_e\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ B}{(I,\Gamma) \ \Rightarrow \ B} \qquad I_d\frac{}{\emptyset \Rightarrow I}$$

$$\otimes_e\frac{((A,B),\Gamma) \ \Rightarrow \ C}{(A \otimes B,\Gamma) \ \Rightarrow C} \qquad \otimes_d\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A \quad \Delta \ \Rightarrow \ B}{(\Gamma,\Delta) \ \Rightarrow \ A \otimes B} \quad \Delta \neq \ \emptyset$$

$$\Gamma \neq \ \emptyset, \ \rightharpoondown_e \frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A \quad \Delta[B] \ \Rightarrow \ C}{\Delta[(A \rightharpoondown B,\Gamma)] \ \Rightarrow C} \qquad \rightharpoondown_d \frac{(\Gamma,A) \ \Rightarrow B}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \rightharpoondown B}$$

Observe que em T temos que $(A \otimes B) \otimes C \ \Rightarrow \ A \otimes (B \otimes C)$ e também $(A \otimes B) \otimes C \ \Rightarrow \ B \otimes (A \otimes C)$. As restrições impostas nos contextos impedem de demonstrar: $A \rightharpoondown A \otimes I, (I \rightharpoondown A) \rightharpoondown A)$ o axioma da permutação restringida (válido em E) e a regra da asserção que não são válidos em T.

A equivalência do sistema de Sequentes com o sistema axiomático é provada de maneira similar a prova para IES4; um sequente $\Pi \Rightarrow A$ deve-se interpretar como a fórmula $\Pi^\star \rightharpoondown A$, obtida substituíndo cada vírgula que aparece na árvore pelo conectivo $\otimes$ e cada ocorrência da árvore vazia $\emptyset$ pela fórmula t.

O Teorema da Eliminação da regra do corte não é válido neste sistema porque por exemplo na seguinte derivação:

$$\frac{\emptyset \Rightarrow I \qquad \dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{\emptyset \Rightarrow B \rightharpoondown B} \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{(I,A) \Rightarrow A}}{I \Rightarrow A \rightharpoondown A}}{(\emptyset, I) \Rightarrow (B \rightharpoondown B) \otimes (A \rightharpoondown A)}}{(\emptyset,\emptyset) \Rightarrow (B \rightharpoondown B) \otimes (A \rightharpoondown A)}$$

não é mais possível obter o sequente através de uma derivação sem o uso da regra do corte, já que só pode-se usar a regra $\otimes_d$ quando existe pelo menos uma fórmula no antecedente do sequente direito.

Semântica

Um modelo algébrico para T, como definido em [MR72], é uma 5-upla $(N, \leq, \circ, e, \rightharpoonup)$, tal que $(N, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, $\circ : N \times N \to N$ é uma operação compatível com $\leq$ (i.e., se $a \leq b$ então $c \circ a \leq c \circ b$, e, $a \circ c \leq b \circ c$) com identidade à esquerda e, $a = e \circ a$ para todo $a \in N$, e para cada $a, b \in N$ existe o maior $x \in N$ tal que $x \circ a \leq b$. x é denotado por $a \rightharpoonup b$ e é chamado o pseudo-complemento à direita de a e b. Além disto, $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 \leq a_1 \circ (a_2 \circ a_3)$ e $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 \leq a_2 \circ (a_1 \circ a_3)$ para todo $a_1, a_2, a_3 \in N$.

Da mesma maneira que nos casos anteriores, um modelo categórico para T consiste de uma quádrupla $(\mathbf{C}, \otimes, I, [\_, \_])$, onde $\mathbf{C}$ é uma categoria com um bi-funtor $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ e um funtor de "internal-hom" $[\_, \_] : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tal que é adjunto à direita de $\otimes$, i.e., $hom(X \otimes A, Y) \cong hom(X, [A, Y])$. Além disto, $\otimes$ tem diagonais $\delta : A \to A \otimes A$ e existem as transformações naturais $a : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $a' : (X \otimes Y) \otimes Z \to Y \otimes (X \otimes Z)$ e o isomorfismo natural $b' : A \xrightarrow{\sim} I \otimes A$, acompanhados dos diagramas de coerência correspondentes.

4.3.2 O Cálculo de Lambek associativo

Já bem conhecido, principalmente em trabalhos relacionados com linguística computacional, o Cálculo de Lambek resulta de interesse também do ponto de vista da modelagem categórica. Trataremos aqui da versão associativa deste cálculo (chamada aqui de CL), mas a versão não associativa pode ser obtida usando os resultados das seções anteriores. Apresentamos apenas o fragmento multiplicativo do cálculo, os aditivos $\wedge, \vee$ podem ser acrescentados fácilmente usando os resultados obtidos para LLI no capítulo 3.

Sistemas Formais

Uma formulação axiomática para este sistema é apresentada:

$A \to A$

$(A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)) \to ((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3)$

t

$t \to (A \to A)$

$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$

$$MP\frac{\vdash A \quad \vdash A \to B}{\vdash B} \qquad Dem\frac{\vdash A}{\vdash (A \to B) \to B}$$

$$\updownarrow\frac{\vdash C \to (A \to B)}{\vdash C \otimes A \to B} \qquad \updownarrow\frac{\vdash C \to (A \leftarrow B)}{\vdash A \otimes C \to B}$$

Um Cálculo de Sequentes para o Cálculo de Lambek associativo é dado em [dP91b]:

$$(Identidade)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (Corte)\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A \qquad \Sigma, A, \Delta \;\Rightarrow\; B}{\Sigma, \Gamma, \Delta \;\Rightarrow\; B}$$

$$I_e \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A}{\Gamma, I, \Gamma' \Rightarrow A} \qquad I_d \frac{}{\Rightarrow I}$$

$$\otimes_e \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad \otimes_d \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B}$$

$$\rightarrow_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, A \rightarrow B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C} \qquad \rightarrow_d \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$\leftarrow_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, \Gamma, A \leftarrow B, \Sigma \Rightarrow C} \qquad \leftarrow_d \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \leftarrow B}$$

Neste caso letras gregas maiúsculas denotam sequências de fórmulas. Uma prova do teorema da Eliminação do Corte encontra-se, por exemplo, em [Bus86, Lam58].

Proposição 4.6 $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ *é demonstrável no Cálculo de Sequentes sse* $\vdash A_1 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow A))$ *no sistema axiomático.*
Prova: num sentido é por indução no comprimento da derivação; no outro sentido é suficiente mostrar que os axiomas e as regras do sistema axiomático podem ser obtidos no Cálculo de Sequentes.

Um sistema de λ-cálculo, junto com o processo de redução de termos, correspondente a CL pode ser encontrado em [AH93].

Observe que acrescentando a regra da Permutação ao sistema acima obtém-se que os conectivos $\rightarrow, \leftarrow$ são equivalentes e assim obtemos LLI, como formulada no capítulo 3.

No próximo capítulo trataremos com mais detalhes lógicas modais, mas é interessante notar que em [dP91b] introduz se a capacidade de permutar fórmulas ao cálculo acima através de uma modalidade (chamada κ) definida pelas regras:

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \kappa(A), \Delta \Rightarrow C} \qquad \frac{\kappa(\Gamma) \Rightarrow C}{\kappa(\Gamma) \Rightarrow \kappa(C)}$$

$$\updownarrow \frac{\Gamma, A, \kappa(B), \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, \kappa(B), A, \Gamma' \Rightarrow C}$$

É possível definir uma tradução fiel entre LLI e CL + κ, isto é através da modalidade κ recupera-se a capacidade de permutar fórmulas existente em LLI (cf. Apêndice C).

Semânticas algébricas e categóricas

Um modelo algébrico para o Cálculo associativo de Lambek é um monoide $(M, \leq, \circ, e)$ ordenado não simétrico (i.e. a estrutura monoidal é não simétrica) bifechado, i.e. para cada $a, b \in M$ existe um maior elemento $x \in M$ e também um maior elemento $y \in M$ tal que $x \circ a \leq b$ e $a \circ y \leq b$. x é denotado por $a \to b$ e chamado de pseudo-complemento à direita. Similarmente, y é denotado $a \leftarrow b$ e chamado de pseudo-complemento à esquerda. Esta estrutura é representada pela 5-upla $(M, \leq, \circ, e \to, \leftarrow)$ [dP91b].

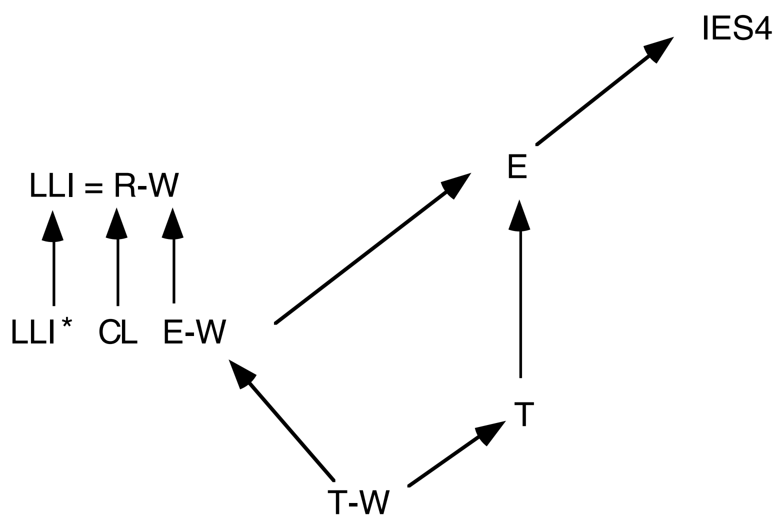
Um modelo categórico ([dP91b] para o Cálculo associativo de Lambek é uma categoria monoidal (não simétrica) bifechada, i.e. uma categoria monoidal $\mathbf{C}$ tal que o funtor $\_ \otimes A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tem como adjunto à direita um funtor de "internal-hom" $A \to \_ : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, e o funtor $A \otimes \_ : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tem um funtor de "internal-hom" como adjunto à direita $A \leftarrow \_ : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Isto é, temos os isomorfismos: $hom(X \otimes A, Y) \cong hom(X, A \to Y)$ e $hom(A \otimes X, Y) \cong hom(X, A \leftarrow Y)$.

Em [dP91b] é apresentado um modelo dialético para este cálculo.

4.4 Conclusões

Neste capítulo tratamos de várias lógicas subestruturais mais fracas que a Lógica Intuicionista. A Lógica Linear tem a característica que o conectivo de tensor, que na verdade simula o efeito da vírgula que separa as fórmulas dos antecedentes, é associativo e comutativo. Nesta etapa do trabalho, concentramos nossa atenção nestas duas propriedades e estudamos o efeito que elas têm sobre o conectivo da implicação.

Podemos relacionar às lógicas estudadas da seguinte maneira:



onde as flechas significam que tudo o que se deduz na primeira lógica é obtido também na outra. As lógicas E-W e T-W correspondem às lógicas E e T sem a regra da contração, respectivamente, [AB75, Dun86].

Estas não são as únicas lógicas não comutativas e/ou não associativas que podem se encontrar na literatura, mas as aqui estudadas servem para mostrar como podem ser tratadas outras lógicas deste gênero. Trabalhos futuros podem se centrar na análise de lógicas subestruturais desta classe tanto no nível sintático como categórico e também sua aplicação em Teoria da Computação. Neste sentido, em trabalhos recentes na área de desenvolvimento de linguagens funcionais tem-se usado versões da lógica básica relevante B^+ (esta lógica não tem a regra Assoc_e no seu cálculo) como correspondendo a sistemas de tipos interessantes para a programação funcional ([DCGV92]).

Poderia ser de interesse analisar que classe de relação existe, se existir alguma, entre os sistemas de implicação estrita intuicionista (como o sistema IES4 estudado neste capítulo) e os sistemas modais intuicionistas. Num quadro clássico, tendo a implicação clássica e um conectivo modal é possível definir o conectivo chamado implicação estrita; entre as duas classes de sistemas existem traduções fiéis. A análise feita neste sentido, poderia resultar interessante, por exemplo, para estabelecer o papel que a modalidade chamada $\Diamond$ desempenha dentro de um quadro intuicionista. No próximo capítulo estudaremos lógicas modais intuicionistas, mas não será feita nenhuma análise no sentido de relacionar sistemas modais com sistemas de implicação estrita. Este tópico pode ser de interesse para desenvolver trabalhos futuros.

Em [Pra65] é definido um sistema de implicação estrita intuicionista do gênero S4 como o sistema LJ mais as regras de introdução e eliminação para a implicação estrita. O sistema definido em [Pra65] é diferente do sistema chamado aqui de IES4. O sistema de Prawitz tem dois conectivos implicacionais e não tem um conectivo correspondente ao tensor. Estudar a relação entre estes dois sistemas pode ser assunto de trabalhos futuros.

Capítulo 5

Lógicas Modais

Neste capítulo serão tratadas várias lógicas modais, isto é lógicas que têm um conectivo modal na sua linguagem. Não se encontra na literatura uma definição clara do que deve-se entender por um conectivo modal, mas todos os casos apresentados têm similaridades desde o ponto de vista semântico, através da semântica dos mundos possíveis de Kripke ([HC84]), e desde o ponto de vista sintático, podemos dizer que são conectivos unários que possuem certas restrições de contexto para ser introduzidos.

Primeiramente, será acrescentada à lógica LLI uma modalidade que reestabeleça o poder da lógica R^{-}. A lógica assim obtida será comparada com a lógica modal chamada $\mathrm{R}^{\Box}$ de Anderson e Belnap ([AB75]) e $\mathrm{R}_{M,S4}$ definida em [Pra65]. Como acontece com a Lógica Linear, é possível obter também neste caso, modelos categóricos dialéticos, os quais são apresentados em detalhe no Apêndice E.

No caso da Lógica Linear de Girard os conectivos intuicionistas são refinados através dos conectivos lineares e do conectivo modal. Em particular, o conectivo modal refina a implicação intuicionista através da implicação linear. No caso das lógicas modais definidas por Lewis ([Lew32]), uma modalidade é acrescentada para definir, junto com a implicação clássica, um novo conectivo chamado de implicação estrita. A implicação estrita intuicionista correspondente à lógica S4 foi tratada no capítulo anterior, através do sistema chamado IES4.

5.1 A Lógica Relevante Modal

O próposito desta seção é descrever uma maneira semântica de acrescentar a contração de ocorrências de fórmulas à LLI e obter a mesma lógica relevante R^{-}. Neste trabalho a semântica categórica é a principal motivação, pois o modelo assim obtido é muito elegante e interessante.

Na apresentação de Cálculo de Sequentes de LLI, o qual tem como modelo catégorico as categorias simétricas monoidais fechadas com produtos e coprodutos finitos, acrescenta-se uma modalidade, que chamaremos de !, satisfazendo as regras correspondentes à modalidade da lógica S4 e também a regra da contração. A seguir será mostrado que este novo sistema corresponde ao cálculo LLI mais a regra da contração do capítulo anterior, chamado de R^{-}. Finalmente apresentam-se modelos para esta versão modal da lógica R^{-}.

A lógica assim obtida é comparada com a lógica relevante chamada $R^{\Box}$ [AB75] e com $R_{M,S4}$ definida em [Pra65].

5.1.1 Formulação sintática

O Cálculo de Sequentes

Nesta seção estuda-se a lógica, chamada de $LLI_!$. Esta lógica é obtida acrescentando ao Cálculo de Sequentes de LLI uma modalidade com certas regras que definem seu comportamento. $LLI_!$ é de elaboração própria, mas está motivada principalmente nas idéias da Lógica Linear Intuicionista, onde há um conectivo modal que simula o comportamento de regras estruturais ausentes, e também pelo fato que modelos categóricos obtidos para a Lógica Linear Intuicionista podem ser adaptados para tomar conta de um caso mais simples como é $LLI_!$.

Ao Cálculo de Sequentes para LLI:

Regras Estruturais:

$$(Identidade)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (P)\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \;\Rightarrow\; C} \qquad (Corte)\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A \qquad \Sigma, A, \Delta \;\Rightarrow\; B}{\Sigma, \Gamma, \Delta \;\Rightarrow\; B}$$

Regras Lógicas:

$$I_e\frac{\Gamma', \Gamma \;\Rightarrow\; A}{\Gamma', I, \Gamma \;\Rightarrow\; A} \qquad I_d\frac{}{\Rightarrow I}$$

$$\otimes_e\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \;\Rightarrow C} \qquad \otimes_d\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A \quad \Delta \;\Rightarrow\; B}{\Gamma, \Delta \;\Rightarrow\; A \otimes B}$$

$$\multimap_e \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A \quad \Delta, B, \Sigma \;\Rightarrow\; C}{\Delta, A \multimap B, \Gamma, \Sigma \;\Rightarrow C} \qquad \multimap_d \frac{\Gamma, A \;\Rightarrow B}{\Gamma \;\Rightarrow\; A \multimap B}$$

$$\frac{}{\Gamma \;\Rightarrow\; 1} \qquad \frac{}{\Gamma, 0, \Delta \;\Rightarrow A}$$

$$\&_e\frac{\Gamma, A, \Delta \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, A\&B, \Delta \;\Rightarrow C} \qquad \frac{\Gamma, B, \Delta \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, A\&B, \Delta \;\Rightarrow C} \qquad \&_d\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A \quad \Gamma \;\Rightarrow\; B}{\Gamma \;\Rightarrow\; A\&B}$$

$$\oplus_e\frac{\Gamma, A, \Delta \;\Rightarrow C \quad \Gamma, B, \Delta \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, A \oplus B, \Delta \;\Rightarrow\; C} \qquad \oplus_d\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A}{\Gamma \;\Rightarrow\; A \oplus B} \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; B}{\Gamma \;\Rightarrow\; A \oplus B}$$

Acrescentamos as seguintes regras:

$$!_e\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, !A, \Delta \Rightarrow B} \qquad !_d\frac{!\Gamma \Rightarrow A}{!\Gamma \Rightarrow !A}$$

$$\downarrow \frac{\Gamma, !A, !A, \Gamma' \;\Rightarrow\; C}{\Gamma, !A, \Gamma' \;\Rightarrow\; C} \quad (C!)$$

As regras $!_e$, $!_d$ têm recebido na literatura os nomes *deleção* ("derelection") e *promoção* ("promotion") respectivamente. Estes nomes serão usados ao longo da tese. Observe que a regra de promoção pode ser lida nos dois sentidos, de cima para baixo e de baixo para cima, mas a regra de deleção é para ser usada só no sentido natural de cima para baixo.

Na regra $!_d$, $!\Gamma$ significa que cada uma das fórmulas que ocorrem na sequência Γ tem como conectivo principal $!$. Em outras palavras, se Γ é a sequência formada pelas fórmulas $< A_1, \ldots, A_n >$, então $!\Gamma$ denota a sequência $<!A_1, \ldots, !A_n >$.

Observe que neste sistema temos que:

- $\nvdash !A\&!B \multimap !(A\&B)$
- $\vdash !(A\&B) \multimap !A\&!B$
- $\vdash !A\otimes !B \multimap !(A \otimes B)$
- $\nvdash !(A \otimes B) \multimap !A\otimes !B$
- $\vdash !(!A\&!B) \multimap !(A\&B)$
- $\vdash !(A\&B) \multimap !(!A\&!B)$
- $\vdash !(A\&B) \multimap !A\otimes !B$
- $\nvdash !A\otimes !B \multimap !(A\&B)$

O Teorema da Eliminação da regra do corte para $\mathrm{LLI}_!$ é provado, por exemplo em [Tro90, pag 23], onde este teorema é provado para a Lógica Linear de primeira ordem, chamada de ILL.

Sistema Axiomático

O sistema axiomático que corresponde à lógica $\mathrm{LLI}_!$ obtém-se imediatamente do sistema para a Lógica Linear Intuicionista, como ele é apresentado em [Tro90]:

1. $A \multimap A$
2. $(A \multimap B) \multimap ((B \multimap C) \multimap (A \multimap C))$
3. $(A \multimap (B \multimap C)) \multimap (B \multimap (A \multimap C))$
4. $(A \multimap (B \multimap C)) \multimap (A \otimes B \multimap C)$
5. $(A \otimes B \multimap C) \multimap (A \multimap (B \multimap C))$

6. $(I \multimap A) \multimap A$

7. $I \multimap (A \multimap A)$

8. $A\&B \multimap A$

9. $A\&B \multimap B$

10. $(A \multimap B)\&(A \multimap C) \multimap (A \multimap B\&C)$

11. $A \multimap A \oplus B$

12. $B \multimap A \oplus B$

13. $(A \multimap C)\&(B \multimap C) \multimap (A \oplus B \multimap C)$

14. $A \multimap 1$

15. $0 \multimap A$

16. $!(A \multimap B) \multimap (!A \multimap !B)$

17. $!A \multimap !!A$

18. $!A \multimap A$

19. $(!A \multimap (!A \multimap B)) \multimap (!A \multimap B)$

$$(MP)\frac{\vdash A \quad \vdash A \multimap B}{\vdash B} \qquad (adj)\frac{\vdash A \quad \vdash B}{\vdash A\&B} \qquad Nec\frac{\vdash A}{\vdash !A}$$

Neste sistema, a noção de derivação $\Gamma \vdash A$, onde Γ é um multiset de fórmulas, é definida como sendo uma árvore tal que cada membro é da forma $B \vdash B$ (B aparece em Γ) ou é uma instancia dos axiomas $\vdash B$ da lista, ou é obtido juntando árvores com as regras:

$$\frac{\Delta \vdash C \quad \Gamma' \vdash C \multimap B}{\Delta, \Gamma' \vdash B} \qquad \frac{\Delta \vdash C \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash C\&B} \qquad \frac{\vdash A}{\vdash !A}$$

e $\Gamma \vdash A$ é a último membro da árvore, [Tro90]. O teorema de dedução: $\Gamma, A \vdash B$ então $\Gamma \vdash A \multimap B$, vale para este sistema, [Tro90].

A Formulação em Dedução Natural

O sistema de Dedução Natural para o chamado fragmento multiplicativo da Lógica Linear num estilo de sequentes, como ele é apresentado em [BBdPH92], tem a vantagem sobre os outros sistemas conhecidos na literatura que ele satisfaz a propriedade de ser fechado sob substitução (ou de ter a propriedade do corte) além de satisfazer o Teorema da Forma Normal. Usando este sistema, e o sistema para LLI, obtemos imediatamente o sistema correspondente à lógica $LLI_!$.

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad C_!\frac{\Gamma \Rightarrow !A \quad \Delta, !A, !A, \Sigma \Rightarrow B}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow B}$$

$$I_e\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow I}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A} \qquad I_i\frac{}{\Rightarrow I}$$

$$\otimes_e\frac{\Gamma \Rightarrow A \otimes B \quad \Delta, A, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta, \Sigma \Rightarrow C} \qquad \otimes_i\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B}$$

$$\multimap_e\frac{\Gamma \Rightarrow A \multimap B \quad \Delta \Rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B} \qquad \multimap_i\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B}$$

$$\frac{}{\Gamma, 0 \Rightarrow A} \qquad \frac{}{\Gamma \Rightarrow 1}$$

$$\&_e\frac{\Gamma \Rightarrow A\&B}{\Gamma \Rightarrow A} \qquad \&_e\frac{\Gamma \Rightarrow A\&B}{\Gamma \Rightarrow B} \qquad \&_i\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\&B}$$

$$\oplus_e\frac{\Delta \Rightarrow A \oplus B \quad \Sigma, A, \Gamma \Rightarrow C \quad \Sigma, B, \Gamma \Rightarrow C}{\Sigma, \Delta, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \oplus_i\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \qquad \oplus_i\frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}$$

$$Del\frac{\Gamma \Rightarrow !A}{\Gamma \Rightarrow A} \qquad Prom\frac{\Delta_1 \Rightarrow !A_1 \ldots \Delta_n \Rightarrow !A_n \quad !A_1, \ldots, !A_n \Rightarrow B}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow !B}$$

Este sistema de Dedução Natural tem as seguintes propriedades:

Proposição 5.1 *Se $\vdash \Gamma \Rightarrow A$ e $\vdash \Delta, A \Rightarrow B$ então $\vdash \Gamma, \Delta \Rightarrow B$ é uma derivação válida no sistema de Dedução Natural acima.*
Prova: por indução no comprimento de $\vdash \Delta, A \Rightarrow B$. É importante verificar os casos onde a última regra usada envolve a modalidade !, nos outros casos usamos o resultado de LLI.

Proposição 5.2 *O sequente $\Gamma \Rightarrow A$ é demonstrável no Cálculo de Sequentes sse $\Gamma \Rightarrow A$ é demonstrável no sistema de Dedução Natural.*
Prova: por indução no comprimento da derivação, usamos os resultados para LLI e do Lema da Substituição acima.

Teorema 5.1 *A cada derivação no Sistema de Dedução Natural acima corresponde uma derivação normal.*
Prova: as reduções necessárias são apresentadas em forma de passos de contração de termos, na próxima seção.

5.1.2 O Cálculo de Termos

Para obter um cálculo de termos para a lógica LLI$_!$ usamos também aqui o sistema obtido para o fragmento multiplicativo da Lógica Linear Intuicionista em [BBdPH92]. Para isto deve-se acrescentar ao cálculo de termos correspondente à lógica LLI as seguintes regras de formação de termos:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t :!A}{\Gamma \Rightarrow (\text{ derelict } t) : A} \qquad \frac{\Delta_1 \Rightarrow t_1 :!A_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow t_n :!A_n \quad x_1 :!A_1, \ldots x_n :!A_n \Rightarrow s : B}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow (\text{ promote } t_1, \ldots, t_n \text{ for } x_1, \ldots, x_n \text{ in } s) :!B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t :!A \qquad \Delta, x :!A, y :!A \Rightarrow s : B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (\text{ copy } t \text{ as } x, y \text{ in } s) : B}$$

Com as seguintes reduções acrescentadas ao conjunto de reduções de LLI:

- reduções operacionais:
  derelict (promote $t_1, \ldots, t_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in s) $\hookrightarrow$ $s[t_1/x_1, \ldots t_n/x_n]$

- reduções permutativas:

  1. copy (promote $t_1, \ldots t_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in t) as y, z in u $\hookrightarrow$
     (copy$_i t_i$ as x'_i, y'_i in u[(promote $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in $t)/y$,
     (promote $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in $t)/z$] copy$_i t_i$ as x'_i, y'_i, $0 \leq i \leq n$, significa aplicar n vezes a regra "copy".
  2. promote (promote $t_1, \ldots, t_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in f), $l_1, \ldots, l_m$ for $y, y_1, \ldots, y_m$ in g $\hookrightarrow$
     promote $t_1, \ldots, t_n, l_1, \ldots, l_m$ for $x'_1, \ldots, x'_n, y_1, \ldots, y_m$ in
     (g[promote $x'_1, \ldots, x'_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in f/y])
  3. derelict (case u use $(i_1 x)$ then t else use $(i_2 y)$ then s) $\hookrightarrow$
     case u use $(i_1 x)$ then derelict (t) else use $(i_2 y)$ then derelict (s)
  4. derelict (copy e as x, y in f) $\hookrightarrow$ copy e as x, y in derelict (f)
  5. (copy e as x, y in $f)g$ $\hookrightarrow$ copy e as x, y in (fg)
  6. let (copy e as x, y in f) be $z \otimes w$ in g $\hookrightarrow$ copy e as x, y in (let f be $z \otimes w$ in g)
  7. let (copy e as x, y in f) be i in g $\hookrightarrow$ copy e as x, y in (let f be i in g)
  8. copy (copy e as x, y in f) as z, w in g $\hookrightarrow$ copy e as x, y in (copy f as z, w in g)
  9. case (copy t as x, y in s) use $(i_1 x)$ then l else use $(i_2 y)$ then m $\hookrightarrow$
     copy t as x, y in (case s use $(i_1 x)$ then l else use $(i_2 y)$ then m)
  10. π_1(copy e as x, y in f) $\hookrightarrow$ copy e as x, y in $\pi_1(f)$
  11. π_2(copy e as x, y in f) $\hookrightarrow$ copy e as x, y in $\pi_2(f)$

- reduções η:
  promote z for x in (derelict (x)) $\hookrightarrow z$

- reduções ξ:

  1. $t \rightsquigarrow t'$ e $s \rightsquigarrow s'$ então copy t as x, y in $s \rightsquigarrow$ copy t' as x, y in s'
  2. $t \rightsquigarrow t'$ então derelict $t \rightsquigarrow$ derelict t'
  3. $t_1 \rightsquigarrow t'_1, \ldots, t_n \rightsquigarrow t'_n$ e $s \rightsquigarrow s'$ então
     promote $t_1, \ldots, t_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in $s \rightsquigarrow$ promote $t'_1, \ldots, t'_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in s'

Proposição 5.3 $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ *é demonstrável no sistema de Dedução Natural para* $LLI_!$ *sse para qualquer conjunto de variáveis* $\{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$ *existe um termo* $t : A$ *tal que* $\vdash x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow t : A$ *é obtido no Sistema de Termos para* $LLI_!$*.*
Prova: por indução no comprimento da derivação. Os axiomas (base da indução) são traduzidos em axiomas. Os casos indutivos, determinados pela última regra de inferência usada na derivação, são obtidos das hipóteses indutivas e a correspondência entre as regras que definem cada sistema.

Teorema 5.2 $\rightsquigarrow$ *é normalizável.*
Prova: similar à prova para a dedução natural.

Este sistema difere do encontrado normalmente na literatura para a Lógica Linear com o conectivo modal linear ! (além de não ter a atenuação de fórmulas modais) em que ele possui a propriedade da substituição de termos:

Proposição 5.4 *Se* $\vdash \Gamma \Rightarrow t : A$ *e* $\vdash \Delta, x : A \Rightarrow l : B$ *então* $\vdash \Gamma, \Delta \Rightarrow l[t/x] : B$*.*
Prova: usando os resultados para LLI e de [BBdPH92].

5.1.3 Traduções entre $\mathbf{LLI_!}$ e $\mathbf{R^-}$

Para comparar a lógica modal $\mathrm{LLI_!}$ e a lógica $\mathrm{R^-}$, precisa-se definir uma tradução entre as fórmulas e sequentes, já que as linguagens em que elas estão definidas são diferentes. Para isto consideraremos que as lógicas são apresentadas através de sistemas de Cálculo de Sequentes o que facilitará as provas dos resultados obtidos, mas isto não é de muita relevância.

Seja uma lógica **A** com uma linguagem L, e outra lógica **B** com uma linguagem L'. Dada uma função, $m : \mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(L')$, que traduz as fórmulas de **A** nas fórmulas de **B**, definida por indução na estrutura das fórmulas de **A**, definimos uma função $F : Seq(L) \rightarrow Seq(L')$ da seguinte forma: $F[A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m] = G[f(A_1), \ldots, f(A_n) \Rightarrow f(B_1), \ldots, f(B_m)]$, onde G é uma função na linguagem de **B**, $G : Seq(L') \rightarrow Seq(L')$.

Se F é tal que $\vdash_{\mathbf{A}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ então $\vdash_{\mathbf{B}} F[\Gamma \Rightarrow \Delta]$, dizemos que F é uma *tradução* da lógica **A** na lógica **B** .

No caso em que G seja a função identidade, a definição acima converte-se na usual definição de "embedding" achada na literatura [PM68].

Uma propriedade importante das traduções é que ela seja fiel ("faithful"), i.e. $\vdash_{\mathbf{B}} F[\Gamma \Rightarrow \Delta]$ então $\vdash_{\mathbf{A}} \Gamma \Rightarrow \Delta$, pois garante que os sequentes obtidos pela tradução precisam só das traduções das regras de **A** para suas demonstrações.

Da mesma maneira que os símbolos intuicionistas podem ser considerados como definidos na Lógica Linear ([Gir87, pag.78]), podemos ver que os símbolos relevantes podem ser também definidos na Lógica Linear, na verdade no seu fragmento chamado aqui de $LLI_!$.

Seja L' a linguagem da lógica $LLI_!$ e L a linguagem da LLI. Seja a função $t : \mathcal{F}(L) \rightarrow \mathcal{F}(L')$ dada pela seguinte definição recursiva:

$t(A) = A$, se A é uma fórmula atômica
$t(A \multimap B) = !t(A) \multimap t(B)$
$t(A \otimes B) = !t(A) \otimes !t(B)$
$t(A \& B) = t(A) \,\&\, t(B)$
$t(A \oplus B) = !t(A) \oplus !t(B)$

Esta tradução pode-se estender às demonstrações, e ela é fiel:

Proposição 5.5 $\vdash \Gamma \Rightarrow A$ *no Cálculo de Sequentes para* R^- *sse* $\vdash !t(\Gamma) \Rightarrow t(A)$ *no Cálculo de Sequentes para* $LLI_!$[1].
Prova: por indução no comprimento da prova $\Gamma \Rightarrow A$.

Para provar o sentido de direita para esquerda da proposição usa-se o fato de que é possível definir uma tradução t', *de* $LLI_!$ *para* R^-:

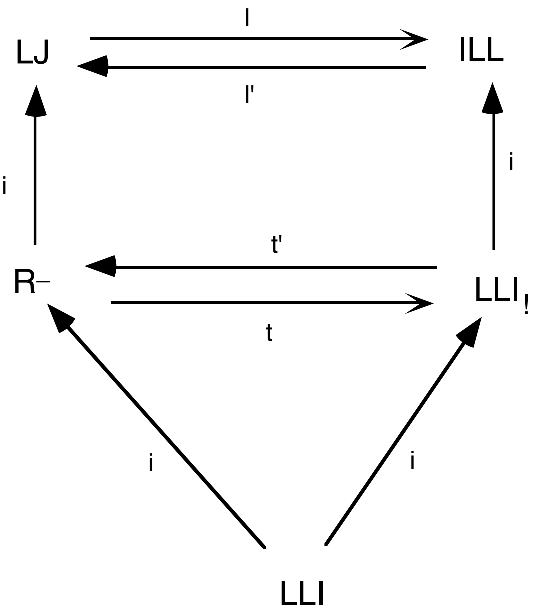
$t'(A) = A$, *se* A *é uma fórmula atômica*
$t'(A \multimap B) = t'(A) \multimap t'(B)$
$t'(A \otimes B) = t'(A) \otimes t'(B)$
$t'(A \& B) = t'(A) \,\&\, t'(B)$
$t'(A \oplus B) = t'(A) \oplus t'(B)$
$t'(!A) = t'(A)$

E que esta tradução é tal que $t'.t(A) = A$.

$LLI_!$ é um refinamento da lógica R^- através da implicação linear e um conectivo modal. Isto é, a implicação relevante da lógica R^- foi decomposta através da implicação linear (mais simples) e um novo conectivo que é uma modalidade. $!A$ significa que se tem *ao menos* uma ocorrência da fórmula A.

A relação entre as lógicas envolvidas neste quadro é mostrada na seguinte figura:

[1] se $\Gamma = < A_1, \ldots, A_n >$ então $!t(\Gamma) = < !t(A_1), \ldots, !t(A_n) >$



Onde ILL é a Lógica Linear Intuicionista com sua modalidade (vide Apêndice A). As traduções l, l' são as traduções entre a Lógica Linear e a Intuicionista já bem conhecidas na literatura ([GL87, dP88]) e definidas por:
$l(A) = A$ se A é atômica
$l(A \wedge B) = l(A) \;\&\; l(B)$
$l(A \vee B) = !l(A) \oplus !l(B)$
$l(A \rightarrow B) = !l(A) \multimap l(B)$

$l'(A) = A$ se A é atômica
$l'(A \& B) = l'(A) \wedge l'(B)$
$l'(A \oplus B) = l'(A) \vee l'(B)$
$l'(A \otimes B) = l'(A) \wedge l'(B)$
$l'(A \multimap B) = l'(A) \rightarrow l'(B)$
$l'(!A) = l'(A)$

A tradução i significa a inclusão entre as lógicas correspondentes.

É importante observar que é possível definir uma tradução fiel entre R^- e o sistema CL + κ (cf. capítulo 4) com as regras:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma, !A \Rightarrow B} \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A}{!\Gamma \Rightarrow !A}$$

$$\frac{\Gamma, !A, !A, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, !A, \Delta \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \kappa(A)}{\Gamma \Rightarrow !A}$$

Isto significa que os conectivos relevantes podem ser decompostos através de conectivos mais simples que os lineares, como os conectivos do Cálculo de Lambek e os conectivos modais que reintroduzem as propriedades de permutar e contrair ocorrências de fórmulas. Neste caso a tradução é definida como a tradução de LLI em CL + κ estendendo adequadamente ao conectivo !.

5.1.4 A semântica algébrica

Usando a apresentação do modelo algébrico para a Lógica Linear com o conectivo modal ! (por exemplo, como ele é tratado em [Avr88, pag 181] e em [Tro90, pag 49]) pode-se obter inmediatamente um modelo algébrico para LLI$_!$.

Definição 5.1 *Um* monóide modal $(M, \leq, \circ, e, \mathcal{M})$ *é um monóide ordenado* $(M, \leq, \circ, e)$*, com uma nova operação* $\mathcal{M} : M \rightarrow M$ *que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\mathcal{M}(a) \leq a$
2. $\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(\mathcal{M}(a))$
3. $a \leq b$ *então* $\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(b)$
4. $\mathcal{M}(e) = e$
5. $\mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b) \leq \mathcal{M}(a \circ b)$

As condições 1 e 2 acima são as duais das condições para um operador de fecho em um conjunto parcialmente ordenado; chamaremos este gênero de operador de *co-fecho*. As últimas duas condições relacionam o comportamento do operador de co-fecho com a operação monoidal.

A classe dos monóides fechados, aditivos (i.e. um modelo para LLI) e modais tal que $\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(a)$ é um modelo algébrico para a lógica LLI$_!$. Isto se deve a que dado um monóide modal $(M, \leq, \circ, e, \mathcal{M})$, $\mathcal{M}$ é uma operação unária e compatível com $\leq$ por 3 da definição de monóide modal. Além disto, dada uma função de interpretação, $\mathcal{I}$, das variáveis proposicionais nos elementos de M que se estende indutivamente às fórmulas complexas (interpretando I como e, $\otimes$ como $\circ$, ! como $\mathcal{M}$, etc.), podemos ref letir a relação de dedutibilidade da lógica LLI$_!$ na estrutura monoidal:

Deleção por 1 da definição de monóide modal temos $\mathcal{M}(a) \leq a$, usando a compatibilidade da operação temos que: $\mathcal{I}(A_1) \circ \ldots \circ \mathcal{I}(A_n) \circ \mathcal{M}(a) \circ \mathcal{I}(B_1) \circ \ldots \circ \mathcal{I}(B_m) \leq \mathcal{I}(A_1) \circ \ldots \circ \mathcal{I}(A_n) \circ a \circ \mathcal{I}(B_1) \circ \ldots \circ \mathcal{I}(B_m) \leq \mathcal{I}(C)$, onde a última desigualdade é a hipótese que corresponde ao sequente superior da regra. Por transitividade temos o resultado desejado.

Promoção dado $\mathcal{M}(a_1) \circ \ldots \circ \mathcal{M}(a_n) \leq a$, correspondendo ao sequente superior, pela compatibilidade das operações temos que: $\mathcal{M}(\mathcal{M}(a_1) \circ \ldots \circ \mathcal{M}(a_n)) \leq \mathcal{M}(a)$.

Por outro lado temos, usando 2 da definição de monóide modal: $\mathcal{M}(a_1) \circ \ldots \circ \mathcal{M}(a_n) \leq \mathcal{M}(\mathcal{M}(a_1)) \circ \ldots \circ \mathcal{M}(\mathcal{M}(a_n)) \leq \mathcal{M}(\mathcal{M}(a_1) \circ \ldots \circ \mathcal{M}(a_n))$, onde a última desigualdade deve-se ao uso de 5 da definição de monóide modal.

Por transitividade, temos que $\mathcal{M}(a_1) \circ \ldots \circ \mathcal{M}(a_n) \leq a$, que é a interpretação do sequente inferior da regra.

C! dado $\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(a)$, por compatibilidade temos que: $a_1 \circ \ldots \circ a_n \circ \mathcal{M}(a) \circ b_1 \circ \ldots \circ b_m \leq a_1 \circ \ldots \circ a_n \circ \mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(a) \circ b_1 \circ \ldots \circ b_m \leq c$, onde a última desigualdade é a hipótese correspondente ao sequente superior. Por transitividade obtemos o resultado desejado correspondente ao sequente inferior.

Na definição da operação de co-fecho temos que $e \leq \mathcal{M}(e)$. Isto é necessário porque no sistema temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow I}{\Rightarrow !I}\ Prom}{I \Rightarrow !I}\ I_l$$

Para provar que se em qualquer monóide fechado, aditivo e modal temos $\mathcal{I}(A_1) \circ \ldots \mathcal{I}(A_n) \leq \mathcal{I}(B)$ então $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ é suficiente mostrar que a álgebra de Lindenbaum de $\mathrm{LLI}_!$ é um monóide deste tipo. Podemos, então obter que $\vdash \Rightarrow B$ sse $\vdash I \Rightarrow B$ sse $e \leq b$.

Se ! satisfizesse também a regra

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma, !A \Rightarrow B}$$

isto é, se ! for o conectivo modal da Lógica Linear Intuicionista, então $\mathcal{M}$ deveria satisfazer também que $\mathcal{M}(a) \leq e$. Esta semântica algébrica é equivalente à semântica apresentada, por exemplo em [Avr88, Tro90], para a Lógica Linear com o conectivo modal !. A diferença da semântica aqui apresentada é que nos trabalhos citados exige-se uma espécie de distribuição entre a operação monoidal e a de ínfimo: $\mathcal{M}(x) \circ \mathcal{M}(y) = \mathcal{M}(x \& y)$ que na verdade é uma condição equivalente as exigências apresentadas aqui (cf. Apêndice D). Por outro lado, como será mostrado na próxima seção, a modelagem categórica apresentada aqui é mais geral que as já conhecidas.

5.1.5 A semântica categórica

Como uma generalização de um operador de fecho num conjunto parcialmente ordenado, define-se a noção, em Teoria de Categorias, de *mônada* ("monad") ou *tripla*, [LS86, pag 27]. A noção dual, correspondendo a um operador de co-fecho , é a de *comônada* ("comonad") ou *cotripla*.

Definição 5.2 *Uma* comônada *(ou cotripla) numa categoria* $\mathbf{C}$ *é uma tripla* (T, δ, ε)*, onde* $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *é um funtor,* $\delta : T \to T^2$ *e* $\varepsilon : T \to Id$ *são transformações naturais (chamadas de comultiplicação e counidade respectivamente) tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & T^2 \arrow[d, "T\delta"] \\
T^2 \arrow[r, "\delta T"] & T^3
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T & T^2 \arrow[l, "\varepsilon T"'] \arrow[r, "T\varepsilon"] & T \\
& T \arrow[ul, "id_T"] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "id_T"'] &
\end{tikzcd}$$

As seguintes definições serão também úteis para definir a noção de modelo para $LLI_!$

Definição 5.3 *Sejam* $(\mathbf{C}, I, \otimes, a, b, c), (\mathbf{C}', I', \otimes', a', b', c')$ *categorias simétricas monoidais, um funtor* $F : C \to C'$ *é um* funtor monoidal *se existe um morfismo* $i : I' \to F(I)$ *e uma transformação natural* $\tau : F(\_) \otimes' F(\_) \to F(\_ \otimes \_)$ *que satisfazem os seguintes diagramas comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes' (F(B) \otimes' F(C)) \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "id \otimes' \tau"'] & (F(A) \otimes' F(B)) \otimes' F(C) \arrow[r, "\tau \otimes id"] & F(A \otimes B) \otimes' F(C) \arrow[d, "\tau"] \\
F(A) \otimes' F(B \otimes C) \arrow[r, "\tau"] & F(A \otimes (B \otimes C)) \arrow[r, "F(a)"] & F((A \otimes B) \otimes C)
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
I' \otimes' F(A) \arrow[r, "i \otimes id"] \arrow[d, "b'"'] & F(I) \otimes' F(A) \arrow[d, "\tau"] \\
F(A) & F(I \otimes A) \arrow[l, "F(b)"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \otimes' F(B) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "c'"'] & F(A \otimes B) \arrow[d, "F(c)"] \\
F(B) \otimes' F(A) \arrow[r, "\tau"] & F(B \otimes A)
\end{tikzcd}
$$

Definição 5.4 *Sejam $F, F' : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ dois funtores monoidais, uma transformação natural $\sigma : F \to F'$ é uma* transformação natural monoidal *se ela satisfaz os seguintes diagramas comutativos:*

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \otimes' F(B) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma \otimes' \sigma"'] & F(A \otimes B) \arrow[d, "\sigma"] \\
F'(A) \otimes' F'(B) \arrow[r, "\tau'"] & F'(A \otimes B)
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd} I' \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "i'"] & \\ F(I) \arrow[r, "\sigma_I"'] & F'(I) \end{tikzcd}$$

Definição 5.5 *Uma* categoria simétrica monoidal modal $(\mathbf{C},!)$ *é uma categoria simétrica monoidal* $\mathbf{C}$ *com uma comônada monoidal* $(!, \delta, \varepsilon)$*, i.e. o funtor ! é um funtor monoidal e as transformações naturais* ε, δ *são monoidais.*

Com estas definições temos que uma categoria linear (i.e. uma categoria simêtrica monoidal fechada com produtos e coprodutos finitos) modal ($\mathbf{C}$,!) é um modelo categórico para o fragmento de $LLI_!$ sem a regra da contração, i.e. $LLI_!$ - C! (cf. Apêndice D).

Para obter um modelo categórico para $LLI_!$ precisamos definir mais algumas noções categóricas:

Definição 5.6 *Um* co-semigrupo *numa categoria monoidal* $\mathbf{C}$ *é um par* $< A, m >$*, onde* A *é um objeto da categoria* $\mathbf{C}$ *junto com um morfismo* $m : A \longrightarrow A \otimes A$ *(chamada de comultiplicação) tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "id"'] & A \otimes A \arrow[r, "id \otimes m"] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "a"] \\ A \arrow[r, "m"] & A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id"] & (A \otimes A) \otimes A \end{tikzcd}$$

Definição 5.7 *Um* morfismo de co-semigrupos $f :< A, m > \longrightarrow < A', m' >$ *é um morfismo* $f : A' \longrightarrow A$ *em* $\mathbf{C}$ *tal que* $m.f = (f \otimes f).m'$

Proposição 5.6 *Os co-semigrupos de uma categoria* $\mathbf{C}$ *com os morfismos de co-semigrupos definem uma categoria chamada de* $\mathbf{Cosem}_C$*.*

Prova: O morfismo identidade $id_{<A,m>} :< A, m > \rightarrow < A, m >$ *é definido pela identidade* $id_A : A \rightarrow A$ *em* $\mathbf{C}$*, já que neste caso temos* $m.id_A = (id_A \otimes id_A).m = id_{A \otimes A}.m$*.*

A composição de morfismos $f :< A, m > \longrightarrow < A', m' >, g :< A', m' > \longrightarrow < A'', m'' >$ *é definida pela composição em* $\mathbf{C}$*,* $g.f : A \to A''$ *já que neste caso temos* $m.(f.g) = (f \otimes f).(g \otimes g).m''$

Definição 5.8 *Um* co-semigrupo comutativo *é um co-semigrupo* $< A, m >$ *tal que* $c_{A,A}.m = m$*.*

Proposição 5.7 *Os co-semigrupos comutativos definem uma subcategoria plena* **Cosemcom** *da categoria* **Cosem***.*
Prova: direto.

Definição 5.9 *Decimos que uma !-coálgebra* $< A, h >$ tem estrutura de co-semigrupo comutativo *se existe um morfismo* $m : A \to A \otimes A$ *tal que* $a.(id \otimes m).m = m.(m \otimes id)$ *e* $c.m = m$*. que é um morfismo de coálgebras (entre as coálgebras* $< A, h >$ *e* $< A \otimes A, h' >$*).*

Um modelo categórico para LLI$_!$ é uma categoria linear (i.e. uma categoria simêtrica monoidal fechada com produtos e coprodutos finitos) modal $(\mathbf{C},!)$ tal que cada !-coálgebra livre $<!A, \delta>$ tem estrutura de co-semigrupo comutativo e cada morfismo de coálgebras livres é um morfismo de co-semigrupos (cf. Apêndice D). Denotamos a condição acima por $\mathbf{C}_! \ll \mathbf{Cosemcom}_C$.

É possível provar o seguinte resultado com o qual podem-se obter condições para estabelecer o modelo acima:

Proposição 5.8 *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria monoidal, se o funtor de esquecimento* $U : \mathbf{Cosemcom}_C \to \mathbf{C}$ *tem um adjunto a direita* R*, então a comônada* (T, δ, ε) *definida em* $\mathbf{C}$ *pela adjunção entre* U *e* R *é tal que* $\mathbf{Cosemcom}_C \cong \mathbf{C}^T$*.*
Prova: cf. Apêndice D.

O seguinte resultado relaciona no nível dos modelos categóricos as lógicas R$^-$ e LLI$_!$. A tradução $t : R^- \to LLI_!$ nos diz que uma demonstração de um sequente $\Gamma \Rightarrow A$ na lógica R^- corresponde-se com uma demonstração de $!t(\Gamma) \Rightarrow t(A)$ na lógica $LLI_!$, e vice-versa. Como demonstrações da lógica correspondem a morfismos numa categoria, temos que morfismos $B \to A$ da categoria que modela R^- estão em correspondência biunívoca com morfismos da forma $!(B) \to A$ da categoria $\mathbf{C}$ que modela $LLI_!$ (! é o funtor da comônada que modela $LLI_!$), mas os morfismos da forma $!(B) \to A$ são morfismos de B em A na categoria de Kleisli de $\mathbf{C}$.

Proposição 5.9 *Seja uma categoria simétrica monoidal modal* $(\mathbf{C},!)$ *tal que: 1-* $\mathbf{C}_! \ll \mathbf{Cosemcom}_C$*, 2- a categoria de Kleisli é fechada sob o produto tensorial induzido em* $\mathbf{C}_!$*, 3-* $b.m_{!I} = id_{!I}$*, então* $\mathbf{C}_!$ *é um modelo para o fragmento multiplicativo da lógica* R^- *do capítulo anterior, i.e. a categoria de Kleisli é uma categoria simétrica monoidal fechada com diagonal.*
Prova: a proposição usa o fato estabelecido em [BBdPH92] que uma categoria simétrica monoidal fechada com uma comônada monoidal $(\mathbf{C},!)$ *induz uma estrutura simétrica monoidal fechada na categoria de Kleisli dessa comônada se* $\mathbf{C}_!$ *é fechada sob o produto tensorial induzido em ela. Além disto, se cada !-coálgebra livre* $<!A, \delta>$ *tem estrutura de co-semigrupo comutativo* $<!A, m>$ *e* $b.m_{!I} = id_{!I}$ *então* m *é uma transformação natural do funtor* Id *em* Δ' *(pela*

equação da definição de morfismo de co-semigrupo) e satisfaz os diagramas comutativos da definição de diagonal (pela definição de morfismo de co-semigrupo comutativo e por hipótese).

Se além disto, a categoria $\mathbf{C}$ *tem produtos finitos* ($\times$, *com objeto terminal 1), a categoria dos comonoides também tem produto: se* $< A, m >, < A', m' >$ *são dois comonoides, então* $< A \times A', m'' >$ *é o produto em* $\mathbf{Cosecom}_C$, *onde* $m'' : A \times A' \to (A \times A') \times (A \times A')$ *é definido por* $m'' = (id_A \times c_{A,A'} \times id_{A'}).(m \times m')$.

É interessante notar aqui que a categoria de Eilemberg-Moore não tem razão para ser fechada, isto é nem sempre é possível definir um "internal-hom" para as coálgebras. Se ! satisfaz também a regra que permite a atenuação de fórmulas modais, i.e., ! é o conectivo modal da Lógica Linear, então no modelo categórico para $\mathrm{LLI}_!$ deve-se exigir também que cada !-coálgebra livre $<!A, \delta>$ tenha um morfismo $e :!A \to I$ que seja um morfismo de coálgebras, i.e., que cada !-coálgebra livre tenha uma estrutura de comonóide comutativo que se relaciona com a estrutura de coálgebra, [BBdPH92].

Esta apresentação de modelo categórico para a Lógica Linear é mais geral que a formulação já bem conhecida em Lógica Categórica proposta por Seely ([See89]). Isto deve-se ao fato que se a categoria $\mathbf{C}$ é simétrica monoidal fechada com uma comônada monoidal $(!, \delta, \varepsilon)$ que produz em cada !-coálgebra uma estrutura de comonóide comutativo tal que os morfismos m e e são morfismos de coálgebras, então a subcategoria plena $\mathbf{C}^{@}$ dos objetos exponenciavéis em $\mathbf{C}$ é cartesiana fechada (e contém a categoria de Kleisli $\mathbf{C}_!$). Em outras palavras, se a categoria $\mathbf{C}$ é um modelo para LLI, então a categoria $\mathbf{C}^{@}$ é um modelo da Lógica Intuicionista. O modelo proposto por Seely [See89] corresponde ao caso quando a categoria $\mathbf{C}^{@}$ é a própria categoria de Kleisli. Uma discussão mais detalhada deste tópico encontra-se em [BBdPH92, pag 39-43].

A vantagem deste modelo, além de ser mais geral e assim cobrir casos que no modelo original de Seely não seriam considerados, é que ele é "modular" no sentido que cada um dos conectivos pode ser tratado independentemente, na verdade cada conectivo está só relacionado com o tensor (que é a interpretação da vírgula do Cálculo de Sequentes e/ou da Dedução Natural).

Em [dP88] são apresentados dois modelos categóricos para a Lógica Linear, chamados de Categorias Dialéticas. Essas categorias chamadas de **DC** e **GC** diferem na definição dos morfismos, mas os objetos são os morfismos mônicos $f : A \to U \times X$ com A, U, X objetos de uma categoria base arbitrária $\mathbf{C}$ com limites finitos. **DC** e **GC** são simétricas monoidais, e se a categoria $\mathbf{C}$ é cartesiana fechada (com produto $\times$) então as categorias **DC** e **GC** são simétricas monoidais fechadas. Em **GC** é possível definir também um outro tensor, que servirá para modelar o conectivo multiplicativo $\Box$ (chamado *par*), no caso da Lógica Linear Clássica. Além disto, se $\mathbf{C}$ tem coprodutos ($\oplus$) disjuntos e estáveis sob "pullback" então **DC** e **GC** tem produtos e também coprodutos (fracos no caso de **DC**).

Se $\mathbf{C}$ tem também uma estrutura de monóide livre, i.e. que existe uma adjunção entre o funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Mon_C}$ e o funtor de esquecimento $U : \mathbf{Mon_C} \to \mathbf{C}$, então é possível definir em **DC** uma comônada tal que junto com a categoria **DC** modelam a Lógica Linear Intuicionista com modalidade. Em **GC** a comônada necessária para modelar à Lógica Linear com ! é obtida como a composição de duas comônadas.

Estas construções **DC** e **GC**, então são um exemplo das categorias que modelam a lógica LLI. Para se transformar num exemplo "exato" das categorias que modelam a lógica $\mathrm{LLI}_!$ deve-se ter uma comônada como a que foi definida no caso descrito em [dP88] mas que dependa dos semigrupos livres de **C** (para mais detalhes sobre esta construção cf. Apêndice E).

5.2 A lógica modal intuicionista S4

Nesta seção é tratada a versão intuicionista do fragmento proposicional da lógica S4. Esta formulação é obtida como uma extensão do fragmento proposicional da Lógica Intuicionista acrescentando uma modalidade que satisfaz as mesmas propriedades que a modalidade da lógica clássica S4.

5.2.1 Formalismo para IS4-

A formulação axiomática

A formulação axiomática da lógica desta seção é obtida acrescentando a qualquer formulação axiomática da Lógica Intuicionista axiomas que tratam da modalidade. Escolhemos aqui, uma particular axiomatização para a Lógica Intuicionista que, apesar de não ser a mínima, ela facilita a comparação com as outras lógicas tratadas nesta tese:

- $A \to A$
- $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
- $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
- $A \to (B \to A)$
- $A \wedge B \to A$
- $A \wedge B \to B$
- $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$
- $A \to A \vee B$
- $B \to A \vee B$
- $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$
- $\perp \to A$
- $A \multimap 1$
- $0 \multimap A$

Junto com as regras de M.P. e adjunção.

A lógica modal intuicionista IS4- está definida acrescentando ao conjunto de axiomas e regras acima, os seguintes esquemas:

- $\Box A \to A$
- $\Box A \to \Box\Box A$
- $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

E a regra da Necessidade:

$$nec\frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$$

Note que $\vdash \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$ e também sua inversa e que $\vdash \Box(A \to B) \to \Box(\Box A \to \Box B)$. Na verdade, uma apresentação equivalente para a lógica tratada aqui é obtida substituindo os dois últimos axiomas da lista acima por $\Box(A \to B) \to \Box(\Box A \to \Box B)$ ([Aqv64]).

$\neg A$ é definido como é habitual por $A \to \perp$.

Cálculo de Sequentes

Um cálculo de Sequentes correspondendo aos axiomas acima pode ser obtido acrescentando ao Cálculo LJ (cf. Apêndice A) as regras que manipulam o conectivo modal. Este sistema é chamado aqui de IS4-:

Regras Estruturais:

$$(Identidade)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (P)\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad (A)\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow B}$$

$$(Corte)\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Sigma, A, \Delta \Rightarrow B}{\Sigma, \Gamma, \Delta \Rightarrow B} \qquad (C)\frac{\Gamma, A, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C} \qquad \frac{}{\Gamma, \perp, \Delta \Rightarrow A}$$

Regras Lógicas:

$$\to_l\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, A \to B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C} \qquad \to_r\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow 1} \qquad \frac{}{\Gamma, 0, \Delta \Rightarrow A}$$

$$\wedge_l\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \Rightarrow C} \qquad \wedge_l\frac{\Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \Rightarrow C} \qquad \wedge_r\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\vee_l\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \Rightarrow C} \qquad \vee_r\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$$

$$\Box_l\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Box A, \Delta \Rightarrow B} \qquad \Box_r\frac{\Box A_1, \ldots, \Box A_n \Rightarrow A}{\Box A_1, \ldots, \Box A_n \Rightarrow \Box A}$$

As duas últimas regras, as mesmas usadas no caso da lógica LLI$_!$, são chamadas de Deleção e Promoção. As letras gregas maiúsculas significam sequências de fórmulas.

Em lógica clássica modal, também existe o operador modal de **possibilidade**, representado normalmente por $\diamond$. Sendo que $\diamond A$, quando se trabalha num contexto clássico, é definido por $\neg\Box\neg A$, mas no caso intuicionista o tratamento deste conectivo é bem mais difícil. Esforços estão sendo feitos neste sentido para tratar também este conectivo num contexto intuicionista e assim estender o trabalho de [BMdP92], apesar de não existir um consenso se este conectivo deve formar parte da formulação intuicionista ou não. Na verdade, a situação que temos pode ser descrita da seguinte maneira: se pensamos na formulação para a Lógica Intuicionista com múltiplas fórmulas no lado direito dos sequentes (menos na regra $\rightarrow_r$, como em [Tak75]), faz sentido ter regras para manipular o conectivo modal $\diamond$, similar às regras da formulação clássica. Este conectivo não é definível na lógica que chamamos aqui de IS4-, e IS4- é diferente da lógica descrita acima com as duas modalidades (e múltiplas fórmulas nos sequentes). A relação entre estas duas lógicas parece ser similar à encontrada comparando FILL e ILL.

Nesta etapa do trabalho concentramos nossa atenção (como faz Prawitz em [Pra65]) na lógica que possui o conectivo modal da necessidade e que tem só uma fórmula no lado direito dos sequentes.

A formulação em Dedução Natural

A seguir será lembrado o sistema de Dedução Natural que foi apresentado em [BMdP92] e que é mais adequado que a formulação de Prawitz (chamada I_{S4}, [Pra65]) porque satisfaz a propriedade de ser fechado sob substituição e também ao Teorema da Normalização. Na verdade, esta formulação apresenta uma maneira sintática de introduzir no cálculo a idéia de uma fórmula "ser essencialmente modal" de Prawitz ([Pra65, pag 76]). No caso de Prawitz, essa noção foi necessária para evitar a introdução de fórmulas máximas ao longo de derivações; mas os passos do processo de normalização são mais faceis para se tratar com nossa formulação.

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow A}$$

$$\rightarrow_e \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; A \rightarrow B \quad \Delta \;\Rightarrow\; A}{\Gamma, \Delta \;\Rightarrow B} \qquad \rightarrow_i \frac{\Gamma, A \;\Rightarrow B}{\Gamma \;\Rightarrow\; A \rightarrow B}$$

$$\wedge_i \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B} \qquad \wedge_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow A} \qquad \wedge_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow B}$$

$$\vee_e \frac{\Delta \Rightarrow A \vee B \quad \Sigma, A, \Gamma \Rightarrow C \quad \Sigma', B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Sigma, \Sigma', \Delta, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad \vee_i \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \qquad \vee_i \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$$

$$Prom \frac{\Delta_1 \Rightarrow \Box A_1 \ldots \Delta_n \Rightarrow \Box A_n \quad \Box A_1, \ldots, \Box A_n \Rightarrow B}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow \Box B} \qquad Del \frac{\Gamma \Rightarrow \Box A}{\Gamma \Rightarrow A}$$

Onde as letras maiúsculas gregas significam conjuntos de fórmulas.

O Cálculo de Termos

Similar ao caso tratado na seção anterior e nos trabalhos [BMdP92, Mer90], um sistema de termos correspondente à lógica IS4- é:

$$\frac{}{x : A \Rightarrow x : A} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t :\perp}{\Gamma \Rightarrow \varepsilon^A(t) : A}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \Rightarrow t : B}{\Gamma \Rightarrow (\lambda x.t) : A \to B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : A \to B \quad \Delta \Rightarrow s : A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (ts) : B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s : A \quad \Delta \Rightarrow t : B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (t \times s) : A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow (\pi_1 t) : A} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow (\pi_2 t) : B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : A}{\Gamma \Rightarrow (i_1 t) : A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow t : B}{\Gamma \Rightarrow (i_2 t) : A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow u : A \vee B \quad \Delta, x : A \Rightarrow t : C \quad \Delta', y : B \Rightarrow s : C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \Rightarrow (\text{ case } u \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) : C}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : \Box A}{\Gamma \Rightarrow (\text{ derelict } t) : A}$$

$$\frac{\Delta_1 \Rightarrow t_1 : \Box A_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow t_n : \Box A_n \quad x_1 : \Box A_1, \ldots x_n : \Box A_n \Rightarrow s : B}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n \Rightarrow (\text{ promote } t_1, \ldots, t_n \text{ for } x_1, \ldots, x_n \text{ in } s) : \Box B}$$

Onde as letras maiúsculas gregas significam conjuntos de variáveis (com seu tipo).

O seguinte conjunto são as reduções para os termos do cálculo acima:
reduções operacionais:

- $(\lambda x.t[x])s \hookrightarrow t[s/x]$
- $\pi_1(t \times s) \hookrightarrow t$
- $\pi_2(t \times s) \hookrightarrow s$
- $(\text{ case } i_1 r \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) \hookrightarrow t[r/x]$
- $(\text{ case } i_2 r \text{ use } (i_1 x) \text{ then } t \text{ else use } (i_2 y) \text{ then } s) \hookrightarrow s[r/y]$

- derelict (promote $t_1, \ldots, t_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in s) $\hookrightarrow$ $s[t_1/x_1, \ldots t_n/x_n]$

reduções permutativas:

- π_1(case u use (i_1x) then t else use (i_2y) then s) $\hookrightarrow$
  case u use (i_1x) then $\pi_1 t$ else use (i_2y) then $\pi_1 s$

- π_2(case u use (i_1x) then t else use (i_2y) then s) $\hookrightarrow$
  case u use (i_1x) then $\pi_2 t$ else use (i_2y) then $\pi_2 s$

- (case u use (i_1x) then t else use (i_2y) then $s)w$ $\hookrightarrow$
  case u use (i_1x) then tw else use (i_2y) then sw

- (case (case r use (i_1a) then t else use (i_2b) then s) use (i_1a') then t'
  else use (i_2b') then s') $\hookrightarrow$
  (case r use (i_1a) then (case t use (i_1a') then t' else use (i_2b') then s')
  else use (i_2b) then (case s use (i_1a') then t' else use (i_2b') then s'))

- derelict (case u use (i_1x) then t else use (i_2y) then s) $\hookrightarrow$
  case u use (i_1x) then derelict (t) else use (i_2y) then derelict (s)

- ε^A(case u use (i_1x) then t else use (i_2y) then s) $\hookrightarrow$
  case u use (i_1x) then $\varepsilon^A(t)$ else use (i_2y) then $\varepsilon^A(s)$

- promote (promote $t_1, \ldots, t_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in $f), l_1, \ldots, l_m$ for $y, y_1, \ldots, y_m$ in g $\hookrightarrow$
  promote $t_1, \ldots, t_n, l_1, \ldots, l_m$ for $x'_1, \ldots, x'_n, y_1, \ldots, y_m$ in
  (g[promote $x'_1, \ldots, x'_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in f/y])

- $\pi_1(\varepsilon^{A\wedge B}(t))$ $\hookrightarrow$ $\varepsilon^A(t)$

- $\pi_2(\varepsilon^{A\wedge B}(t))$ $\hookrightarrow$ $\varepsilon^B(t)$

- $(\varepsilon^{A\rightarrow B}(t))u$ $\hookrightarrow$ $\varepsilon^B(tu)$

- $\varepsilon^A(\varepsilon^{\perp}(t))$ $\hookrightarrow$ $\varepsilon^A(t)$

- case $\varepsilon^{A\vee B}(r)$ use (i_1x) then t else use (i_2y) then s $\hookrightarrow \varepsilon^C(r)$

- derelict$(\varepsilon^{\Box A}(t))$ $\hookrightarrow$ $\varepsilon^A(t)$

reduções η :

- $\pi_1(t) \times \pi_2(t)$ $\hookrightarrow$ t

- $\lambda x.tx$ $\hookrightarrow$ t

- case t use i_1a then i_1a else use i_2b then i_2b $\hookrightarrow$ t

- $\varepsilon^{\perp}(t)$ $\hookrightarrow$ t

- promote z for x in (derelict (x)) $\hookrightarrow z$

regras ξ :

- $t \rightsquigarrow t$
- $t \hookrightarrow s$ então $t \rightsquigarrow s$
- $t \rightsquigarrow s$ e $s \rightsquigarrow u$ então $t \rightsquigarrow u$
- $t \rightsquigarrow t'$ e $s \rightsquigarrow s'$ então $ts \rightsquigarrow t's'$
- $t \rightsquigarrow t'$ então $\lambda x.t \rightsquigarrow \lambda x.t'$
- $t \rightsquigarrow t'$ e $s \rightsquigarrow s'$ então $t \times s \rightsquigarrow t' \times s'$
- $t \rightsquigarrow t'$ então $\pi_j t \rightsquigarrow \pi_j t' \quad j = 1, 2$
- $t \rightsquigarrow t'$ então $i_j t \rightsquigarrow i_j t' \quad j = 1, 2$
- $t \rightsquigarrow t'$, $s \rightsquigarrow s'$ e $r \rightsquigarrow r'$ então (case r use $(i_1 x)$ then t else use $(i_2 y)$ then s) $\rightsquigarrow$ (case r' use $(i_1 x)$ then t' else use $(i_2 y)$ then s')
- $t \rightsquigarrow t'$ então $\varepsilon^A(t) \rightsquigarrow \varepsilon^A(t')$
- $t \rightsquigarrow t'$ então (derelict t) $\rightsquigarrow$ (derelict t')
- $t_1 \rightsquigarrow t'_1, \dots t_n \rightsquigarrow t'_n$ e $s \rightsquigarrow s'$ então (promote $t_1, \dots t_n$ for $x_1, \dots, x_n$ in s) $\rightsquigarrow$ (promote $t'_1, \dots t'_n$ for $x_1, \dots, x_n$ in s')

As propriedades deste cálculo surgem imediatamente da análise feita na seção anterior para ILL$_!$, e do trabalho [Mer90].

5.2.2 A Semântica para a lógica modal intuicionista IS4-

A semântica algébrica

Um modelo algébrico para IS4- é um reticulado distributivo, com primeiro e último elemento, e tal que o pseudocomplemento existe para cada elemento $(M, \vee, \wedge, \rightarrow, 1, 0)$ (que modela os conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow$ da Lógica Intuicionista, [Fit75]) com uma nova operação $\mathcal{M} : M \rightarrow M$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathcal{M}(a) \leq a$
2. $\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(\mathcal{M}(a))$
3. $a \leq b$ então $\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(b)$
4. $\mathcal{M}(1) = 1$
5. $\mathcal{M}(a) \wedge \mathcal{M}(b) \leq \mathcal{M}(a \wedge b)$

Que $\mathcal{M}$ nestas condições modela algébricamente o conectivo modal de IS4- pode ser justificado de maneira similar ao caso da lógica LLI$_!$. Neste caso, $\circ$ deve ser substituído por $\wedge$.

A semântica categórica

Com o material da seção anterior e da análise feita no trabalho [BMdP92], chega-se fácilmente a que um modelo categórico para a lógica IS4- é:
uma categoria bicartesiana fechada distributiva $\mathbf{C}$ (que modela os conectivos $\perp, \wedge, \vee$ e $\rightarrow$ da Lógica Intuicionista, [LS86]) junto com uma comônada monoidal ($\Box : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, \varepsilon, \delta$) (onde na definição de comônada monoidal deve ser substituída $\otimes$ pelo produto categórico da categoria $\mathbf{C}$), que modela o comportamento do conectivo modal.

5.3 Outras Lógicas Relevantes Modais

Nesta seção serão tratadas algumas lógicas modais e relevantes que foram encontradas na literatura. Discutiremos modelos algébricos e categóricos para elas e as relacionaremos com as lógicas modais estudadas nas seções anteriores.

5.3.1 Fórmulação sintática

Anderson e Belnap definiram o sistema chamado de $\mathrm{R}^\Box$ ([AB75, Dun86]) como a extensão do sistema relevante R através de uma modalidade com as mesmas características que a modalidade da lógica S4 de Lewis. Isto é, a lógica obtida com os axiomas e regras de R e os seguintes axiomas:

- $\Box(A \multimap B) \multimap (\Box A \multimap \Box B)$
- $\Box A \multimap \Box\Box A$
- $\Box A \multimap A$
- $\Box A \& \Box B \multimap \Box(A \& B)$

junto com a regra $\quad Nec\dfrac{A}{\Box A}$

O sistema $\mathrm{R}^\Box$ com o conectivo de cotenabilidade e a identidade para ele, é tratado em [BJGD80] onde é apresentado um Cálculo de Sequentes livre da Regra do Corte. Nesse trabalho são consideradas dois tipos de sequências, intencionais e extensionais, para usar de contextos nas regras do cálculo, já que se precisa de uma espécie de Atenuação para conseguir o efeito desejado.

Em $\mathrm{R}^\Box$ é válida a propriedade da distribuição dos aditivos, mas, mais importante ainda, o axioma $\Box A \& \Box B \multimap \Box(A \& B)$ é válido, o qual não é verdadeiro em $\mathrm{LLI}_!$.

Este sistema é bem diferente do sistema $\mathrm{LLI}_!$. $\mathrm{LLI}_!$ tem a implicação linear e um conectivo modal que juntos definem a implicação relevante de R. A idéia usada aqui com $\mathrm{LLI}_!$ é parecida à empregada por Girard ao definir a tradução modal da Lógica Intuicionista na Lógica Linear com o conectivo modal !, para simular o efeito das propriedades ausentes na Lógica Linear com respeito à Lógica Intuicionista.

O sistema $R^\Box$, por outro lado, é uma extensão de R, a qual tem como conectivos a implicação relevante e o conectivo modal da lógica S4. Quando $R^\Box$ foi apresentado pensou-se que corresponderia a um sistema que possuiria uma implicação que fosse ao mesmo tempo relevante e estrita, i.e. que seria a versão modal do sistema chamado E ([AB75, Dun86]) que tem esta classe de implicação. Mas foi mostrado através de métodos semânticos (usando matrizes de valores) que este não era o caso.

Um sistema diferente é o apresentado em [Pra65], chamado $R_{M,S4}$. Este sistema, definido através de sua formulação em Dedução Natural, difere do sistema de Dedução Natural para LLI! em que a modalidade dessa lógica satisfaz as regras correpondentes à introdução e eliminação do conectivo modal mas não a regra da contração para fórmulas modais. Na verdade, a lógica $R_{M,S4}$ corresponde, na linguagem usada ao longo desta tese, à lógica LLI e mais a regra da contração, isto é a R^-, junto com um conectivo modal com as regras chamadas Prom e Del.

5.3.2 Semântica para as lógicas relevantes modais

Facilmente obtemos um modelo algébrico para a lógica $R^\Box$:
Um monóide fechado, com diagonal, aditivo, distributivo (i.e., um modelo para a lógica R) e modal tal que o operador de co-fecho preserva ínfimos,i.e. $\mathcal{M}(a)\&\mathcal{M}(b) \leq \mathcal{M}(a\&b)$, é um modelo algébrico para a lógica $R^\Box$. Devemos verificar que com $\mathcal{M}$ podemos satisfazer aos axiomas de $R^\Box$. Também devemos mostrar que as condições impostas no monóide são necessárias para modelar algébricamente à lógica.

- $\mathcal{M}(a) \leq a$ corresponde ao axioma $\Box A \multimap A$.
- $\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}\mathcal{M}(a)$ corresponde ao axioma $\Box A \multimap \Box\Box A$.
- $\mathcal{M}(a)\&\mathcal{M}(b) \leq \mathcal{M}(a\&b)$ corresponde ao axioma $\Box(A)\&\Box(B) \multimap \Box(A\&B)$.
- para modelar o axioma $\Box(A \multimap B) \multimap (\Box A \multimap \Box B)$ sabemos que dado $\mathcal{M}(a) \leq a$ obtemos $a \multimap b \leq \mathcal{M}(a) \multimap b$ ([HdP91, pag109]). Dado $a \multimap b \leq \mathcal{M}(a) \multimap b$ obtemos que $a \multimap b \circ \mathcal{M}(a) \leq b$ ([HdP91, pag109]). Usando a definição de operação modal, temos que: $\mathcal{M}(a \multimap b \circ \mathcal{M}(a)) \leq \mathcal{M}(b)$.

  Por outro lado, usando compatibilidade e a diagonal do monóide temos que: $\mathcal{M}(a \multimap b) \circ \mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(a \multimap b) \circ \mathcal{M}\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(a \multimap b \circ \mathcal{M}(a))$. Finalmente, por transitividade e definição de pseudo-complemento obtemos o resultado desejado: $\mathcal{M}(a \multimap b) \leq \mathcal{M}(a) \multimap \mathcal{M}(b)$.
- Já que no sistema podemos demonstrar que $I \multimap \Box I$, no modelo temos que $e \leq \mathcal{M}(e)$.
- No modelo temos que $\mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b) \leq \mathcal{M}(a \circ b)$. De forma equivalente, no sistema axiomático de $R^\Box$ podemos obter: $\Box A \otimes \Box B \multimap \Box(A \otimes B)$.

Para a lógica $R_{M,S4}$ um modelo algébrico é um monóide fechado, com diagonal, aditivo e modal. Observe que este modelo difere do modelo algébrico para $R^\Box$ em que aqui não é preciso que o conectivo modal preserve o ínfimo. E difere do modelo para IS4- em que aqui pode-se ter uma operação monoidal diferente da operação de ínfimo.

Um modelo categórico para a lógica $R^{\Box}$ é facilmente obtido: uma categoria linear distributiva, tal que o tensor possua diagonais (i.e. um modelo pra a lógica R) e modal tal que o funtor ! preserva produtos.
Decimos que um funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ distribue sobre o produto quando existe uma transformação natural $\beta : F(A) \times' F(B) \to F(A \times B)$, onde $\times, \times'$ representam os produtos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ respectivamente.

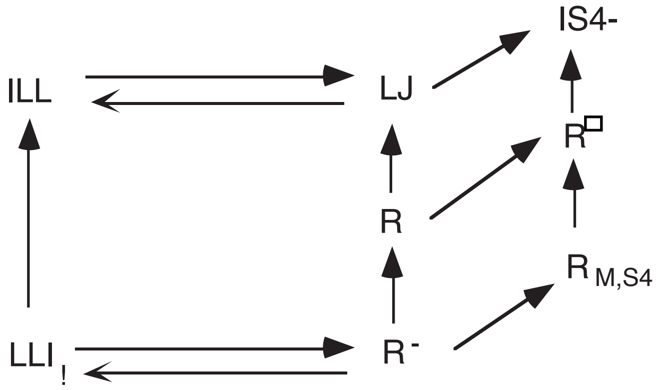
Devemos verificar que para cada axioma de $R^{\Box}$ existe uma transformação natural que permite simular nas categorias o efeito desejado. Também devemos provar que as condições impostas no modelo são necessárias para modelar categóricamente à lógica.

- $\varepsilon_A : \Box A \to A$ corresponde ao axioma $\Box A \multimap A$.
- $\delta_A : \Box A \to \Box\Box A$ corresponde ao axioma $\Box A \multimap \Box\Box A$.
- $\beta_{A,B} : \Box A \times \Box B \to \Box(A \times B)$ corresponde ao axioma $\Box(A)\&\Box(B) \multimap \Box(A\&B)$.
- a prova para modelar o axioma $\Box(A \multimap B) \multimap (\Box A \multimap \Box B)$ é similar ao caso algébrico, deve-se usar que $\multimap$ é funtor contravariante e adjunto de $\otimes$.
- Já que no sistema podemos demonstrar que $I \multimap \Box I$, no modelo temos que $I \to \Box(I)$.
- No modelo temos que $\Box(A) \otimes \Box(B) \to \Box(A \otimes B)$. De forma equivalente, no sistema axiomático de $R^{\Box}$ podemos obter: $\Box A \otimes \Box B \multimap \Box(A \otimes B)$.

Para a lógica $R_{M,S4}$ um modelo categórico é uma categoria linear com diagonais e modal. Como no modelo algébrico, um modelo categórico para $R_{M,S4}$ difere do modelo categórico para $R^{\Box}$ já que aqui não é exigido que o funtor da comônada preserve produtos. E difere do modelo para IS4- em que pode-se ter um funtor tensor que não seja um produto.

5.4 Conclusões

Neste capítulo foram tratadas, tanto no nível sintático quanto no semântico, várias lógicas modais. A situação estudada pode ser representada através da seguinte figura:



Onde os morfismos correspondem à inclusão das lógicas, isto é as deduções da lógica de partida podem também ser obtidas na outra lógica. Estas inclusões, na verdade, correspondem a ter extensões lógicas (a menos da tradução das linguagens), que neste caso são não conservativas. Por outro lado, as traduções fiéis correspondem, a menos da tradução da linguagem, a ter extensões conservativas.

Na verdade, todas as lógicas tratadas neste capítulo têm uma modalidade que satisfaz as regras de Deleção e Promoção da lógica S4, sendo que os modelos, tanto algébricos quanto categóricos, para esta classe de modalidade são fácilmente obtidos. Mas, ainda não é claro como modelar categoricamente conectivos modais em geral, e em particular no caso das chamadas lógicas não-normais, que podem oferecer dificuldades adicionais.

Capítulo 6

Análise Retrospectiva: sobre modelos algébricos e categóricos

Neste capítulo propõe-se uma série de conceitos e propriedades que estabelecem, de uma maneira formal e abstrata, o que entendemos por modelo algébrico e por modelo categórico para a teoria da prova de uma lógica.

Nos capítulos anteriores foi feita uma análise formal, usando Teoria da Prova, de uma série de lógicas com algumas características comuns. Além disto, como foi feito para a Lógica Intuicionista e, em trabalhos recentes, para a Lógica Linear Intuicionista, estabelecemos uma semântica algébrica e uma semântica categórica para cada uma das lógicas analisadas. Após esse estudo minucioso de casos, nas próximas seções apresentaremos uma descrição formal do que significa um modelo algébrico e um modelo categórico para a teoria da prova de uma lógica. Estas noções serão suficientemente gerais como para cobrir os casos particulares estudados nos capítulos anteriores.

As lógicas tratadas ao longo da tese foram lógicas proposicionais, de gênero intuicionista, com um conectivo na sua linguagem que simula o efeito da vírgula que separa as fórmulas dos antecentes dos sequentes (ou o que é o mesmo temos: $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ *sse* $\vdash A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \Rightarrow B$), e com certas características especiais nos sistemas dedutivos. A formulação que será apresentada, propõe noções simples para definir o que entendemos por modelo algébrico e por modelo categórico para uma família de lógicas que possuem as características acima. Lógicas deste gênero são interessantes porque aparecem frequentemente ao se trabalhar com aspectos formais da computação.

Começaremos analisando os modelos algébricos, que são mais simples de se tratar, mas também porque é interessante notar como a idéia do que entendemos por modelos categóricos surge ao generalizar o conceito básico daquela classe de modelo.

6.1 Modelos Algébricos

Definiremos o que entendemos por um modelo algébrico para uma lógica $\mathcal{L}$ proposicional, intuicionista, com um conectivo que simule o efeito da vírgula que aparece nos antecedentes dos sequentes, com axiomas de identidades, que satisfaz a regra do corte e apresentada através de um dos sistemas dedutivos tratados neste trabalho, usando sequentes da forma $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$.

Seja uma linguagem $\mathbf{L} = \Sigma \cup \{\leq\}$, onde Σ é um conjunto de símbolos de operações n-árias e $\leq$ é um símbolo de relação binária. Seja VarProp o conjunto das variáveis proposicionais da linguagem da lógica $\mathcal{L}$. Definimos por indução o conjunto Σ^* dos termos em Σ:

- se $x \in$ VarProp, então $x \in \Sigma^*$.
- se $s_1, \ldots, s_n \in \Sigma^*$, então $o(s_1, \ldots, s_n) \in \Sigma^*$, para cada símbolo de operação n-ário o em Σ[1].

Definição 6.1 *Uma estrutura $\mathcal{M}$ para a linguagem $\mathbf{L} = \Sigma \cup \{\leq\}$ consiste de um conjunto M junto com operações n-árias e uma relação binária $\leq^{\mathcal{M}}$ em M. Dada uma função de atribuição $\mathcal{I}$: VarProp $\to M$ das variáveis proposicionais no conjunto M, podemos estende-la para os termos:*
$\mathcal{I}'(x) = \mathcal{I}(x)$, para cada variável em VarProp,
$\mathcal{I}'(o(s_1, \ldots, s_n)) = o^{\mathcal{M}}(\mathcal{I}'(s_1), \ldots, \mathcal{I}'(s_n))$, para cada termo $o(s_1, \ldots, s_n)$ em Σ^*.

Dados termos $s, t \in \Sigma^*$ dizemos que:
$\mathcal{M} \models s \leq t$ sse para toda função de interpretação $\mathcal{I}$: VarProp $\to M$, $\mathcal{I}'(s) \leq^{\mathcal{M}} \mathcal{I}'(t)$ em M.

Definição 6.2 *Seja uma classe $\mathbf{K}$ de estruturas para a linguagem $\mathbf{L} = \Sigma \cup \{\leq\}$, dados termos $s, t \in \Sigma^*$ dizemos que: $\mathbf{K} \models s \leq t$ sse para toda estrutura algébrica $\mathcal{M}$ da classe $\mathbf{K}$, $\mathcal{M} \models s \leq t$.*

A cada conectivo (ou formador de tipos) n-ário da lógica $\mathcal{L}$ queremos associar um símbolo de operação n-ário em Σ. As constantes, consideradas como conectivos 0-ários, devem estar associadas com símbolos de funções constantes. Para isto definimos uma função de tradução $t : C \to \Sigma$[2] do conjunto C de conectivos da linguagem da lógica $\mathcal{L}$ no conjunto de operações Σ que preserva a aridade dos conectivos.

A cada fórmula A da linguagem da lógica $\mathcal{L}$ com variáveis proposicionais $x_1, \ldots, x_n$, denotada por $A(x_1, \ldots, x_n)$, podemos associar um termo em Σ^*, substituindo cada conectivo de $\mathcal{L}$ pela correspondente operação em Σ. Na verdade, definimos por indução uma função de tradução $t' : For(\mathcal{L}) \to \Sigma^*$ que é a identidade nas variáveis e que numa fórmula complexa $c(A_1, \ldots, A_n)$ a função t' está definida por $t(c)(t'(A_1), \ldots, t'(A_n))$. O termo associado à fórmula $A(x_1, \ldots, x_n)$ será representado por $A^t(x_1, \ldots, x_n)$. Quando conveniente, fórmulas A serão associadas ao termo A^t, deixando implícitas as variáveis proposicionais.

Entender as fórmulas como termos em Σ^* é um meio conveniente para estabelecer a noção de modelo. Modelos serão álgebras onde esses termos serão avaliados de modo a espelhar a relação de demonstrabilidade.

Dada uma lógica $\mathcal{L}$, dizemos que uma linguagem $\mathbf{L} = \Sigma \cup \{\leq\}$ junto com uma tradução $t : C \to \Sigma$ é uma *linguagem algébrica para a lógica $\mathcal{L}$*.

Um modelo algébrico é uma classe de álgebras onde termos são avaliados de tal forma que os sequentes prováveis correspondem exatamente aos elementos relacionados:

[1]Será usada, quando conveniente, tanto a notação prefixa quanto infixa.
[2]De forma alternativa poderiamos considerar $t : C \to \Sigma^*$.

Definição 6.3 *Um* pré-modelo algébrico *para uma lógica $\mathcal{L}$ é uma linguagem algébrica* $(\mathbf{L}, t)$ *para $\mathcal{L}$ e uma classe* $\mathbf{K}$ *de estruturas para* $\mathbf{L}$ *tal que* $\vdash A \Rightarrow B$ *sse* $\mathbf{K} \models A^t \leq B^t$.

Observe que os sistemas lógicos que estamos considerando têm um conectivo $\otimes$ que representa o efeito da vírgula que separa fórmulas nos antecedentes dos sequentes e uma fórmula I que é a identidade para este conectivo, então temos que $\vdash \Rightarrow B$ sse $\vdash I \Rightarrow B$ sse $\mathbf{K} \models I^t \leq B^t$. As fórmulas que satisfazem $\vdash \Rightarrow B$ sse $\mathbf{K} \models I^t \leq B^t$ são chamadas *fórmulas algebricamente válidas em* $\mathbf{K}$.

Para qualquer lógica $\mathcal{L}$ (com conjunto de conectivos C) podemos sempre construir uma álgebra que simula a relação de demonstrabilidade: a álgebra de Lindenbaum. A construção desta álgebra é mostrada a seguir.

Seja a relação de equivalência $\cong$ no conjunto For($\mathcal{L}$), de fórmulas de $\mathcal{L}$, definida por $A \cong B$ sse $\vdash A \Rightarrow B$ e $\vdash B \Rightarrow A$.

No conjunto quociente For$(\mathcal{L})/_{\cong}$ definimos a relação $\sqsubseteq$: $[A] \sqsubseteq [B]$ sse $\vdash A \Rightarrow B$. Esta relação é uma ordem parcial já que na lógica $\mathcal{L}$ temos os axiomas das identidades e a regra do corte.

As operações em For$(\mathcal{L})/_{\cong}$ são definidas da seguinte forma:

$\bar{c}\ ([A], \ldots, [B]) = [c(A, \ldots, B)]$, para cada conectivo n-ário da linguagem de $\mathcal{L}$. Seja $\bar{\Sigma}$ o conjunto destas operações.

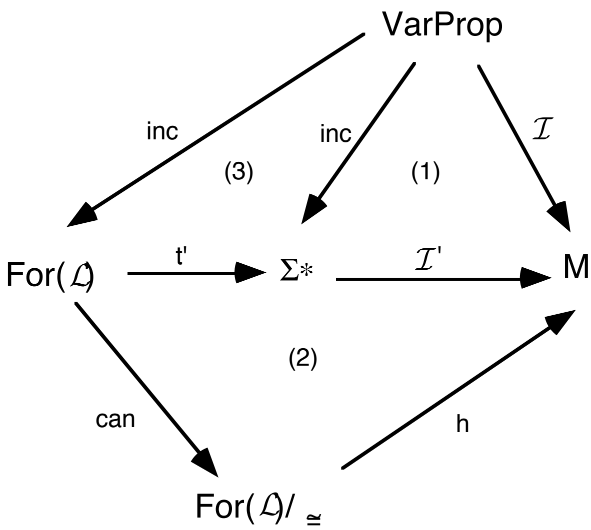
Então $(C, \Rightarrow)$ junto com a função identidade constituem uma linguagem algébrica para $\mathcal{L}$ e $(For(\mathrm{L})/_{\cong}, \bar{\Sigma}, \sqsubseteq)$ é uma estrutura algébrica para a linguagem C que modela a relação de demonstrabilidade, já que temos $\bar{c}\ ([A_1], \ldots, [A_n]) \sqsubseteq \bar{c'}\ ([B_1], \ldots, [B_m])$ sse
$[c(A_1, \ldots, A_n)] \sqsubseteq [c'(B_1, \ldots, B_m)]$ sse
$\vdash c(A_1, \ldots, A_n) \Rightarrow c'(B_1, \ldots, B_m)$ independentemente da atribuição das variáveis proposicionais que aparecem em $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$. Esta álgebra é chamada a álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$.

Com a álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$ sempre temos um pré-modelo para $\mathcal{L}$, a classe que tem como único elemento a álgebra de Lindenbaum. Este pré-modelo não é muito interessante porque a álgebra de Lindenbaum não é axiomatizável e além disto não dá muito mais informação sobre o cálculo da que a própria lógica já dá. Para modelar realmente a uma lógica preferimos que as álgebras escolhidas tenham uma estrutura matemática conhecida e uma axiomatização fácil de usar. Por isso a nossa noção de modelo algébrico é restringida para satisfazer esta condição:

Definição 6.4 *Um* modelo algébrico *para uma lógica $\mathcal{L}$ é uma linguagem algébrica* $(\mathbf{L}, t)$ *para $\mathcal{L}$ e uma classe (finitamente) axiomatizável* $\mathbf{K}$ *de estruturas para* $\mathbf{L}$ *tal que* $\vdash A \Rightarrow B$ *sse* $\mathbf{K} \models A^t \leq B^t$.

Definição 6.5 *Sejam* $\mathcal{M} =< M, \Sigma^{\mathcal{M}}, \leq^{\mathcal{M}} >$ *e* $\mathcal{M}' =< M', \Sigma^{\mathcal{M}'}, \leq^{\mathcal{M}'} >$ *estruturas para a linguagem* $\mathbf{L} = \Sigma \cup \{\leq\}$, *um homomorfismo entre estruturas é um homomorfismo entre as álgebras* $\mathcal{M} = (M, \Sigma^{\mathcal{M}})$ *e* $\mathcal{M}' = (M', \Sigma^{\mathcal{M}'})$ *(i.e. uma função f entre os conjuntos M e M' tal que* $f(o^{\mathcal{M}}(s_1, \ldots, s_n)) = o^{\mathcal{A}'}(f(s_1), \ldots, f(s_n))$ *para cada operação o n-ária em Σ tal que preserva a relação de ordem:* $a \leq^{\mathcal{M}} b$ *então* $f(a) \leq^{\mathcal{M}'} f(b)$, *onde* $a, b \in M$*).*

Proposição 6.1 *Se a álgebra de Lindenbaum da lógica $\mathcal{L}$ está na classe* $\mathbf{K}$ *que modela algebricamente a lógica $\mathcal{L}$, então ela é livre na classe. Isto significa que existe uma atribuição $u : VarProp \to For(\mathcal{L})/_{\cong}$ tal que para toda atribuição $\mathcal{I} : VarProp \to M$ em qualquer estrutura $\mathcal{M}$ da classe* $\mathbf{K}$ *existe um único homomorfismo $h : For(\mathcal{L})/_{\cong} \to M$ tal que $\mathcal{I} = h.u$.*
Prova: seja $\mathcal{M}$ uma estrutura da classe $\mathbf{K}$ *e $\mathcal{I}$ uma atribuição em M, então temos a seguinte situação mostrada no diagrama*



Seja $u = can.inc$, onde inc é a inclusão e can é a função canónica no conjunto quociente.

Definimos $h([A]) = \mathcal{I}'(A^t)$, para qualquer fórmula A. h está bem definida porque se temos $[A] = [B]$, i.e. $\vdash A \Rightarrow B$ e $\vdash B \Rightarrow A$, então como $\mathcal{M}$ é um modelo algébrico para $\mathcal{L}$ temos que $\mathcal{I}'(A^t) \leq^{\mathcal{M}} \mathcal{I}'(B^t)$ e $\mathcal{I}'(B^t) \leq^{\mathcal{M}} \mathcal{I}'(A^t)$, mas a relação é antisimétrica então temos que $\mathcal{I}'(A^*) = \mathcal{I}'(B^*)$. h faz comutar o diagrama, já que (1),(3) comutam por definição e (2) por definição de h. h é homomorfismo de estruturas já que $\mathcal{I}'$ preserva as operações e por ser $\mathcal{M}$ um modelo algébrico de $\mathcal{L}$ temos: $[A] \sqsubseteq [B]$ sse $\vdash A \Rightarrow B$ então $\mathcal{I}'(A^t) \leq^{\mathcal{M}} \mathcal{I}'(B^t)$ sse $h([A]) \leq h([B])$.

h é o único homomorfismo tal que $\mathcal{I} = h.u$. Suponha que existe um homomorfismo $g : For(A)/_{\cong} \to \mathcal{M}$ tal que também faz comutar o diagrama, então por indução temos que $g = h$ já que nas variáveis proposicionais temos que $g.can.inc(x) = \mathcal{I}(x) = h.can.inc(x)$, por tanto $g([x]) = h([x])$. E nas fórmulas complexas temos que $g([c(A_1, \ldots, A_n]) = g(\bar{c}\ ([A_1], \ldots, [A_n])) = c^{\mathcal{M}}(g([A_1]), \ldots, g([A_n])) = c^{\mathcal{M}}(h([A_1]), \ldots, h([A_n])) = h([c(A_1, \ldots, A_n])$, por hipótese indutiva e por ser g e h homomorfismos que comutam com $\mathcal{I}'$.

Nos capítulos anteriores, ao apresentar um modelo algébrico para cada uma das lógica tratadas, definimos uma classe finitamente axiomatizável de estruturas algébricas e verificamos: 1- que todas as álgebras de essa classe têm operações correspondendo aos conectivos; 2- que ref l etem a relação de demonstrabilidade, independentemente da atribuição que se faça às variáveis proposicionais. Em cada um dos casos a prova de 2 foi por indução no comprimento da derivação para garantir que sequentes prováveis correspondem a elementos relacionados, isto é para obter o resultado da validade ou "Soundness"). A prova foi feita supondo que a lógica estava apresentada através do Cálculo de Sequentes, mas isto não é de importância já que poderia ter sido feita usando qualquer um dos sistemas que apresentam a lógica. No outro sentido, isto é da completude, verificamos que a álgebra de Lindenbaum da lógica pertence a essa classe, já que se temos elementos relacionados em todas as álgebras da classe, em particular estão relacionados na álgebra de Lindenbaum da lógica, mas os elementos relacionados nesta álgebra correspondem aos sequentes demonstráveis. Que a construção de Lindenbaum para as lógicas tratadas nesta tese é uma álgebra que pertence à classe definida não é difícil de ser provado. Isto pode ser feito de forma similar aos casos mais conhecidos das lógicas Intuicionista e Clássica, onde a álgebra de Lindenbaum é uma álgebra de Heyting ou de Boole respectivamente (vide por exemplo [Gol84, Mir87]).

Na verdade, as classes de álgebras que apresentamos como modelos para as lógicas que estudamos foram muito especiais. Pois além de serem finitamente axiomatizáveis, estas classes são formadas por álgebras que são do mesmo gênero que a álgebra de Lindenbaum da lógica em questão, no sentido de terem a mesma linguagem e satisfazerem as mesmas equações.

6.2 Modelos Categóricos

A diferença fundamental entre um modelo categórico e um modelo algébrico se prende ao fato de que no modelo categórico as várias demonstrações que podem ser construídas para um sequente correspondem a diferentes morfismos da categoria, enquanto que num modelo algébrico só se mostra a existência ou não de uma demonstração. Neste sentido, modelo categórico é uma generalização de modelo algébrico.

Fazendo uma analogia com a situação algébrica, apresentaremos o que entendemos por um modelo categórico para uma lógica proposicional intuicionista $\mathcal{L}$, com um conectivo que simule o efeito da vírgula que separa as fórmulas dos antecedentes dos sequentes, com axiomas de identidades, que satisfaze a regra do corte, é apresentada através de um dos sistemas dedutivos tratados neste trabalho usando sequentes da forma $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$, com regras estruturais separadas conservativamente das regras lógicas e tal que para conectivo n-ário c temos a seguinte derivação:

$$\frac{A_1 \Rightarrow B_1 \ \ldots \ A_n \Rightarrow B_n}{c(D_1, \ldots D_n) \overset{\vdots}{\Rightarrow} c(F_1, \ldots F_n)}$$

onde para todo $1 \leq i \leq n$ temos que $\{D_i, F_i\} = \{A_i, B_i\}$.

Seja uma linguagem $\mathbf{L} = (\Sigma, \Delta)$. Σ é um conjunto de símbolos de endofuntores n-ários (i.e. cada símbolo de funtor tem associado sua aridade). Σ^* é o conjunto de *termos funtoriais*, obtidos pela operação de composição de funtores, os símbolos de funtores no conjunto Σ, o simbolo Id que denota o funtor identidade e símbolos Π_i para denotar o funtor projeção na componente i. Δ é um conjunto de símbolos de transformações naturais entre termos funtoriais em Σ^*, i.e. cada símbolo de transformação natural tem associado a ele os termos funtoriais origem e destino. Chamamos Δ^* ao conjunto de *termos naturais*, obtidos pelos símbolos de transformações naturais em Δ e as operações de composição horizontal e composição vertical (com os funtores de Σ^*).

Definição 6.6 *Uma* estrutura categórica *para a linguagem* $\mathbf{L} = (\Sigma, \Delta)$ *é uma tripla* $\mathcal{C} =< \mathbf{C}, \Sigma^{\mathcal{C}}, \Delta^{\mathcal{C}} >$*, onde* $\mathbf{C}$ *é uma categoria,* $\Sigma^{\mathcal{C}}$ *é um conjunto de endofuntores em* $\mathbf{C}$ *e* $\Delta^{\mathcal{C}}$ *é um conjunto de transformações naturais entre os funtores do conjunto* $(\Sigma^*)^{\mathcal{C}}$.

A idéia básica de um modelo categórico para uma lógica é associar a fórmulas (com suas variáveis proposicionais) objetos, e a demonstrações de sequentes morfismos da categoria, de tal maneira que derivações que se reduzem correspondam ao mesmo morfismo. Para isto, precisamos de uma função de tradução $t : C \to \Sigma$ tal que a cada conectivo (ou formador de tipos) c n-ário da linguagem de $\mathcal{L}$ associe um funtor n-ário c^t no conjunto Σ[3]. As constantes lógicas, consideradas como conectivos 0-ários, também estão associadas com funtores constantes em Σ.

Consideremos cada fórmula (ou tipo) como um objeto da forma $c(A_1, \ldots, A_n)_X$ com variáveis proposicionais pertencentes ao conjunto subjacente da sequência sem repetições X, onde c é um conectivo n-ário e $A_1, \ldots, A_n$ são fórmulas (também com variáveis proposicionais no conjunto da sequência X) ou variáveis proposicionais no conjunto da sequência X. A cada fórmula da lógica $\mathcal{L}$ podemos associar um termo funtorial em Σ^*, definindo por indução uma função de tradução $t' : For(\mathcal{L}) \to \Sigma^*$ da seguinte maneira:

- se A_X é uma constante então $t'(A_X) = c^t$, o símbolo de funtor 0-ário de Σ correspondendo à constante;
- se $A_X = x_i$ é uma variável proposicional então $t'(A_X) = \Pi_i(< x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m >)$, considerando as variáveis proposicionais como sendo também variáveis de elementos de uma categoria;
- se $A_X = c(A_1, \ldots, A_n)_X$ então $t'(A_X) = c^t(t'(A_{1_X}), \ldots, t'(A_{n_X}))$.

O termo associado à fórmula A_X será representado pelo funtor A^t_X.

Falta ainda relacionar demonstrações de sequentes com morfismos numa categoria. Para isto, precisamos de uma função de tradução $T : Dem(\mathcal{L}) \to \Delta^*$ que associe a uma demonstração $\Pi :\vdash A_X \Rightarrow B_Y$ na lógica $\mathcal{L}$ um termo natural $T(\Pi) : A^t_{X;Y} \to B^t_{X;Y}$ em Δ^*[4].

Dada uma lógica $\mathcal{L}$, dizemos que uma linguagem $\mathbf{L} = (\Sigma, \Delta)$ junto com traduções t e T é uma *linguagem categórica para a lógica* $\mathcal{L}$.

Definição 6.7 *Um* pré-modelo categórico para o cálculo dedutivo *da lógica* $\mathcal{L}$ *é uma linguagem categórica* $(\mathbf{L}, t, T)$ *para* $\mathcal{L}$ *e uma classe não vazia* $\mathbf{K}$ *de estruturas categóricas para* $\mathbf{L}$.

Desta definição obtemos que se $\mathbf{K}$ é um pré-modelo categórico para o cálculo dedutivo da lógica $\mathcal{L}$ então $\Pi :\vdash A_X \Rightarrow B_Y$ sse $\mathbf{K} \models T(\Pi) : A^t_{X;Y} \to B^t_{X;Y}$

[3] De maneira alternativa, poderiamos considerar $t : C \to \Sigma^*$.

[4] $X;Y$ é a operação de concatenação das sequências X e Y a menos das repetições.

Observe que os sistemas lógicos que estamos considerando têm um conectivo $\otimes$ que simula o efeito da vírgula que separa fórmulas nos antecedentes dos sequentes (i.e. $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ sse $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \Rightarrow B$) e uma fórmula I que é a identidade para este conectivo, então temos que $\Pi :\vdash\Rightarrow B$ sse $\Pi' :\vdash I \Rightarrow B$ sse em todas as categorias da classe $\mathbf{K}$ existe uma transformação natural $T(\Pi') : I^t \to B^t$. As fórmulas B que satisfazem esta condição são chamadas *fórmulas categoricamente válidas em* $\mathbf{K}$.

Proposição 6.2 *Um pré-modelo categórico* $\mathbf{K}$ *para o cálculo dedutivo da lógica* $\mathcal{L}$ *então ele gera um pré-modelo algébrico para* $\mathcal{L}$.

Prova: Seja (Σ, Δ, t, T) *a linguagem categórica para* $\mathcal{L}$ *usada no modelo e* $\mathcal{C} = (\mathbf{C}, \Sigma^C, \Delta^C) \in \mathbf{K}$. $(\Sigma, \leq, t)$ *é uma linguagem algébrica para* $\mathcal{L}$*, onde* $\leq$ *é um símbolo de relação binária.*

Seja $\mathcal{C}' = (\mathbf{D_C}, \Sigma^D, \Delta^D)$ *a estrutura discreta obtida da estrutura* $\mathcal{C}$. $\mathbf{D_C}$ *é a categoria discreta obtida a partir da categoria* $\mathbf{C}$ *(formada pelos mesmos objetos que a categoria* $\mathbf{C}$*, existe um morfismo* $f : A \to B$ *em* $\mathbf{D_C}$ *sse existe algum morfismo* $A \to B$ *em* $\mathbf{C}$*). Os endofuntores de* $\mathbf{C}$ *induzem endofuntores na categoria discreta, assim o conjunto* Σ^D *contém os funtores induzidos pelos funtores em* Σ^C*. Se* F *é um endofuntor em* Σ^D*, notamos por* $F^{-\mathcal{D}}$ *o correspondente funtor em* Σ^C.

Seja $\mathcal{F} = (Img(t'))^{\mathcal{D}}$ *o conjunto de endofuntores em* $\mathbf{D_C}$ *que correspondem a fórmulas de* $\mathcal{L}$[5]*. Dados dois funtores* F, G *em* $\mathcal{F}$*, dizemos que* $F \cong G$ *sse* $\exists \delta : F \to G$ *e* $\exists \delta' : G \to F$*. Observe que por serem transformações naturais na categoria discreta, temos que* $\delta'.\delta = id_F$ *e* $\delta.\delta' = id_G$*. Que a relação* $\cong$ *é uma relação de equivalência é facilmente provado.*

No conjunto quociente $\mathcal{F}/_{\cong}$ *definimos a seguinte relação de ordem*[6]*:* $[A^t_X] \leq^{\mathcal{F}} [B^t_Y]$ *sse* $\exists [T(\Pi)]^{\mathcal{C}} : (A^t_{X;Y})^{-\mathcal{D}} \to (B^t_{X;Y})^{-\mathcal{D}}$.

Para cada funtor F *em* Σ^D *definimos a operação* $F^+([G_1], \ldots, [G_n]) = [F(G_1, \ldots, G_n)]$*. O conjunto destas operações é chamado* Σ^+.

$\mathcal{M} = (\mathcal{F}/_{\cong}, \Sigma^+, \leq^{\mathcal{F}})$ *é uma estrutura algébrica para a linguagem* $(\Sigma, \leq)$*. Seja* $\mathbf{K}'$ *a classe das estruturas algébricas para* $(\Sigma, \leq)$ *obtidas a partir da classe* $\mathbf{K}$*. Além disto,* $\mathbf{K}'$ *é um modelo algébrico para* $\mathcal{L}$ *já que temos que* $\vdash A \Rightarrow B$ *sse* $\mathbf{K}' \models A^t \leq B^t$*. Mais precisamente temos que:*

$\vdash A_X \Rightarrow B_Y$ *sse* $\exists \Pi \in Dem(\mathcal{L})$ *tq* $\Pi :\vdash A_X \Rightarrow B_Y$ *sse* $\mathbf{K} \models T(\Pi) : A^t_{X;Y} \to B^t_{X;Y}$ *sse* $\forall \mathcal{C} \in \mathbf{K}\ \ \mathcal{C} \models T(\Pi) : A^t_{X;Y} \to B^t_{X;Y}$ *sse* $\forall \mathcal{C} \in \mathbf{K}\ \ \exists [T(\Pi)]^{\mathcal{C}} : A^t \to B^t$ *sse* $\forall \mathcal{M} \in \mathbf{K}'\ \ [(A^t_X)^{\mathcal{D}}] \leq^{\mathcal{F}} [(B^t_Y)^{\mathcal{D}}]$ *sse* $\forall \mathcal{M} \in \mathbf{K}'\ \ \mathcal{M} \models A^t \leq B^t$ *sse* $\mathbf{K}' \models A^t \leq B^t$.

Seja uma lógica $\mathcal{L}$ apresentada através de um sistema dedutivo e com conjunto de reduções (entre termos ou derivações) R. Seja R^+ a relação de equivalência gerada pelas reduções de R e as equações correspondendo às definições de categoria, de funtor para cada conectivo da linguagem L, de transformação natural para cada demonstração Π na lógica e de coerência para a estrutura monoidal da categoria. Isto é, R^+ é a menor relação de equivalência obtida a partir de R e as equações:

- $\Pi = \Pi'$ se Π, Π' são demonstrações do mesmo sequente e uma delas difere da outra somente porque usa a regra do corte com um dos sequente superiores desta regra sendo um axioma identidade;

[5]Lembremos que $t' : For(\mathcal{L}) \to \Sigma^*$.

[6]lembremos que se $F \in \mathcal{F} = (Img(t'))^{\mathcal{D}}$ então $F = (A^t_X)^{\mathcal{D}}$ para alguma fórmula A da linguagem de $\mathcal{L}$.

- $\Pi = \Pi'$ se Π, Π' são demonstrações do mesmo sequente e uma delas difere da outra somente na ordem em que as regras do corte são usadas;
- $\Pi = \Pi'$ se $\Pi, \Pi' :\vdash c(A_1, \dots, A_n) \Rightarrow c(A_1, \dots, A_n)$, onde c é um conectivo n-ário;
- $\Pi = \Pi'$ se Π, Π' são demonstrações do mesmo sequente e Π é:

$$\dfrac{\dfrac{C_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_1 \dots C_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_n}{c(C_1, \dots, C_n) \overset{\vdots}{\Rightarrow} c(A_1, \dots, A_n)} \qquad \dfrac{A_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} B_1 \dots A_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} B_n}{c(A_1, \dots, A_n) \overset{\vdots}{\Rightarrow} c(B_1, \dots, B_n)}}{c(C_1, \dots, C_n) \Rightarrow c(B_1, \dots, B_n)}$$

e Π' é:

$$\dfrac{\dfrac{C_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_1 \quad A_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} B_1}{C_1 \Rightarrow B_1} \dots \dfrac{C_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_n \quad A_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} B_n}{C_n \Rightarrow B_n}}{c(C_1, \dots, C_n) \overset{\vdots}{\Rightarrow} c(B_1, \dots, B_n)}$$

- $\Pi = \Pi'$ se Π, Π' são demonstrações do mesmo sequente e Π é uma demonstração que usa a regra do corte com um dos sequentes superiores sendo uma demonstração Π_1 que usa sequentes inicias $A_1 \Rightarrow A_1, \dots, A_n \Rightarrow A_n$ e sequência de regras r; Π' é uma demonstração que usa a regra do corte com um dos sequentes superiores sendo a demonstração Π_2 que usa sequentes inicias $B_1 \Rightarrow B_1, \dots, B_n \Rightarrow B_n$ e a mesma sequência de regras r;
- $\Pi = \Pi'$ se Π, Π' são demonstrações do mesmo sequente e nas duas demonstrações somente são aplicadas sequencias (talvez vazias) das regras $\otimes_e, \otimes_d, I_e, I_d$ e das regras estruturais, sendo $\otimes$ o conectivo que internaliza o efeito da vírgula no cálculo.

Dada uma estrutura categórica $\mathcal{C}$ para uma linguagem $\mathbf{L}$, usaremos a notação $\mathcal{C} \models n = n'$, sendo n, n' dois símbolos de transformações naturais de $\mathbf{L}$ para indicar que na estrutura $\mathcal{C}$ vale a equação $n^{\mathcal{C}} = n'^{\mathcal{C}}$ entre as transformações naturais correspondentes. Usaremos a notação $\mathbf{K} \models n = n'$ para indicar que a equação é válida em cada estrutura $\mathcal{C}$ de uma classe $\mathbf{K}$.

Definição 6.8 *Um* pré-modelo categórico para a lógica $\mathcal{L}$ com conjunto de reduções R *é uma linguagem categórica* $(\mathbf{L}, t, T)$ *para* $\mathcal{L}$ *junto com uma classe* $\mathbf{K}$ *de estruturas categóricas para* $\mathbf{L}$ *tal que para todo par de demonstrações* $\Pi, \Pi' : A_X \Rightarrow B_Y$ *temos que* $R^+(\Pi, \Pi')$ *sse* $\mathbf{K} \models T(\Pi) = T(\Pi')$.

As equações acrescentadas à relação R são necessárias porque os conceitos categóricos nos proporcionam equações entre morfismos, que podem correspondem a demonstrações, mas que as reduções do cálculo poderiam não identificar. Na verdade, isto é uma consequência direta de que os nossos modelos devem usar elementos da Teoria de Categorias. Outra consequência do uso de categorias como modelos é que devemos garantir que a lógica possua suficientes demonstrações para que conectivos lógicos correspondam com endofuntores (sejam eles covariantes ou contravariantes em suas componentes); isto significa que para conectivo n-ário c devemos ter a seguinte derivação:

$$\frac{A_1 \Rightarrow B_1 \ \ldots \ A_n \Rightarrow B_n}{c(D_1, \ldots D_n) \overset{\vdots}{\Rightarrow} c(F_1, \ldots F_n)}$$

onde para todo $1 \leq i \leq n$ temos que $\{D_i, F_i\} = \{A_i, B_i\}$.

6.2.1 A categoria gerada pelo cálculo e o Teorema de Eliminação da regra do corte

Se a lógica satisfaz o Teorema de eliminação da regra do corte, um pré-modelo categórico é facilmente obtido diretamente do sistema dedutivo. A classe que contém só esta construção livre é o modelo definido por [Sza74, LS86] para o caso da Lógica Intuicionista (gerando como modelo categórico uma categoria bi-cartesiana fechada) e o modelo definido por [See89] para o caso da Lógica Linear Intuicionista (gerando como modelo categórico uma categoria de Girard). Mostramos a seguir como é obtida a categoria livre para a família de lógicas estudadas nesta tese:

Seja um sistema dedutivo para a lógica $\mathcal{L}$ com conjunto de reduções R, então a categoria $\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}$ é formada por:

- os objetos são as fórmulas (ou tipos) da lógica $\mathcal{L}$.
- um morfismo $\Pi^{@} : A \to B$ é a classe de equivalência da demonstração $\Pi :\vdash A \Rightarrow B$ (ou termos de tipo B com variáveis livres de tipo A) gerada pela **menor relação de equivalência obtida com as reduções de R acrescida da seguinte relação**[7]:

1.

$$\frac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \quad A \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A} \qquad \text{relacionada com} \qquad \Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A$$

$$\frac{A \Rightarrow A \quad \Delta, A, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B}{\Delta, A, \Delta' \Rightarrow B} \qquad \text{relacionada com} \qquad \Delta, A, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B$$

[7]Estes pares de derivações correspondem a reduções provistas pelo processo de eliminação da regra do corte.

2.

$$\frac{\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} B \quad \Delta, B, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, \Gamma, \Delta' \Rightarrow C} \qquad \Sigma, C, \Sigma' \overset{\vdots}{\Rightarrow} D}{\Sigma, \Delta, \Gamma, \Delta', \Sigma' \Rightarrow D} \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} B \qquad \dfrac{\Delta, B, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C \quad \Sigma, C, \Sigma' \overset{\vdots}{\Rightarrow} D}{\Sigma, \Delta, B, \Delta', \Sigma' \Rightarrow D}}{\Sigma, \Delta, \Gamma, \Delta', \Sigma' \Rightarrow D}$$

$$\frac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \qquad \dfrac{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} B \quad \Sigma, A, \Sigma', B, \Phi \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Sigma, A, \Sigma', \Delta, \Phi \Rightarrow C}}{\Sigma, \Gamma, \Sigma', \Delta, \Phi \Rightarrow C} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} B \qquad \dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \quad \Sigma, A, \Sigma', B, \Phi \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Sigma, \Gamma, \Sigma', B, \Phi \Rightarrow C}}{\Sigma, \Gamma, \Sigma', \Delta, \Phi \Rightarrow C}$$

3.

$$\frac{\vdots}{c(A_1, \ldots, A_n) \Rightarrow c(A_1, \ldots, A_n)} \quad \text{e } c(A_1, \ldots, A_n) \Rightarrow c(A_1, \ldots, A_n)$$

onde c é um conectivo n-ário da linguagem da lógica (inclusive para as constantes ou conectivos 0-ários).

4.

$$\frac{\dfrac{C_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_1 \ldots C_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_n}{c(C_1, \ldots, C_n) \overset{\vdots}{\Rightarrow} c(A_1, \ldots, A_n)} \qquad \dfrac{A_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} B_1 \ldots A_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} B_n}{c(A_1, \ldots, A_n) \overset{\vdots}{\Rightarrow} c(B_1, \ldots, B_n)}}{c(C_1, \ldots, C_n) \Rightarrow c(B_1, \ldots, B_n)}$$

$$\text{relacionada com} \quad \frac{\dfrac{C_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_1 \quad A_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} B_1}{C_1 \Rightarrow B_1} \;\ldots\; \dfrac{C_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_n \quad A_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} B_n}{C_n \Rightarrow B_n}}{c(C_1, \ldots, C_n) \overset{\vdots}{\Rightarrow} c(B_1, \ldots, B_n)}$$

5.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A}{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} A} \qquad \Sigma, A, \Sigma' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Sigma, \Delta, \Sigma' \Rightarrow C} \qquad \text{relacionada com} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \quad \Sigma, A, \Sigma' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Sigma, \Gamma, \Sigma' \Rightarrow C}}{\Sigma, \Delta, \Sigma' \Rightarrow C}$$

$$\dfrac{\Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \qquad \dfrac{\Delta, A, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B \quad \Phi \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow B'}}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \Rightarrow B'} \qquad \text{e} \qquad \dfrac{\dfrac{\Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \quad \Delta, A, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B}{\Delta, \Sigma, \Delta' \Rightarrow B} \qquad \Phi \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' B'}$$

$$\dfrac{\Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \qquad \dfrac{\Phi \overset{\vdots}{\Rightarrow} C \quad \Delta, A, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B}{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow B'}}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \Rightarrow B'} \qquad \text{e} \qquad \dfrac{\Phi \overset{\vdots}{\Rightarrow} C \qquad \dfrac{\Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \quad \Delta, A, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B}{\Delta, \Sigma, \Delta' \Rightarrow B}}{\Gamma, \Sigma, \Gamma' \Rightarrow B'}$$

Nos útimos dois pares de derivações as derivações $\Phi \overset{\vdots}{\Rightarrow} C$ podem estar ausentes.

6.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_1 \quad \Gamma_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_n}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow c(A_1, \ldots, A_n)} \qquad \dfrac{\Sigma, A_1, \ldots, A_n, \Sigma' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B}{\Sigma, c(A_1, \ldots, A_n), \Sigma' \Rightarrow B}}{\Sigma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Sigma' \Rightarrow B}$$

$$\text{relacionada com} \qquad \dfrac{\Gamma_n \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_n \qquad \dfrac{\Gamma_1 \overset{\vdots}{\Rightarrow} A_1 \quad \Sigma, A_1, \ldots, A_n, \Sigma' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B}{\Sigma, \Gamma_1, \ldots, A_n, \Sigma' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B}}{\Sigma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Sigma' \overset{\vdots}{\Rightarrow} B}$$

7. Se $\otimes$ é o conectivo que simula o efeito da vírgula nos antecedentes dos sequentes, então estão relacionados

$$\dfrac{\Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \qquad \dfrac{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Gamma \Rightarrow C}\, r_e}{\Sigma, \Gamma \Rightarrow A \otimes C}\, \otimes_d \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\dfrac{\Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \quad \Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Sigma, \Delta \Rightarrow A \otimes C}\, \otimes_d}{\Sigma, \Gamma \Rightarrow A \otimes C}\, r_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Gamma \Rightarrow C}\, r_e \qquad \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A}{\Sigma, \Gamma \Rightarrow C \otimes A}\, \otimes_d \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\dfrac{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} C \quad \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A}{\Delta, \Sigma \Rightarrow C \otimes A}\, \otimes_d}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow C \otimes A}\, r_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\Delta, A, B, \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, A \otimes B, \Sigma \Rightarrow C}\, \otimes_e}{\Gamma, A \otimes B, \Phi \Rightarrow C'}\, r \quad \text{e} \quad \dfrac{\dfrac{\Delta, A, B, \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Gamma, A, B, \Phi \Rightarrow C'}\, r}{\Gamma, A \otimes B, \Phi \Rightarrow C'}\, \otimes_e$$

8.

$$\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A}{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} A}\, r \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A}{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} A}\, r'$$

se r e r' são sequências finitas (talvez vazias) que contém só aplicações de regras estruturais e da regra I_e, sem aplicações da regra do corte, tal que:

- as fórmulas contraídas e atenuadas são as mesmas nas duas derivações;
- nas duas derivações os antecedentes Δ obtidos são iguais vistos como árvores de fórmulas.

9. Dependendo das regras estruturais existentes no cálculo da lógica também devem ser acrescentadas à relação os seguintes pares de derivações:

$$\dfrac{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} C \qquad \dfrac{\Gamma, C, C, \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} D}{\Gamma, C, \Sigma \Rightarrow D}}{\Gamma, \Delta, \Sigma \Rightarrow D} \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\dfrac{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} C \qquad \dfrac{\Delta \overset{\vdots}{\Rightarrow} C \quad \Gamma, C, C, \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} D}{\Gamma, \Delta, C, \Sigma \Rightarrow D}}{\Gamma, \Delta, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}}{\Gamma, \Delta, \Sigma \Rightarrow D}$$

onde r é uma sequência de aplicações das regras $\otimes_e$ e da contração.

$$\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \qquad \dfrac{\Delta, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, A, \Delta' C}\, r}{\Delta, \Gamma, \Delta' \Rightarrow C} \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\Delta, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, \Gamma, \Delta' \Rightarrow C}\, r'$$

onde r e r' são aplicações das regras de atenuação e I_e.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow B \quad \Rightarrow I \quad \Sigma \Rightarrow A}{\Gamma', \Sigma' \Rightarrow C}}{\Gamma', I, \Sigma' \Rightarrow C} \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow B \quad I \Rightarrow I \quad \Sigma \Rightarrow A}{\Gamma', I, \Sigma' \Rightarrow C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B, \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Gamma, B, A, \Sigma \Rightarrow C}}{\Gamma', B, A, \Sigma' \Rightarrow C'} \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B, \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Gamma', A, B, \Sigma' \Rightarrow C'}}{\Gamma', B, A, \Sigma' \Rightarrow C'}$$

$$\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \qquad \dfrac{\Delta, A, B, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, B, A, \Delta' \Rightarrow C}}{\Delta, B, \Gamma, \Delta' \Rightarrow C} \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \quad \Delta, A, B, \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, \Gamma, B, \Delta' \Rightarrow C}}{\Delta, B, \Gamma, \Delta' \Rightarrow C}\, r$$

onde r é uma sequência de aplicações da regra $\otimes_e$ e da permutação.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, ((A, B), C), \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} D}{\Gamma, (A, (B, C)), \Sigma \Rightarrow D}\, a}{\Gamma', (A, (B, C)), \Sigma' \Rightarrow D'}\, r \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, ((A, B), C), \Sigma \overset{\vdots}{\Rightarrow} D}{\Gamma', ((A, B), C), \Sigma' \Rightarrow D'}\, r}{\Gamma', (A, (B, C)), \Sigma' \Rightarrow C'}\, a$$

$$\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \qquad \dfrac{\Delta, ((A, B), D), \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, (A, (B, D)), \Delta' \Rightarrow C}\, a}{\Delta, (\Gamma, (B, D)), \Delta' \Rightarrow C} \quad \text{e} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \overset{\vdots}{\Rightarrow} A \quad \Delta, ((A, B), D), \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, ((\Gamma, B), D), \Delta' \Rightarrow C}}{\Delta, (\Gamma, (B, C)), \Delta' \Rightarrow C}\, r$$

se Γ é diferente de vazio, onde r é uma sequência de aplicações da regra $\otimes_e$ e da associação. Se Γ é vazio então

$$\dfrac{\overset{\vdots}{\Rightarrow A} \quad \dfrac{\Delta, ((A,B),D), \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, (A,(B,D)), \Delta' \Rightarrow C}\, a}{\Delta, (B,D), \Delta' \Rightarrow C} \quad \text{relacionada com} \quad \dfrac{\overset{\vdots}{\Rightarrow A} \quad \Delta, ((A,B),D), \Delta' \overset{\vdots}{\Rightarrow} C}{\Delta, (B,D), \Delta' \Rightarrow C}$$

Há também pares similares a estes últimos, mas com a regra da associação no outro sentido.

A prova de que $\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}$ assim construída é uma categoria é direta porque os morfismos identidades estão garantidos pelas classes de equivalência dos axiomas iniciais e a composição é definida por: $[\Pi :\vdash \Gamma \Rightarrow A].[\Pi' :\vdash \Delta, A, \Delta' \Rightarrow B] = [\Pi.\Pi' :\vdash \Delta, \Gamma, \Delta' \Rightarrow B]$. As equações da definição de categoria, estão dadas pelas reduções do tipo 1 e 2.

A partir desta categoria definimos a estrutura categórica chamada de $(\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}, \Sigma_{Free}, \Delta_{Free})$. Para cada conectivo c n-ário definimos o funtor $c^{@}$ da seguinte maneira:
$c^{@}(A_1, \ldots, A_n) = c(A_1, \ldots, A_n)$,
$c^*([\Pi_1 :\vdash A_1 \Rightarrow B_1], \ldots, [\Pi_n :\vdash A_n \Rightarrow B_n]) = [c(\Pi_1, \ldots, \Pi_n) :\vdash c(C_1, \ldots, C_n) \Rightarrow c(D_1, \ldots, D_n)]$, onde para todo $1 \leq i \leq n$ temos que $\{C_i, D_i\} = \{A_i, B_i\}$. As reduções do tipo 3 e 4 garantem que cada conectivo c é transformado num endofuntor (covariante ou contravariante) $c^{@}$. Σ_{Free} é o conjunto dos funtores $c^{@}$.

Uma transformação natural $\delta : A^{@} \to B^{@}$, onde $A^{@}, B^{@}$ são os funtores que representam às fórmulas A e B respectivamente, é o conjunto das classes de equivalências $[\Pi_{A,B} :\vdash A \Rightarrow B]$ tal que para qualquer outro elemento do conjunto $[\Pi_{C,D} :\vdash C \Rightarrow D]$ se existem classes $[\Pi' :\vdash A \Rightarrow C], [\Pi'' :\vdash B \Rightarrow D]$, então temos que $[\Pi_{A,B}].[\Pi''] = [\Pi'].[\Pi_{C,D}]$. As reduções do tipo 5 e 6 garantem que existem estes conjuntos não vazios, isto é que os morfismos definem transformações naturais. Δ_{Free} é o conjunto destas transformações naturais.

As reduções do tipo 7,8 e 9 são necessárias para garantir que a categoria obtida satisfaça as propriedades de coerência como estabelecidas por [ML71]. Esta relação entre pares de derivações é similar à introduzida por [Sza74, pag.179-180] ao definir a categoria livre correspondente ao fragmento da Lógica Intuicionista com os conectivos da implicação e da conjunção.

É fácil ver que a estrutura livre $(\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}, \Sigma_{Free}, \Delta_{Free})$ é um pré-modelo categórico para a lógica $\mathcal{L}$. A linguagem $(Con\mathcal{L}, Dem\mathcal{L}, id, ID)$ é uma linguagem categórica para $\mathcal{L}$ e a classe formada pela estrutura livre é uma estrutura para $\mathbf{L}$. Além disto, o conjunto $\Delta_{Free} = \Delta^*_{Free}$ está formado por transformações naturais que representam demonstrações e além disto, dada uma demonstração Π que se reduz a outra demonstração Π' temos que $[\Pi] = [\Pi']$ e assim as transformações naturais são iguais.

Sempre que a lógica satisfaz ao Teorema de eliminação do corte é possível obter a categoria livre como construída acima. O Teorema de eliminação do corte é importante aqui porque garante que a lógica satisfaz as reduções definidas na construção acima, já que essas derivações aparecem no processo de eliminação do corte. Isto é, não está-se introduzindo reduções novas ao conjunto R (i.e. podemos dizer que $R = R^+$ se considerarmos R como o conjunto de reduções previstas pelo processo de normalização e de eliminação do corte).

No caso das lógicas que não satisfazem o Teorema de eliminação da regra do corte, como as lógicas R (i.e. LLI mais a contração e distribuição dos aditivos), IES4, E^m e T estudadas nos capítulos 3 e 4 respectivamente, a categoria livre $\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}$ é definida da seguinte maneira:

- objetos são as fórmulas da lógica;
- em morfismos $f : A \to B$ é a classe de equivalencia da demonstração $[\Pi :\vdash A \Rightarrow B]$ gerada pela relação de equivalência R^+.

A estrutura $(\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}, \Sigma_{Free}, \Delta_{Free})$ é construída como no caso anterior (onde vale o Teorema de eliminação da regra do corte) já que as equações da definição da relação R^+ garantem que $\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}$ é uma categoria, os conectivos são funtores nesta categoria e cada demonstração é uma transformação natural. Além disto, a categoria $\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}$ satisfaz as condições de coerência para a estrutura monoidal já que a relação R^+ foi definida para garantir esta propriedade.

A lógica T mostra claramente porque deve-se definir a relação R^+ acrescentado à relação R (no caso particular da lógica T, a relação R é vazia) com as equações categóricas. Nesta lógica não existe em geral a redução do corte onde o sequente superior esquerdo é um axioma identidade, também, nesta lógica não é possível reduzir demonstrações onde um corte é feito entre fórmulas nas quais um conectivo é introduzido a esquerda e a direita nos sequentes superiores da regra do corte, então por exemplo mesmo tendo a demonstração: $a :\vdash (A \otimes B) \otimes C \Rightarrow A \otimes (B \otimes C)$ para quaisquer A, B e C não é possível mostrar que é uma demonstração natural em A, B e C. I.e, nesta lógica não são válidas equações das definições de categorias, mas se queremos fazer um modelo categórico para ela devemos garantir estas equações.

Semelhante ao caso do modelo algébrico com a álgebra de Lindenbaum, a classe formada pela estrutura $(\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}, \Sigma_{Free}, \Delta_{Free})$ é um pré-modelo categórico, mas este modelo obtido a partir do cálculo da lógica e do conjunto das reduções que são válidas nela exige conhecer todas as reduções, tanto as que aparecem no processo de normalização como reduções que envolvem a regra da substituição e que aparecem geralmente durante o processo de eliminação da regra do corte. Por isto, preferimos que um modelo categórico seja uma construção categórica apresentada usando só conceitos categóricos de forma independente ao cálculo.

Definição 6.9 *Um* modelo categórico para a lógica $\mathcal{L}$ com conjunto de reduções R *é um pré-modelo categórico para a lógica $\mathcal{L}$ (finitamente) axiomatizado usando equações entre morfismos.*

Definição 6.10 *Seja uma classe* $\mathbf{K}$ *que modela categoricamente à lógica $\mathcal{L}$ com linguagem categórico (Σ, Δ, t, T), um morfismo entre duas estruturas $\mathcal{C} = (C, \Sigma^{\mathcal{C}}, \Delta^{\mathcal{C}})$, $\mathcal{C}' = (C', \Sigma^{\mathcal{C}'}, \Delta^{\mathcal{C}'})$ dessa classe é um funtor $F : C \to C'$ tal que $F((A^t)^{\mathcal{C}}) = (A^t)^{\mathcal{C}'}$ para cada símbolo de funtor em $Img(t')$ e $F(T(\Pi)^{\mathcal{C}}) = T(\Pi)^{\mathcal{C}'}$, para cada símbolo de transformação natural em $Img(T)$.*

Proposição 6.3 *Se $\mathcal{F} = (\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}, \Sigma_{Free}, \Delta_{Free})$ está no modelo categórico* $\mathbf{K}$, *então é livre na classe* $\mathbf{K}$. *Isto significa que existe uma atribuição $u : VarProp \to Obj(\mathbf{Free}_{\mathcal{L}})$ tal que para toda atribuição $\mathcal{I} : VarProp \to Obj(\mathbf{C})$ em qualquer estrutura $\mathcal{C} = (C, \Sigma^{\mathcal{C}}, \Delta^{\mathcal{C}})$ da classe* $\mathbf{K}$ *existe um único morfismo $F : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{I} = F_{obj}.u$.*
Prova: Seja $F : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ definido por:
$F(x) = \mathcal{I}(x)$, para x variável proposicional;

$F(c(A_1,\ldots,A_n)) = (c^t)^{\mathcal{C}}(F(A_1),\ldots,F(A_n))$;
$F([\Pi :\vdash A(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow B(y_1,\ldots,y_m)]) = T(\Pi)^{\mathcal{C}} : F(A(x_1,\ldots,x_n)) \to F(B(y_1,\ldots,y_m)) = (A^t)^{\mathcal{C}}(\mathcal{I}(x_1),\ldots,\mathcal{I}(x_n)) \to (B^t)^{\mathcal{C}}(\mathcal{I}(y_1),\ldots,\mathcal{I}(y_m))$.

F está bem definido nos morfismos já que demonstrações que se reduzem (que têm o mesmo sequente final) têm a mesma transformação natural no modelo $\mathcal{C}$. F é um funtor já que $F([id : A \Rightarrow A]) = (id^t)^{\mathcal{C}} : F(A) \to F(A)$ e $F([\Pi :\vdash A \Rightarrow B]).F([\Pi' :\vdash B \Rightarrow C]) = T(\Pi)^{\mathcal{C}} : F(A) \to F(B).T(\Pi')^{\mathcal{C}} : F(B) \to F(C) = T(\Pi)^{\mathcal{C}}.T(\Pi')^{\mathcal{C}} : F(A) \to F(C) = T(\Pi.\Pi')^{\mathcal{C}} : F(A) \to F(C) = F([\Pi.\Pi' :\vdash A \Rightarrow C]) = F([\Pi :\vdash A \Rightarrow B].[\Pi' :\vdash B \Rightarrow C])$. Por definição F preserva a interpretação funtorial das fórmulas e a interpretação natural das demonstrações. Além disto, sendo $u = inc : VarProp \to For(A)$, F é o único que satisfaz $F_{obj}.inc = \mathcal{I}$, já que para qualquer outro funtor G que satisfaça a equação e preserve as interpretações das fórmulas e das demonstrações temos que $G = F$.

6.2.2 Validade e Completude dos modelos categóricos apresentados para as lógicas tratadas nos capítulos 3,4 e 5

Nos casos analisados nos capítulos anteriores apresentamos uma classe de estruturas categóricas para cada uma das lógicas envolvidas e verificamos que nessas estruturas demonstrações correspondem a transformações naturais nas categorias e que demonstrações que se reduzem correspondem à mesma transformação natural. Para verificar que cada demonstração corresponde com um morfismo, natural em todos os argumentos, consideramos que a lógica está apresentada através do Cálculo de Sequentes, mas isto não é importante já que poderiamos ter considerado que a lógica está apresentada por qualquer um dos outros tipos de sistemas.

Em todos os casos, associamos primeiro um funtor a cada um dos conectivos e um objeto (ou funtor constante) às constantes da linguagem. A fórmula I e os antecedentes vazios são interpretados num mesmo objeto da categoria chamado I.

Em todos os casos analisados, a prova de que a cada demonstração corresponde um morfismo, natural em todos os argumentos, foi feita por indução na estrutura da demonstração. Para isto, associamos aos axiomas identidades os morfismos identidades e à regra do corte uma operação S de composição generalizada entre morfismos: dados morfismos $f : A \to B, g : \Delta \otimes B \otimes \Delta' \to C$, $S(f,g) = g.(id_\Delta \otimes f \otimes id_{\Delta'})$, onde Δ, Δ' podem ser vazios.

A regra $\otimes_l$ é associada com a transformação natural identidade e a regra $\otimes_r$, i.e.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B}$$

é associada com a transformação natural $hom(\Gamma, A) \times hom(\Delta, B) \to hom(\Gamma \otimes \Delta, A \otimes B)$, já que se $\mathbf{C}$ é uma categoria temos que $hom(\Gamma, A) \times hom(\Delta, B) = hom(\Gamma \times \Delta, A \times B)$ e tanto este funtor como $hom(\Gamma \otimes \Delta, A \otimes B)$ são funtores em $(\mathbf{C} \times \mathbf{C})^{op} \times (C \times C) \to \mathbf{Set}$. A regra I_d está associada com o morfismo identidade $id_I : I \to I$ e a regra I_e está associada com o isomorfismo natural $b' : A \xrightarrow{\sim} I \otimes A$. As regras das constantes 1 e 0 exigem a existência de um morfismo $\Gamma \to 1$ e $\Gamma \otimes 0 \otimes \Delta \to A$, se 1 é o objeto terminal e 0 o inicial então esses morfismos sempre existem.

As outras regras têm associadas transformações naturais entre funtores hom aplicados aos funtores que aparecem na regra. Por exemplo, se na lógica $\mathcal{L}$ temos a regra:

$$P\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow C}$$

então devemos ter uma transformação natural: $\tau_{\Gamma,A,B,\Gamma',C} : hom(\Gamma \otimes A \otimes B \otimes \Gamma', C) \rightarrow hom(\Gamma \otimes B \otimes A \otimes \Gamma', C)$, natural em Γ, A, B, Γ', C. Isto é, dados morfismos $h : \Delta \rightarrow \Gamma, f : A' \rightarrow A, g : B' \rightarrow B, h' : \Delta' \rightarrow \Gamma'$ e $l : C \rightarrow C'$, devemos ter a seguinte equação: $\tau_{\Delta,A',B',\Delta',C'}.hom(h \otimes f \otimes g \otimes h', l) = hom(h \otimes g \otimes f \otimes h', l).\tau_{\Gamma,A,B,\Gamma',C}$.

Observe que uma maneira de garantir esta transformação natural, associada à regra da permutação, é exigir a existência de uma transformação natural $c_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ e definir a transformação τ da seguinte maneira: dado um morfismo $m : \Gamma \otimes (A \otimes B) \otimes \Gamma' \rightarrow C$ em $hom(\Gamma \otimes A \otimes B \otimes \Gamma', C)$, τ associa o morfismo $m.(id_\Gamma \otimes c_{B,A} \otimes id_{\Gamma'}) : \Gamma \otimes (B \otimes A) \otimes \Gamma' \rightarrow C$ em $hom(\Gamma \otimes B \otimes A \otimes \Gamma', C)$. τ definida desta maneira é uma transformação natural já que podemos obter a equação correspondente: $(l.m.(h \otimes (f \otimes g) \otimes h')).(id_\Delta \otimes c_{B',A'} \otimes id_{\Delta'}) = (l.m).(h \otimes (f \otimes g) \otimes h').(id_\Delta \otimes c_{B',A'} \otimes id_{\Delta'}) = (l.m).(h.id_\Delta \otimes (f \otimes g).c_{B',A'} \otimes h' \otimes id_{\Delta'}) = (l.m).(h \otimes c_{B,A}.(g \otimes f).h') = (l.m).(id_\Gamma.h \otimes c_{B,A}.(g \otimes f).id_{\Gamma'}.h') = (l.m).(id_\Gamma \otimes c_{B,A} \otimes id_{\Gamma'}).(h \otimes (g \otimes f) \otimes h') = l.(m.(id_\Gamma \otimes c_{B,A} \otimes id_{\Gamma'})).(h \otimes (g \otimes f) \otimes h')$.

Para a regra

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B}{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow B}$$

devemos ter uma transformação natural $\tau_{\Gamma,A,\Gamma',B} : hom((\Pi_1 \otimes \Pi_3).\Delta_\times(< \Gamma, A, \Gamma' >), B) \rightarrow hom(\Gamma \otimes A \otimes \Gamma', B)$ natural em Γ, A, Γ', B, onde $\Pi_1, \Pi_3 : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ são os funtores projeções na primeira e terceira componente respectivamente ([HS73, pag.59]). Isto é, dados morfismos $g_1 : \Delta \rightarrow \Gamma, g_2 : \Delta' \rightarrow \Gamma', g_3 : B \rightarrow C, h : D \rightarrow A$, devemos ter a seguinte equação: $hom(g_1 \otimes h \otimes g_2, g_3).\tau_{\Gamma,A,\Gamma',B} = \tau_{\Delta,D,\Delta',C}.h \times hom(g_1 \otimes g_2, g_3)$.

Para obter a equação da transformação natural associada à regra de atenuação, é suficiente existir uma transformação natural $p_A : A \rightarrow I$ e definir a transformação τ da seguinte maneira: dado um morfismo $f : \Gamma \otimes \Gamma' \rightarrow B$ em $hom(\Gamma \otimes \Gamma', B)$, τ associa o morfismo $f.(b_\Gamma \otimes id_{\Gamma'}).(id_\Gamma \otimes p_A \otimes id_{\Gamma'})$. τ definida desta maneira é uma transformação natural já que podemos obter a equação correspondente: $(g_3.f).(b_\Gamma \otimes id_{\Gamma'}).(id_\Gamma \otimes p_A \otimes id_{\Gamma'}).(g_1 \otimes h \otimes g_2) = (g_3.f).(b_\Gamma \otimes id_{\Gamma'}).(g_1 \otimes p_A.h \otimes g_2) = (g_3.f).(b_\Gamma \otimes id_{\Gamma'}).(g_1.id_\Delta \otimes id_I.p_D \otimes g_2.id_{\Delta'}) = (g_3.f).(b_\Gamma \otimes id_{\Gamma'}).(g_1 \otimes id_I \otimes g_2).(id_\Delta \otimes p_D \otimes id_{\Delta'}) = (g_3.f).(g_1 \otimes g_2).(b_\Delta \otimes id_{\Delta'}).(id_\Delta \otimes p_D \otimes id_{\Delta'}) = (g_3.f.(g_1 \otimes g_2)).(b_\Delta \otimes id_{\Delta'}).(id_\Delta \otimes p_D \otimes id_{\Delta'})$.

Uma vez estabelecido para cada demonstração a transformação natural correspondente, verificamos que se duas demonstrações se reduzem então as transformações naturais que as interpretam são iguais. Esta prova também foi feita por indução nos passos de redução, verificando que cada passo de redução entre duas demonstrações se corresponde com um diagrama comutativo entre os morfismos correspondentes.

Com a análise feita neste capítulo estamos em condições de mostrar, para as lógicas tratadas ao longo da tese que satisfazem o Teorema de Eliminação da regra do corte, que as classes de estruturas categóricas apresentadas são completas com respeito à lógica que modelam. Isto é que:

- se $\mathbf{K} \models T(\Pi) : A^t \rightarrow B^t$ então $\Pi :\vdash A \Rightarrow B$;
- se $\mathbf{K} \models T(\Pi) = T(\Pi')$ então $R^+(\Pi, \Pi')$.

Esta prova se reduz a mostrar para cada lógica $\mathcal{L}$ que a estrutura gerada pela categoria livre $(\mathbf{Free}_{\mathcal{L}}, \Sigma_{Free}, \Delta_{Free})$ pertence à classe de estruturas categóricas definidas. Nesta estrutura as transformações naturais definidas são dadas pela relação de demonstrabilidade, e as equações válidas são as dadas pela relação R^+.

Apresentaremos só alguns exemplos que servem como guia para mostrar como em cada caso a construção livre é uma categoria do tipo desejado. Seja a categoria livre para a lógica LLI, $(\mathbf{Free}_{LLI}, \Sigma_{Free}, \Delta_{Free})$, construída como definida anteriormente. O funtor $\otimes : \mathbf{Free}_{LLI} \times \mathbf{Free}_{LLI} \rightarrow \mathbf{Free}_{LLI}$ é definido por:

- $\otimes^@(A, B) = A \otimes B$, onde A e B são objetos da categoria $\mathbf{Free}_{LLI}$, i.e. fórmulas;
- $\otimes^@([f], [g]) = [f \otimes g]$, onde $[f : A \Rightarrow B]$, $[g : C \Rightarrow D]$ são morfismos em $\mathbf{Free}_{LLI}$, i.e. classes de equivalências de demonstrações.

Que $\otimes^@$ é um funtor é direto das reduções de tipo 3 e 4 da definição da categoria livre, já que $[id_A \otimes id_B] = [id_{A \otimes B}]$ e $[f.f' \otimes g.g'] = [f \otimes g].[f' \otimes g']$.

Para cada fórmula A temos em LLI a demonstração $b_A :\vdash I \otimes A \Rightarrow A$

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{I, A \Rightarrow A}}{I \otimes A \Rightarrow A}$$

Seja $[b_A]$ a classe de equivalência da demonstração b_A e seja $\mathcal{B}$ a transformação natural correspondente, i.e. um conjunto de classes de equivalências de demonstrações que comutam com o corte. Para provar que é possível definir uma transformação natural desta maneira deve-se verificar que dada a classe $[h : A \Rightarrow C]$ temos que $[b_A].[h] = [id_I \otimes h].[b_C]$, i.e. $[b_A.h] = [(id_I \otimes h).b_C]$. A continuação verificamos esta equação. Seja a demonstração correspondente ao lado esquerdo da equação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{I, A \Rightarrow A}}{I \otimes A \Rightarrow A} \qquad A \Rightarrow C}{I \otimes A \Rightarrow C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{I, A \Rightarrow A} \qquad A \Rightarrow C}{I, A \Rightarrow C}}{I \otimes A \Rightarrow C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow C}{I, A \Rightarrow C}}{I \otimes A \Rightarrow C}$$

A demonstração correspondente ao lado direito da equação é:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{I \Rightarrow I \quad A \Rightarrow C}{I, A \Rightarrow I \otimes C}}{I \otimes A \Rightarrow I \otimes C} \qquad \dfrac{\dfrac{C \Rightarrow C}{I, C \Rightarrow C}}{I \otimes C \Rightarrow C}}{I \otimes A \Rightarrow C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow C \qquad \dfrac{I \Rightarrow I \qquad \dfrac{C \Rightarrow C}{I, C \Rightarrow C}}{I, A \Rightarrow C}}{I, A \Rightarrow C}}{I \otimes A \Rightarrow C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow C \qquad \dfrac{C \Rightarrow C}{I, C \Rightarrow C}}{I, A \Rightarrow C}}{I \otimes A \Rightarrow C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow C \quad C \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}}{I, A \Rightarrow C}}{I \otimes A \Rightarrow C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow C}{I, A \Rightarrow C}}{I \otimes A \Rightarrow C}$$

Já que as duas demostrações reduzem à mesma demonstração, então temos que $[b_A.h] = [(id_I \otimes h).b_C]$. Além disto, esta transformação natural é um isomorfismo natural, i.e. devemos verificar que existe uma transformação natural $\mathcal{B}^{-1}$ tal que ao compor componente a componente obtemos o morfismo identidade. A transformação inversa é o conjunto das classes de equivalência das demonstrações

$$b_A^{-1}\dfrac{\Rightarrow I \quad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow I \otimes A}$$

que comutam com o corte. Dada uma componente $[b_A]$ da transformação natural $\mathcal{B}$ e uma componente $[b_A^{-1}]$ da transformação $\mathcal{B}^{-1}$, temos que $[b_A].[b_A^{-1}] = [b_A.b_A^{-1}] = id_{I\otimes A}$ e $[b_A^{-1}.b_A] = id_A$ já que

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow I \quad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow I \otimes A} \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{I, A \Rightarrow A}}{I \otimes A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\Rightarrow I \qquad \dfrac{A \Rightarrow A \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{I, A \Rightarrow A}}{I, A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A}$$

reduz-se a $A \Rightarrow A$. E também temos que

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{I, A \Rightarrow A}}{I \otimes A \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\Rightarrow I \quad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow I \otimes A}}{I \otimes A \Rightarrow I \otimes A}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad \dfrac{\Rightarrow I \quad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow I \otimes A}}{A \Rightarrow I \otimes A}}{I, A \Rightarrow I \otimes A}}{I \otimes A \Rightarrow I \otimes A}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow I \quad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow I \otimes A}}{I, A \Rightarrow I \otimes A}}{I \otimes A \Rightarrow I \otimes}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{I \Rightarrow I \quad A \Rightarrow A}{I, A \Rightarrow I \otimes A}}{I \otimes A \Rightarrow I \otimes A}$$

que se reduz a $I \otimes A \Rightarrow I \otimes A$.

Esta transformação natural satisfaz também certos diagramas de coerência, então devemos verificar também que estes diagramas correspondem a demonstrações que se reduzem. Por exemplo, o primeiro diagrama da definição de categoria monoidal:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes C) \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "id \otimes b"'] & & (A \otimes I) \otimes C \arrow[dl, "b' \otimes id"] \\
& A \otimes C &
\end{tikzcd}$$

exige que $[a.(b'_A \otimes id_C)] = [a].[b'_A \otimes id_C] = [a].([b'_A] \otimes [id_C]) : A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C$ deve ser igual à classe $[id_A \otimes b_C] = [id_A] \otimes [b_C] : A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C$. Esta igualdade é provada usando as reduções que são permitidas na categoria livre. Para $[id_A \otimes b_C]$ temos que:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad \dfrac{\dfrac{C \Rightarrow C}{I, C \Rightarrow C}}{I \otimes C \Rightarrow C}}{A, (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad \dfrac{C \Rightarrow C}{I, C \Rightarrow C}}{A, (I, C) \Rightarrow A \otimes C}}{A, (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad C \Rightarrow C}{A, C \Rightarrow C}}{A, (I, C) \Rightarrow A \otimes C}}{A, (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}$$

Para $[a].([b'_A] \otimes [id_C])$ temos que:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad I \Rightarrow I}{A, I \Rightarrow A \otimes I} \quad C \Rightarrow C}{(A, I), C \Rightarrow (A \otimes I) \otimes C}}{A, (I, C) \Rightarrow (A \otimes I) \otimes C}}{A, (I \otimes C) \Rightarrow (A \otimes I) \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow (A \otimes I) \otimes C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, I \Rightarrow A}}{A \otimes I \Rightarrow A} \quad C \Rightarrow C}{(A \otimes I), C \Rightarrow A \otimes C}}{(A \otimes I) \otimes C \Rightarrow A \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}$$

reduz-se a

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad I \Rightarrow I}{A, I \Rightarrow A \otimes I} \qquad C \Rightarrow C}{(A, I), C \Rightarrow (A \otimes I) \otimes C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, I \Rightarrow A}}{A \otimes I \Rightarrow A} \qquad C \Rightarrow C}{A \otimes I, C \Rightarrow A \otimes C}}{(A \otimes I) \otimes C \Rightarrow A \otimes C}}{\dfrac{(A, I), C \Rightarrow A \otimes C}{\dfrac{A, (I, C) \Rightarrow A \otimes C}{A, (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}}}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}
$$

reduz-se a

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad I \Rightarrow I}{A, I \Rightarrow A \otimes I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, I \Rightarrow A}}{A \otimes I \Rightarrow A} \qquad C \Rightarrow C}{A \otimes I, C \Rightarrow A \otimes C}}{(A, I), C \Rightarrow A \otimes C}}{A, (I, C) \Rightarrow A \otimes C}}{A, (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}
$$

reduz-se a

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad I \Rightarrow I}{A, I \Rightarrow A \otimes I} \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, I \Rightarrow A}}{A \otimes I \Rightarrow A}}{(A, I), C \Rightarrow C} \qquad C \Rightarrow C}{(A, I), C \Rightarrow A \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}
$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, I \Rightarrow A} \qquad C \Rightarrow C}{(A, I), C \Rightarrow A \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}$$

reduz-se a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad C \Rightarrow C}{A, C \Rightarrow A \otimes C}}{(A, I), C \Rightarrow A \otimes C}}{A, (I, C) \Rightarrow A \otimes C}}{A \otimes (I \otimes C) \Rightarrow A \otimes C}$$

Portanto temos a igualdade desejada já que as duas demonstrações reduzem-se uma a outra porque só diferem nas regras estruturais aplicadas e satisfazem a relação do tipo 7 da definição da categoria livre.

As equações decorrentes da definição de produto, coproduto, "internal-hom" e adjunção são demonstradas de forma similar usando as reduções operacionais e η do processo de normalização. De maneira análoga são provadas as reduções correspondentes às equações das definições de comônada monoidal e de estrutura de co-semigrupo comutativo $<!A, m>$ para às coálgebras livres sendo m um morfismo de coálgebras, no caso do modelo categórico pra $\mathrm{LLI}_!$.

A prova de que a categoria livre para as lógicas IES4, E^m e T está nas classes que definimos no capítulo 4 como modelo categórico para elas é direta. No caso da lógica R, estabelecemos no capítulo 3 como modelo categórico para ela uma categoria linear com diagonais e distributiva, i.e. com um isomorfismo natural $d_{A,B,C} : A \times (B \oplus C) \to (A \times B) \oplus (A \times C)$. Este modelo, que surgiu naturalmente desde o ponto de vista categórico, é válido para a lógica (i.e. que satisfazem a propriedade de "Soudness") mas ao fazer a construção livre como indicada acima (já que nesta lógica não é válido o Teorema de eliminação da regra do corte) ele não resulta completo. Isto se deve ao fato de que no cálculo não pode ser provado o seguinte sequente: $(A\&B) \oplus (A\&C) \Rightarrow A\&(B \oplus C)$. O modelo para R resulta completo se é definido como sendo uma categoria linear com diagonais e com distribuição fraca:

Definição 6.11 *Uma categoria* $\mathbf{C}$ *com produto e coproduto diz-se* distributiva fraca *se o produto quase se distribui sobre o coproduto, i.e. existe uma transformação natural* $d_{A,B,C} : A \times (B \oplus C) \to (A \times B) \oplus (A \times C)$.

Da mesma forma que no caso dos modelos algébricos, os modelos categóricos que definimos para as lógicas tratadas na tese foram classes de categorias do mesmo tipo da categoria livre obtida. Além disto, as categorias têm uma estrutura fácil de ser apresentada, que acompanha o processo construtivo das demonstrações, cada regra do cálculo foi modelada de forma independente das outras, geram um modelo algébrico e também as estruturas algébricas pertencentes à classe do modelo algébrico, vistas como categorias pequenas pertencem à classe do modelo categórico.

6.3 Conclusões

O objetivo deste capítulo foi apresentar definições tentativas para estabelecer de uma maneira formal e abstrata o que são modelos algébricos e categóricos para uma lógica.

Os dois tipos de modelos estudados consideram que os conectivos definem uma lógica. Isto é, deve-se modelar o comportamento que cada conectivo tem numa lógica e é esse comportamento quem vai diferenciar os conectivos e também as diferentes lógicas entre si. Na verdade, neste tipo de modelagem, em contraste com outros formalismos (como no caso dos modelos dos mundos de Kripke), deve-se apresentar um significado a cada conectivo considerando-os como funções (funtores no caso categórico), entre possíveis valores de fórmulas. Essas funções são apresentadas pelas propriedades que elas devem satisfazer de acordo ao comportamento dos conectivos da lógica que se está modelando.

Como já foi discutido em capítulos anteriores, mas vale a pena ressaltar aqui, a principal diferença entre os modelos algébricos e categóricos, além dos diferentes formalismos matemáticos utilizados, é a capacidade que cada um deles tem para modelar a teoria da prova de uma lógica. Os modelos categóricos resultam muito mais adequados e ricos para estudar o poder dedutivo de uma lógica.

Nesta etapa do trabalho centramos nosso interesse nas lógicas que têm características similares às lógicas analisadas ao longo da tese. Assim, as definições apresentadas são suficientemente gerais para cobrir os casos estudados nos capítulos anteriores. Como trabalhos futuros está previsto estender estas definições a casos mais gerais e entender melhor a relação que existe entre modelos categóricos e o Teorema de eliminação da regra do corte. Neste sentido, os cálculos das lógicas IES4, E^m e T, que não possuem a propriedade de eliminação do corte e, portanto podem resultar de menos interesse do ponto de vista dedutivo, foram introduzidos com o objetivo de apresentar seus modelos categóricos, para levantar questões referentes a modelos para lógicas sem eliminação do corte e como exemplos concretos para posterior análise.

Analisando os modelos categóricos que obtivemos para as lógicas IES4, E^m e T parece que podemos concluir que modelos categóricos para lógicas que não satisfazem o Teorema de eliminação da regra do corte não são tão interessantes, já que identificam morfismos que correspondem a derivações mas que a lógica não identifica, ou reduz. Isto é, ao passar ao modelo categórico é perdida certa informação sobre as derivações. Mas, modelos categóricos para cálculos sem eliminação da regra do corte poderiam ajudar a estabelecer cálculos, para a mesma lógica, que possuam a propriedade de eliminabilidade do corte, já que o modelo categórico para os dois cálculos deve resultar o mesmo.

Não parece muito difícil estender as noções de modelos apresentadas para lógicas de primeira ordem, i.e. lógicas com quantificadores definidos pelas seguintes regras do Cálculo de Sequentes:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall x\ A[y/x]} \qquad \frac{\Gamma, A[t/x], \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \forall x\ A, \Gamma' \Rightarrow C}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x\ A} \qquad \frac{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, \exists x\ A[y/x], \Gamma' \Rightarrow C}$$

Quantificadores podem ser modelados algébricamente através de álgebras cilíndricas [HMT71] ou de álgebras de relações binárias [VH91]; em [Yet90, Tro90] os quantificadores foram considerandos como supremos e ínfimos infinitos. Já, modelos categóricos para quantificadores foram tratados em [Sza78] como produtos e coprodutos infinitos e em [Gol84, See83] como funtores adjuntos (à direita e à esquerda respectivamente) de um funtor de substituição.

No que se refere a lógicas com um conectivo de negação clássica, i.e. satisfazendo $\neg\neg A \rightarrow A$ e $A \rightarrow \neg\neg A$ modelos algébricos são facilmente apresentados exigiendo uma operação de complemento no reticulado, como no caso das álgebras de Boole [Mir87, pag.19]. Nos modelos categóricos, para lógicas do tipo clássico, deve-se exigir que exista um isomorfismo natural $A \rightarrow [[A, \neg A], \neg A]$, sendo $\neg$ o funtor contravariante que interpreta o conectivo da negação. Se a lógica possui uma constante, $\perp$, que define a negação então o objeto da categoria para o qual existe um isomorfismo natural $A \rightarrow [[A, \perp], \perp]$ chama-se de *objeto dualizador* ([See89, Tro90]). Os modelos categóricos para a Lógica Clássica (vide Ap. A) resultam de pouco interesse, já que as únicas categorias que satisfazem a condição de ter esse isomorfismo natural são as proprias álgebras de Boole, vistas como categorias [LS86, pag.67]. Sendo que neste modelo as álgebras identificam todas as demonstrações do mesmo sequente, satisfazendo assim todas as equações possíveis entre morfismos com mesmo domínio e codomínio.

Pareceria que as extensões mais importantes que deveriam ser feitas às noções de modelos apresentadas deveriam ser para cobrir casos de lógicas onde não há um conectivo que internaliza no cálculo o efeito da vírgula que separa fórmulas nos antecedentes dos sequentes, i.e. usar por exemplo a noção de multicategorias. Também deveria se permitir que no lado direito dos sequentes possam aparecer várias fórmulas. Se no cálculo temos um conectivo que simula o efeito da operação que gera sucedentes complexos, estamos em um caso muito similar ao tratado nesta tese e não há muito a acrescentar, mas se não existir no cálculo esse tipo de conectivo então deveriamos pensar em trabalhar com algum tipo de estrutura bi-sortida para levar em conta os antecedentes e sucedentes dos sequentes.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta última década tem havido um crescente interesse pela formalização de aspectos computacionais usando como base a Teoria de Categorias. A lógica também tem sido amplamente usada para este fim. Ultimamente vem-se destacando o emprego de categorias para tratar lógicas, estudos estes que deram lugar a uma nova área de pesquisa, conhecida como Lógica Categórica, que nos permite relacionar os conceitos de categorias, lógicas e processos computacionais.

A análise categórica de lógicas encontrava-se restrita a casos particulares, como a análise da Lógica Intuicionista, da Lógica Clássica e da Lógica Linear na suas versões clássica e intuicionista; porém outros casos de interesse computacional careciam de tal estudo. Ademais os estudos existentes eram feitos de forma intuitiva, sem seguir uma regra geral, estudando-se apenas as peculiaridades de cada caso. A falta de uma definição formal de modelo categórico dificultava ainda mais a realização de novos estudos para outros tipos de lógicas. O mesmo acontecia na análise algébrica de lógicas, i.e. novos intentos de formalização algébrica de lógicas se deparavam com a ausência de uma definição formal de modelo algébrico e com a falta de regras gerais que ajudassem na construção de tal modelo.

Nesta tese foi apresentada uma definição formal e geral de modelo categórico e de modelo algébrico. Tais definições são especialmente adequadas para a análise de lógicas cujos sistemas dedutivos satisfazem certas condições. Estas condições, apesar de restritivas, são suficientemente gerais para contemplar muitas das lógicas de interesse computacional, como a Lógica Intuicionista, a Lógica Linear, lógicas relevantes, as lógicas modais tipo S4, a lógica Afim e a Lógica Clássica.

Ademais das definições foram apresentadas construções concretas de um modelo algébrico (álgebra de Lindenbaum) e de um modelo categórico (Categoria Livre) para todas as lógicas que cumprem as condições estabelecidas. Isto não somente garante a existência de pelo menos um modelo para cada tipo de lógica, mas também especifica a construção desse modelo.

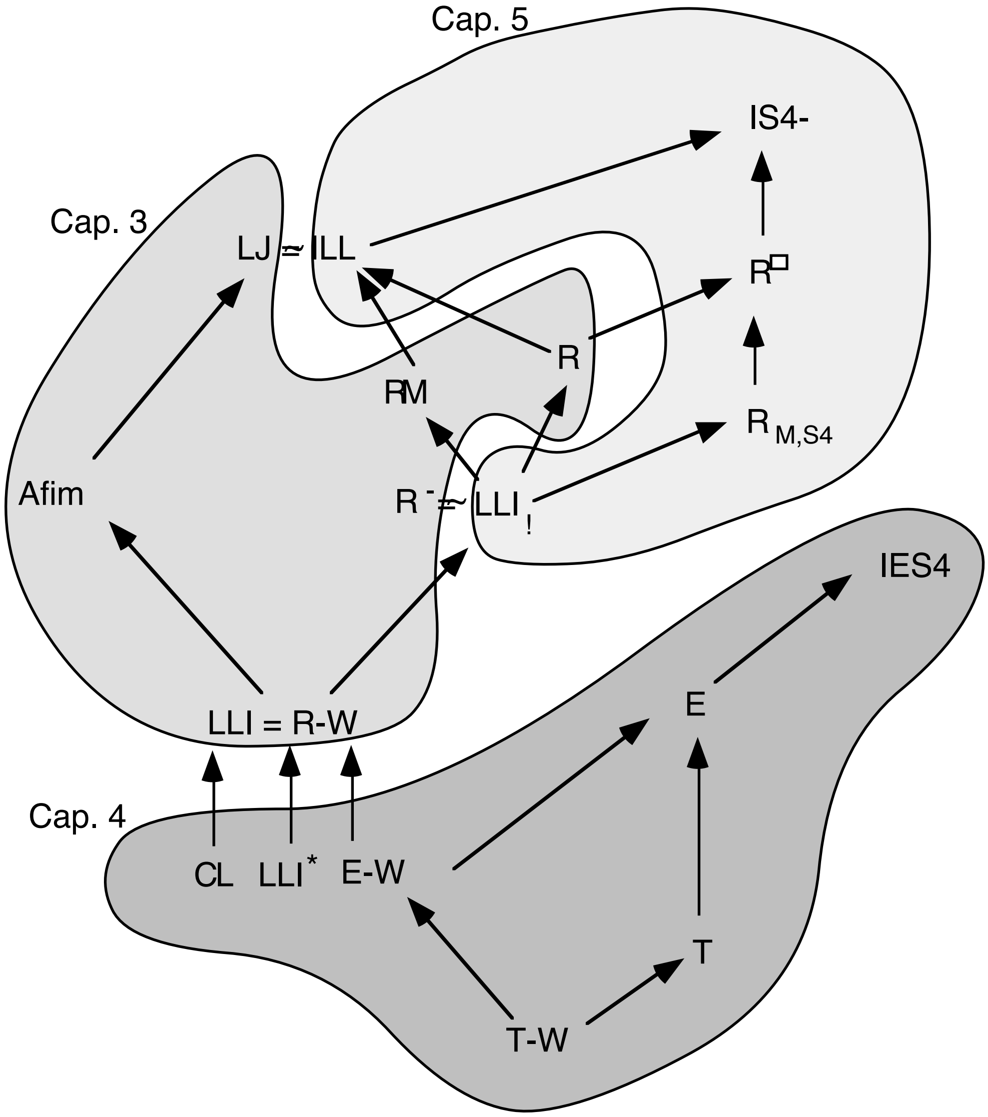
A introdução das condições da definição dos modelos foram necessárias para dar sentido ao modelo categórico e principalmente para garantir a sua existência. Estas condições devem ser estudadas com maior atenção em um trabalho imediato. O autor desta tese acredita que algumas das condições podem ser relaxadas ou até mesmo descartadas, enquanto que as restantes podem ser contempladas em uma definição futura mas ampla.

Para chegar às definições de modelos algébricos e categóricos foi feita primeiramente uma análise minuciosa de casos já existentes e casos que ainda não tinham sido analisados em parte ou bem na sua totalidade. Assim, com o intuito de providenciar um melhor e formal entendimento da família de lógicas em estudo, e as diferenças entre cada um de seus membros, foi apresentada, para cada lógica em questão, a teoria da prova e os modelos algébricos e categóricos.

A família de lógicas considerada abrange basicamente as lógicas relevantes, a Lógica Intuicionista, a Lógica Afim e as lógicas modais intuicionistas tipo S4. Esta família de lógicas foi escolhida principalmente pelo interesse que tem havido nestes últimos anos pelas lógicas chamadas subestruturais e pelas lógicas modais.

Uma das lógicas relevantes que teve destaque no começo da elaboração da tese foi a Lógica Linear Intuicionista. O desenvolvimento formal desta lógica resultou ser de muita utilidade, tanto no nível de teoria da prova quanto na análise de modelos, já que serviu como guia para obter resultados para outras lógicas relacionadas com ela. A Lógica Linear Intuicionista possui uma teoria da prova e modelos bem desenvolvidos. Resolvemos por esta razão toma-la como ponto central de partida e considerar as lógicas divididas em três grupos. Na realidade foi considerado o fragmento proposicional da lógica linear intuicionista como ponto de partida, já que somente interessava estudar, numa primeira etapa, o comportamento dos conectivos e não o comportamento dos quantificadores. Ademais a parte modal da lógica linear intuicionista foi tratada separadamente, já que o fragmento não modal dela constituía por si mesmo um excelente caso de estudo, por estar relacionado intimamente com as lógicas relevantes.

Os três grupos de lógicas foram constituídos considerando primeiramente uma divisão entre as lógicas que possuiam as propriedades associativas e comutativas e as que não as possuiam. Resolvemos então considerar uma outra subdivisão entre lógicas modais e não modais. Cada um destes grupos foi analisado em um capítulo diferente da tese; o gráfico seguinte ilustra a organização destes grupos:



A análise de cada um dos três capítulos foi realizada considerando primeiramente a parte sintática de cada lógica (teoria da prova) e a seguir a parte semântica das mesmas (modelos algébricos e categóricos). As conclusões sobre estes capítulos seguirão também a mesma forma de organização.

Conclusões sobre a análise sintática

Na fase de elaboração da teoria da prova, analisamos e apresentamos sistemas dedutivos como, o cálculo de sequentes, dedução natural e λ-cálculo. Além disto, examinamos algumas propriedades importantes para esta classe de sistemas, como o Teorema de Eliminação da regra do corte, o Teorema de Normalização e o Lema da Substituição, os quais forneceram informação importante sobre as características das derivações nos respectivos sistemas.

A análise da família de lógicas foi realizada de uma forma gradual, isto é, partiu-se de uma lógica específica (a Lógica Linear Intuicionista) e a cada passo foram-se acrescentando ou proibindo propriedades até alcançar as outras lógicas pretendidas. O mais importante deste procedimento é que a formalização sintática das lógicas refletiu exatamente este mesmo modo de trabalho. Isto é, a construção de cada formalismo foi feita de tal forma que para passar do formalismo de uma lógica ao mesmo tipo de formalismo da lógica seguinte bastou apenas acrescentar (ou retirar) a especificação da propriedade (ou conectivo) que foi introduzida (ou retirada). Esta metodologia de especificação em abstrações simplifica o entendimento da relação existente entre a família de lógicas, porém nem sempre foi uma tarefa simples de se fazer. Observe-se que neste trabalho foram apresentados apenas os resultados finais de cada sistema e não os passos que levaram a sua obtenção.

No capítulo 3 analisamos primeiramente o fragmento não-modal positivo e proposicional da Lógica Linear Intuicionista de Girard, chamado aqui LLI, lembrando formulações e resultados conhecidos mas também apresentando um Cálculo de Termos de elaboração própria. Nas seções seguintes, LLI foi estendida acrescentando a contração de fórmulas, para obter a lógica R^- e algumas outras lógicas relevantes muito próximas a ela, como RM e R. Entre estes casos destaca-se a análise realizada para R^-, onde para obter uma Dedução Natural e um Cálculo de Termos com a propriedade de substituição, a regra estrutural da contração precisou ser apresentada de uma maneira diferente. Isto originou novas reduções permutativas, que permitiram a demonstração do Teorema de normalização.

Também vimos como acrescentando a regra da atenuação a LLI, obtemos a lógica Afim e que a partir desta podemos obter a Lógica Intuicionista (acrescentando a regra da contração). Para chegar à Lógica Intuicionista desde LLI, a ordem dos passos é irrelevante, isto é podemos primeiramente acrescentar a LLI a regra da contração, obtendo R^- e logo depois acrescentar a regra da atenuação.

No capítulo 4 analisamos as lógicas que perdem as características de comutatividade e associatividade com respeito a LLI. Neste sentido, apresentamos uma versão não associativa para a Lógica Linear Intuicionista, LLI*. Esta lógica, de idealização própria, é interessante porque nela os contextos são árvores de fórmulas, i.e. denotam as estruturas mais simples e gerais possíveis. A partir de LLI*, lógicas relevantes como E-W, T-W e também a IES4 (a lógica intuicionista com uma implicação estrita tipo a S4) foram facilmente obtidas e analisadas. Estes sistemas não possuem a propriedade de eliminação da regra do corte (pelos procedimentos usuais de eliminação) e portanto não tiveram muito destaque neste trabalho. Um sistema diferente a estes é o Cálculo de Lambek; neste caso proíbe-se qualquer permutação, mas exige-se a existência de duas implicações, com o qual se re-introduz no cálculo, certa capacidade de demonstração.

No capítulo 5 estudamos algumas lógicas modais intuicionistas. Idealizamos o sistema LLI$_!$ que re-introduz em LLI a capacidade de contrair fórmulas através de uma modalidade, tipo à modalidade ! de Girard. O sistema LLI$_!$ resultou equivalente à lógica R^-, ganhando características de relevância que não se encontram no sistema ILL de Girard. Também analisamos outras lógicas modais relevantes achadas na literatura como a lógica modal intuicionista IS4$-$ de [BMdP92]. Ademais foi realizado um Cálculo de Termos que abrange todos os conectivos intuicionistas de IS4$-$, inclusive o absurdo intuicionista.

Um aspecto que merece destaque é que ao longo da tese estudamos lógicas relevantes, estritas, linear, intuicionista, isto é lógicas com conectivos bem diferentes (principalmente o da implicação). Porém em nossa análise as regras lógicas para cada conectivo são praticamente as mesmas em todos os cálculos. A diferença entre uma lógica e outra está centrada nas regras estruturais, que determinam a interpretação dos contextos e da operação que os gera (a vírgula). Dependendo das regras estruturais que a lógica possua, a vírgula entre fórmulas dos sequentes é uma operação que gera árvores, sequências, multisets ou conjuntos. Todos estes casos tem sido contemplados e analisados ao longo da tese.

Conclusões sobre a análise semântica

Para apresentar a semântica das lógicas tratadas utilizamos modelos algébricos e categóricos, já que estes tipos de modelos espelham a capacidade de derivabilidade da lógica. Existem outros tipos de semáticas para as lógicas relevantes, como a dos mundos de Kripke [Fuh90, AD91], mas elas não se ajustaram aos interesses da tese.

Da mesma forma que na análise sintática, a formalização semântica das lógicas ref l etiu o mesmo modo de análise gradual. Isto é, a construção de cada tipo de modelo foi feita de tal forma que para passar do modelo de uma lógica ao modelo da lógica seguinte bastou apenas acrescentar (ou retirar) a interpretação da propriedade (ou conectivo) que foi introduzida (ou retirada).

No capítulo 3 analisamos os modelos algébricos e categóricos para LLI e notamos que cada fragmento conservativo dela pode ser modelado independentemente. Cada conectivo pode ser modelado de forma separada, porém todos eles estão ligados com a interpretação da vírgula, já que em cada regra lógica existem contextos. Neste capítulo logramos associar as regras estruturais de contração e atenuação a seu modelo. A regra da contração pode ser modelada através de diagonais, tanto da operação monoidal quanto do funtor tensor, que modela o efeito da vírgula. A regra da atenuação pode ser modelada por projeções da operação monoidal e do funtor tensor. Neste capítulo apresentamos modelos categóricos de elaboração própria para várias lógicas que são extensões da lógica LLI, como RM, R e Afim.

No capítulo 4 associamos as regras estruturais de associatividade e de comutatividade com características similares para o funtor tensor e a operação monoidal. No caso dos modelos para o Cálculo de Lambek precisamos exigir que exista um funtor de “internal-hom” adjunto à direita e um “internal-hom” adjunto à esquerda para o funtor tensor. Isto se deve a que no sistema lógico existem dois tipos de implicações e falta a regra da comutatividade. Da mesma maneira, no modelo algébrico, precisa-se de pseudo-complementos à direita e à esquerda. Neste capítulo foram feitos modelos categóricos originais para as lógicas LLI*, IES4, E^m e T.

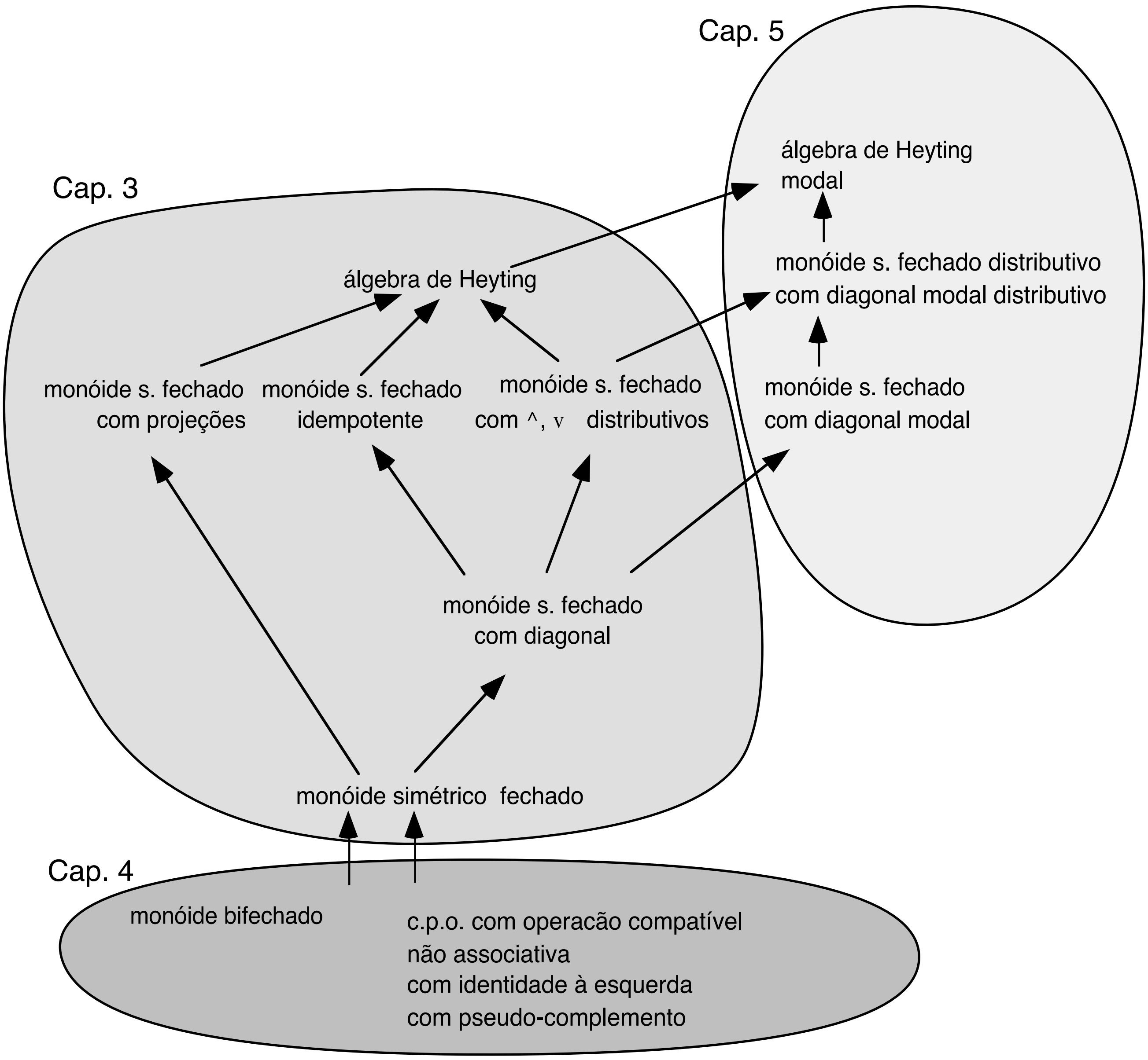
Já no capítulo 5 onde se estende LLI através de um conectivo modal que satisfaz as regras da modalidade ao estilo S4, precisamos enriquecer a estrutura existente nos modelos de LLI com uma nova operação ou funtor. O modelo categórico resultou muito interessante porque nele, por exemplo, pudo-se espelhar a relação de tradução existente entre as lógicas R$^-$ e LLI$_!$. Da mesma maneira que no modelo categórico de [BBdPH92] foi possível espelhar a relação entre LJ e ILL. Baseados na análise feita para o caso de ILL, apresentamos em [BMdP92] um modelo categórico para IS4$-$. Nesta tese, além dos modelos algébricos e categóricos para LLI$_!$, também foram elaborados e apresentados modelos categóricos para as lógicas relevantes modais $R_{M,S4}$ e $R^\Box$. Em particular, no Apêndice D, foi apresentado um modelo dialético para a lógica LLI$_!$.

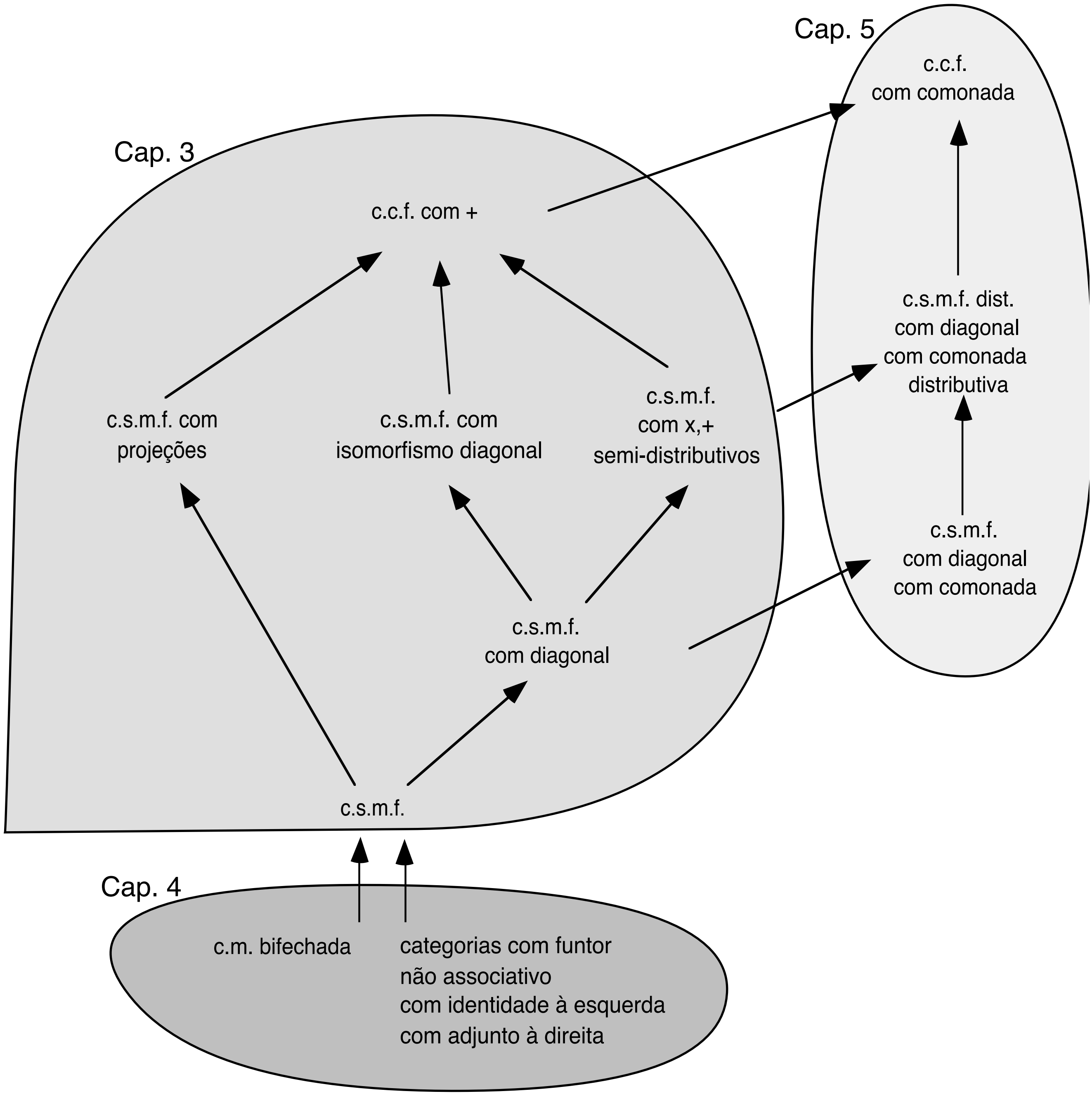
Em geral, no caso dos modelos categóricos, onde se deve refletir a estrutura da prova, se a mudança feita no comportamento de um conectivo não envolve às reduções das derivações, então precisa-se modificar só o comportamento do funtor correspondente, isto é das transformações naturais que acompanham a esse funtor. Isto foi feito, por exemplo, no caso da lógica R, onde produtos distribuem sobre coprodutos, e no caso da lógica RM. Se, por outro lado, ao se modificar o comportamento do conectivo geram-se novas reduções ou eliminam-se algumas já existentes, então além de mudar a interpretação, isto é as transformações naturais, deve-se também acrescentar ou eliminar certos diagramas comutativos. Por exemplo, no caso de lógica R^{-}, a regra da contração gerou novas reduções e obrigou à introdução de novos diagramas comutativos que envolveram às diagonais.

Outro aspecto analisado refere-se à capacidade que têm os modelos categóricos de refletir aspectos da teoria da prova da lógica em estudo. Isto acontece, em primeiro lugar, porque cada demonstração no sistema lógico se "codifica" num morfismo da categoria. Além disto, os processos de reduções de derivações podem ser espelhados na estrutura que as categorias possuem, já que as reduções entre derivações se correspondem com diagramas comutativos nas categorias.

Os modelos algébricos, como foi mostrado, correspondem a noções matemáticas mais simples, mas não dão nenhuma informação sobre o comportamento das derivações. Com eles é possível verificar se um sequente é demonstrável ou não, mas não são adequados para modelar a estrutura das derivações ou a relação entre elas. Por outro lado, nos casos analisados os modelos algébricos podem ser obtidos a partir dos modelos categóricos, particularizando uma categoria a um conjunto parcialmente ordenado.

Os gráficos seguintes ilustram a organização dos modelos algébricos e categóricos das lógicas estudadas:


Cap. 5
álgebra de Heyting modal
monóide s. fechado distributivo com diagonal modal distributivo
monóide s. fechado com diagonal modal
Cap. 3
álgebra de Heyting
monóide s. fechado com projeções
monóide s. fechado idempotente
monóide s. fechado com ^, v distributivos
monóide s. fechado com diagonal
monóide simétrico fechado
Cap. 4
monóide bifechado
c.p.o. com operacão compatível não associativa com identidade à esquerda com pseudo-complemento



Conclusões finais

Uma vez apresentada a teoria da prova e os modelos algébricos e categóricos de todas as lógica em questão, apresentamos, no capítulo 6, uma definição formal e geral de modelo categórico e modelo algébrico.

A análise particular dos casos estudados nos outros capítulos serviu como guia fundamental para estabelecer uma definição formal e abstrata de modelo algébrico e categórico, já que foram tratados vários casos com características diferentes. Estas definições, de inteira elaboração própria, são suficientemente gerais para cobrir uma família ampla e interessante de lógicas, sendo um objetivo de trabalho futuro ampliar estas definições para tratar de casos mais gerais.

Modelos algébricos foram definidos como classes de estruturas algébricas, i.e. conjuntos com operações atuando neles junto com uma relação de ordem que espelha a relação de derivabilidade da lógica. Também mostramos como obter um modelo algébrico dado pelo próprio cálculo, chamado álgebra de Lindenbaum.

A definição dos modelos categóricos, por outro lado, espelha o processo completo de dedução através de morfismos nas categorias. Demonstrações de sequentes correspondem exatamente a morfismos entre a interpretação do antecedente e do sucedente do sequente demonstrável, sendo que demonstrações que se reduzem correspondem ao mesmo morfismo. Na verdade, as ferramentas da Teoria de Categorias resultam o suficientemente poderosas para tratar de forma uniforme o processo completo de dedução em lógica.

As definições apresentadas mostram que os dois géneros de modelos não estão isolados. Pelo contrario, resulta evidente como um modelo categórico é uma generalização do modelo algébrico ao considerar como diferentes cada demonstração de um mesmo sequente. Tendo em vista esta generalização, obtivemos um modelo algébrico gerado pelo modelo categórico e também vimos que o modelo algébrico que apresentamos para cada uma das lógicas estudadas está contido no modelo categórico correspondente. Também mostramos como obter um modelo categórico dado pelo próprio cálculo, chamado a categoria livre.

Por último, podemos dizer que os objetivos propostos para a realização do trabalho foram amplamente atingidos já que realizamos uma análise sistemática tanto da teoria da prova como dos modelos algébricos e categóricos para a família das lógicas relevantes (entre outras lógicas aqui estudadas), contribuindo desta maneira não só para um melhor entendimento de estas lógicas, mas também para o enriquecimento da Lógica Categórica em geral.

Acreditamos que o aporte original desta tese centra-se basicamente em dois aspectos. Um deles refere-se ao tratamento sistemático das lógicas, dando-se um grande valor às regras estruturais que a lógica possua. O outro aspecto refere-se ao fato de ter providenciado definições de modelos algébricos e categóricos. Estas definições são o primeiro passo no sentido de sentar bases do que poderíamos chamar de uma teoria de modelos categóricos e algébricos. Com noções gerais e uma análise mais ampla da relação lógica-categoria espera-se estabelecer uma metodologia de trabalho em Lógica Categórica. Neste sentido, esta tese poderá servir como base de referência para a realização de trabalhos futuros dentro da área de teoria da computação. Principalmente para tratar diferentes processos computacionais usando as ferramentas que oferece a Lógica Categórica, isto é a Teoria da Prova, a Teoria de Categorias e o vínculo existente entre elas.

7.1 Trabalhos Futuros

Finalmente é necessário apontar a possibilidade de desenvolvimento de trabalhos futuros diretamente relacionados com o assunto da tese de doutorado. A conexão entre lógica linear e teorias de concorrência ainda não está suficientemente explicada. Um artigo de C. Brown e D. Gurr utiliza modelos dialéticos de Lógica Linear para modelar Redes de Petri ([BG90]) e um subsequente (e melhorado) artigo de V. de Paiva estende essa ideia às redes de Petri com multiplicidade maior do que um ([dP91a]). Por outro lado, M. Dam propôs como base ideal para o desenvolvimento da teoria de álgebras de processos em geral, e SCCS em particular, a uma das lógicas relevantes ([Dam92, Dam88]). Em [Ben89] são estudados processos concorrentes e distribuídos através de categorias monoidais com comonóides e monóides.

Outra direção que gostaríamos de explorar é a utilização de lógicas relevantes em Programação Funcional. Num trabalho muito recente [BF92], é estudado que o conceito de "ser estrito" (strictness) num λ-cálculo tipado, está relacionado com a implicação relevante. Nas palavras do autor do citado artigo "relevant types are strictness types". Porém, ao se tentar introduzir um operador de recursão em uma linguagem funcional, ocorrem alguns problemas que ainda não foram solucionados. A Teoria de Categorias parece ser uma ferramenta essencial para modelar operadores deste tipo.

Durante a execução do trabalho de tese ficou evidente a necessidade de formular diferentes apresentações para uma mesma lógica (sistema axiomático, Cálculo de Sequentes e Dedução Natural), isto é, tendo uma apresentação para uma lógica era preciso desenvolver outros tipos de formalismos. Esta etapa resultou ser complexa, além de consumir tempo posterior para verificar a equivalência (num certo sentido estabelecido) entre as diferentes versões. Propõe-se então o desenvolvimento de um sistema para fornecer suporte de máquina à passagem de uma formulação para outra equivalente. Isto envolveria primeiro um trabalho teórico, na área de lógica, como por exemplo analisar quais são as condições mínimas que uma relação de consequência lógica deveria satisfazer.

A importância do Teorema da Modularização para desenvolvimento de especificações lógicas bem como sua relação com o Lema de Interpolação de Craig já são bem conhecidas. Contudo, a nova demonstração, mais simples e direta, do Teorema da Modularização por Paulo A. Veloso sugere algumas conexões, a serem investigadas, entre propriedades da relação de consequência.

Por outro lado, a ideia de introdução de novos sortes, importante para implementação, sugere versões mais gerais de eliminabilidade e do Teorema de Beth (de definibilidade) que merece exame mais aprofundado.

Em síntese, as quatro vertentes que devem nortear a futura pesquisa são:

1. conexões entre lógica linear e teorias de concorrência;

2. utilização de lógicas relevantes em programação funcional;

3. propriedades, lógicas e categóricas, fundamentais da relação de consequência;

4. ambiente para manipulação de formulações de lógicas.

Estas vertentes, além de seu interesse intrínseco, visam fornecer subsídios para um entendimento mais completo e aprofundado das interrelações entre lógica, categorias e computação.

Referências

[HMT71] L. Henkin, J.D. Monk and A. Tarski. *Cylindric Algebras Part 1.* North Holland, Amsterdam, 1971.

[VH91] P.A.S. Veloso and A.M. Haeberer. A Finitary Relational Algebra for Classical First Order Logic. 9th. International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science at Uppsala, 1991.

[AB75] A.R. Anderson and N.D. Belnap. *Entailment, The Logic of Relevance and Necessity.* Princeton University Press, Princeton, 1975.

[Gol84] R. Goldblatt. *Topoi: the categorical analysis of logic.* 1984.

[Mir87] F. Miraglia. *Cálculo Proposicional: uma interação da álgebra e a lógica.* Coleção CLE, Campinas, 1987.

[Abr90] S. Abramsky. Computational interpretations of Linear Logic. Technical report, Imperial College, 1990.

[AD91] G. Allwein and J.M Dunn. Kripke models for Linear Logic. Technical report, Indiana University, 1991.

[Age91] P. Ageron. *Structure des Logiques et Logique des Structures. Logiques, Categories, Esquisses.* PhD thesis, Universite Paris VII, 1991.

[Goa80] C.A. Goad. *Computational uses of the manipulation of formal proofs.* PhD thesis, Stanford University, 1980.

[AH93] E.S. Almeida and E.H. Hausler. A λ-calculus for the Lambek Calculus. *Anáis do X Encontro Brasileiro de Lógica*, 1993.

[Amb91] S.J. Ambler. *First Order Linear Logic in Symmetric Monoidal Closed Categories.* PhD thesis, University of Edinburgh, 1991.

[AB75] A.R. Anderson and N.D. Belnap. *Entailment, The Logic of Relevance and Necessity.* Princeton University Press, Princeton, 1975.

[AM75] M.A. Arbib and E.G. Manes. *Arrows, Structures and Functors. The categorical Imperative.* Academic Press, new York,1975.

[Aqv64] L. Aqvist. Results concerning some modal systems that contain S2. *The Journal of Symbolic Logic*, 29(2):79–87, 1964.

[See83] R. Seely. Hyperdoctrines, Natural Deduction and the Beck condition. *Zeitsch. f. Math.Logik und Grundlagen d. Math.*, 29:505–542, 1983.

[Asp90] A. Asperti. *Categorical Topics in Computer Science*. PhD thesis, Universita di Pisa, 1990.

[Avr87] A. Avron. A constructive analysis of RM. *The Journal of Symbolic Logic*, 52(4):939–951, 1987.

[Avr88] A. Avron. The semantics and proof theory of Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 57:161–183, 1988.

[Bar79] M. Barr. **-Autonomous Categories*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1979.

[Bar85] H.P. Barendregt. *The Lambda Calculus, its Syntax and Semantics*, volume 103 of *Studies in Logic*. North-Holland, 1985.

[BBdPH92] N. Benton, G. Bierman, V.C.V de Paiva, and M. Hyland. Term assignment for Intuitionistic Linear Logic (preliminary report). University of Cambridge,U.K., August 1992.

[Ben87] D.B. Benson. The shuffle bialgebra. *Lecture Notes in Computer Science*, (298):616–637, 1987.

[Ben89] D.B. Benson. Bialgebras: some foundations for distributed and concurrent computation. *Fundamenta Informaticae*, 12(4):427–486, 1989.

[BF92] C.A. Baker-Finch. Relevance and contraction: a logical basis for stricness and sharing analysis. 1992.

[BG90] C. Brown and D. Gurr. A categorical linear framework for Petri Nets. *Proc. do encontro LICS*, 1990.

[BJGD80] N.D. Belnap Jr., A. Guta, and J.M. Dunn. A consecutive calculus for positive relevant implication with necessity. *Journal of Philosophical Logic*, (9):343–362, 1980.

[Bla90] Blass. Game semantics for Affine Logic. Marseille, 1990.

[BMdP92] G. Bierman, M.C. Meré, and V.C.V. de Paiva. Intuitionistic necessity revisited. In *APAL*, Amsterdam, Decembre 1992.

[Bri88] C. Brink. Multisets and the algebra of relevance logic. *The Journal of non-classical logic*, 5(1):75–95, 1988. ed. by Center for Logic, Epistemology and History of Science of UNICAMP, Brazil.

[BS91] R. Blute and R.A.G. Seely. The logic of weakly distributive categories I: two sided proof nets with units. Technical report, McGill University, 1991.

[Bus86] W. Buszkowski. Completeness results for lambek syntactic calculus. *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.*, (32):13–28, 1986.

[Cel81] C. Cellucci. Teoria della dimonstrazione. Ed. Bongheri, 1981.

[Coc89] J.R.B. Cockett. Distributive logic. CS 89-01, University of Tennessee, 1989.

[CS91] J.R.B. Cockett and R.A.G. Seely. Weakly distributive categories. In *Proc. of the Symposium of categories in C.S.* London Mathematical Society, 1991.

[Dam88] M. Dam. Relevance logic and concurrent composition. In *Proc. Third Annual Symposium on Logic in Computer Science*, pages 178–185, Edimburgh, 1988. IEEE.

[Dam92] M. Dam. Process-algebraic interpretations of positive Linear and Relevant logics. 1992.

[DCGV92] M. Dezani-Ciancaglini, S. Ghilezan, and B. Venneri. The relevance of intersection and union types. 1992.

[Dos81] K. Dosen. A reduction of classical propositional logic to the conjunction-negation fragment of an intuitionistic relevant logic. *Journal of Philosophical Logic*, 10:399–408, 1981.

[dP88] V.C.V. de Paiva. *The Dialectica Categories.* PhD thesis, University of Cambridge, 1988.

[dP91a] V.C.V. de Paiva. Categorical multirelations, Linear Logic and Petri Nets. Technical Report 225, University of Cambridge, Computer Laboratory, June 1991.

[dP91b] V.C.V. de Paiva. A dialectica model of the Lambek Calculus. University of Cambridge, 1991.

[Dum75] M. Dummet. Intuitionistic mathematic and logic. part II. Technical report, Mathematical Institute, Oxford, 1975.

[Dun86] J.M. Dunn. Relevance logic and entailment. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume III, chapter 3. Reidel Publishing Company, 1986.

[EK66] S. Eilenberg and G. M. Kelly. Closed categories. In S. Eilenberg et al., editor, *Proc. of the conference on categorical algebra*, pages 421–562. La Jolla 1965, Springer Verlag, 1966.

[EM85] H. Ehrig and B. Mahr. *Fundamentals of Algebraic Specifications 1: equations and initial semantics.* Springer Verlag,1985.

[Eri82] H.D. Erich. On the theory of specification, implementation and parametrization of abstract data types. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 29(1):206–227, January 1982.

[Fit75] M.C. Fitting. *Intuitionistic logic. Model theory and forcing.* Studies in Logic. North-Holland, Amsterdam, 1975.

[FM92] J.L. Fiadeiro and T. Maibaum. Localising consequence in (π)-institutions. Imperial College, U.K., 1992.

[Fox76] T. Fox. Coalgebras and cartesian categories. *Communications in algebra*, 4(7):665–667, 1976.

[Fuh90] A. Fuhrmann. Models for relevant modal logics. *Studia Logica*, XLIL(4):501–514, 1990.

[Gir87] J.Y. Girard. Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1987.

[Gir89] J.Y. Girard. *Proofs and Types.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[GL87] J.Y. Girard and Y. Lafont. Linear Logic and lazy computation. In *LNCS 250*, pages 52–66. Tapsoft 87, Springer-Verlag, 1987.

[Hac63] I. Hacking. What is stric implication? *The Journal of Symbolic Logic*, 28(1):51–71, 1963.

[HC84] G.E. Hughes and M.J. Cresswell. *A companion to Modal Logic.* Methuen, 1984.

[HdP91] M. Hyland and V.C.V. de Paiva. Lineales. *O que nos faz pensar*, (4):105–123, April 1991. Cadernos do Depto. de Filosofia da PUC/Rio.

[HdP92] M. Hyland and V.C.V. de Paiva. Full intuitionistic Linear Logic (the calculations). University of Cambridge, 1992.

[How80] W.A. Howard. *the formulae-as-types notion of construction*, pages 479–490. To H.B, Curry: essays on combinatory logic, lambda-calculus and formalism. Academic Press, 1980.

[HPdP92] E.H. Hausler, L.C. Pereira, and V.C.V. de Paiva. A λ-calculus for the Linear Logic. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1992.

[HS73] H. Herrlich and G.E. Strecker. *Category Theory. An Introduction.* Allyn and Bacon Inc., Boston, 1973.

[HS80] J.R. Hindley and J.P. Seldin, editors. *To H.B, Curry: essays on combinatory logic, lambda-calculus and formalism.* Academic Press, 1980.

[Jac91] B. Jacobs. Semantics of λ-I and other substructural λ-calculus. *LNCS*, 664, 1991.

[Jac92] B. Jacobs. Semantics of weakening and contraction. University of Cambridge, May 1992.

[Kri59] S.A. Kripke. The problem of entailment (abstract). *Journal of Symbolic Logic*, (24):324, 1959.

[Lam58] J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *American Math. montly*, (65):154–170, 1958.

[Lam61] J. Lambek. On the calculus of syntactic types. In *Proc. Symposia Appl. Math.*, number 12, pages 166–178. American Math. Soc., 1961.

[Lam68] J. Lambek. Deductive systems and categories I. *Mathematical Systems Theory*, 2(4):287–318, 1968.

[Lam89] J. Lambek. Multicategories revisited. *Contemporary Mathematics*, 92:217–239, 1989.

[Lew32] C.I. Lewis. *Symbolic Logic*. Century Company, New York, 1932.

[LS86] J. Lambek and P.J. Scott. *Introduction to Higher Order Categorical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Man75] C.R. Mann. The connection between equivalence of proofs and cartesian closed categories. *Proc. London Math.Soc.*, 31(3):289–310, 1975.

[Mey70] R.K. Meyer. E and S4. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, (2):181–199, 1970.

[ML71] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971.

[Mer90] M.C. Meré. Model of ptyxes for sum and empty types. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Monografias em Ciência da Computação No. 11/90, 1990.

[MR72] R. Meyer and R. Routley. Algebraic analysis of entailment I. *Logique et Analyse*, 15:407–428, 1972.

[OK85] H. Ono and Y. Komori. Logics without the contraction rule. *The Journal of Symbolic Logic*, 50(1):169–201, 1985.

[Per82] L.C. Pereira. *On the estimation of the length of normal derivations*. PhD thesis, Akademi litteratum, Stockholm, 1982.

[PM68] D. Prawitz and P.E. Malmnas. *A survey of some connections between classical,intuitionistic and minimal logic*, pages 215–229. Contributions to Mathematical Logic. North-Holland, 1968.

[Pot] G. Pottinger. Normalization as a homomorphic image of cut-elimination. Technical report.

[Pra65] D. Prawitz. *Natural Deduction, A Proof-Theoretical Study.* Almqvisty & Wiksell, Stockholm, 1965.

[Pra71] D. Prawitz. Ideas and results in proof theory. *Proceedings of the second Scandinavian Logic Symposium*, 1971.

[Rea88] S. Read. *Relevant Logic: A Philosophical Examination of Inference.* Basil Blackwell, New York, 1988.

[Sch90] H. Schellinx. Some syntactical observations on Linear Logic. Technical report, University of Amsterdam, 1990.

[See89] R.A.G. Seely. Linear logic, *-autonomous categories and cofree coalgebras. *Contemporary Mathematics, AMS*, 92:371–381, 1989.

[Sla84] J.K. Slaney. A metacompleteness theorem for contraction-free relevant logics. *Studia Logica*, 43(1):159–168, 1984.

[Sza69] M.E. Szabo, editor. *The Collected papers of the Gerhard Gentzen.* Studies in Logic. North-Holland, Amsterdam, 1969.

[Sza74] M.E. Szabo. A categorical equivalence of proofs. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15(2):177–191, 1974.

[Sza78] M.E. Szabo. *Algebra of Proofs*, volume 88 of *Studies in Logic.* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[Tak75] G. Takeuti. *Proof Theory*, volume 81 of *Studies in Logic.* North-Holland, Amsterdam, 1975.

[Tam71] S. Tamura. The implicational fragment of R-Mingle. *Proceedings of the Japan Academy*, (47):71–75, 1971.

[Tro90] A.S. Troelstra. Lectures on Linear Logic. *CSLI*, 29, 1990.

[UG90] L. Úry and T. Gergely. A constructive specification theory. In *Elsevier Science Publishers B.V.* IFIP 90, 1990.

[Urq84] A. Urquhart. The undecidability of entailment and relevant implication. *The Journal of Symbolic Logic*, 49(4):1059–1073, 1984.

[Wad91] P. Wadler. There's no substitute for Linear Logic. University of Wasglow, 1991.

[Yet90] N.D. Yetter. Quantales and (non-commutative) Linear Logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 55(1):41–64, 1990.

[Zuc74] J. Zucker. The correspondence between cut-elimination and normalization. *Annals of Mathematical Logic*, 7:1–112, 1974.

A APÊNDICE

LJ : Cálculo de Sequentes da Lógica Intuicionista proposicional

Regras Estruturais:

$$(Identidade)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (Absurdo)\frac{}{\Gamma, \perp \Rightarrow A}$$

$$(P)\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \ \Rightarrow \ C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \ \Rightarrow \ C} \qquad (Corte)\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A \qquad \Sigma, A, \Delta \ \Rightarrow \ B}{\Sigma, \Gamma, \Delta \ \Rightarrow \ B}$$

$$(A)\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, B \Rightarrow A} \qquad (C)\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \Rightarrow B}$$

Regras Lógicas:

$$\rightarrow_e \frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A \quad \Delta, B, \Sigma \ \Rightarrow \ C}{\Delta, A \rightarrow B, \Gamma, \Sigma \ \Rightarrow C} \qquad \rightarrow_d \frac{\Gamma, A \ \Rightarrow B}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \rightarrow B}$$

$$\wedge_e\frac{\Gamma, A \ \Rightarrow \ C}{\Gamma, A \wedge B \ \Rightarrow C} \qquad \frac{\Gamma, B \ \Rightarrow \ C}{\Gamma, A \wedge B \ \Rightarrow C} \qquad \wedge_d\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A \quad \Gamma \ \Rightarrow \ B}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \wedge B}$$

$$\vee_e\frac{\Gamma, A \ \Rightarrow C \quad \Gamma, B \ \Rightarrow \ C}{\Gamma, A \vee B \ \Rightarrow \ C} \qquad \vee_d\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \ \Rightarrow \ B}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \vee B}$$

Letras maiúsculas gregas são usadas para denotar sequências de fórmulas e letras maiúsculas latinas para denotar fórmulas. Define-se $\neg A$ como $A \rightarrow \perp$. Note que a constante $\perp$ se comporta como falsidade lógica (elemento neutro para $\vee$).

LK: Cálculo de Sequentes da Lógica Clássica proposicional

Regras Estruturais:

$$(Ident)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (Abs)\frac{}{\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta} \qquad (Corte)\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ \Delta, A \qquad \Sigma, A \ \Rightarrow \ \Phi}{\Sigma, \Gamma \ \Rightarrow \ \Delta, \Phi}$$

$$(P_e)\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \ \Rightarrow \ \Delta} \qquad (P_d)\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ \Delta, A, B\Delta'}{\Gamma \ \Rightarrow \ \Delta, B, A, \Delta'}$$

$$(A_e)\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta} \qquad (A_d)\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(C_e)\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad (C_d)\frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

Regras Lógicas:

$$\rightarrow_e \frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A, \Delta \quad \Gamma, B \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B, \ \Rightarrow \Delta} \qquad \rightarrow_d \frac{\Gamma, A \ \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \rightarrow B, \Delta}$$

$$\wedge_e\frac{\Gamma, A \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, A \wedge B \ \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, B \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, A \wedge B \ \Rightarrow \Delta} \qquad \wedge_d\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A, \Delta \quad \Gamma \ \Rightarrow \ B, \Delta}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \wedge B, \Delta}$$

$$\vee_e\frac{\Gamma, A \ \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \ \Rightarrow \ \Delta}{\Gamma, A \vee B \ \Rightarrow \ \Delta} \qquad \vee_d\frac{\Gamma \ \Rightarrow \ A, \Delta}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \vee B, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \ \Rightarrow \ B, \Delta}{\Gamma \ \Rightarrow \ A \vee B, \Delta}$$

Letras maiúsculas gregas são usadas para denotar sequências de fórmulas e letras maiúsculas latinas para denotar fórmulas. Define-se $\neg A$ como $A \rightarrow \perp$. Note que a constante $\perp$ se comporta como falsidade lógica (elemento neutro para $\vee$).

ILL: Cálculo de Sequentes da Lógica Linear Intuicionista

Regras Estruturais:

$$(Identidade)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (P)\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow C}$$

$$(Corte)\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Sigma, A, \Delta \Rightarrow B}{\Sigma, \Gamma, \Delta \Rightarrow B}$$

Regras Lógicas:

$$I_e\frac{\Gamma \Rightarrow A}{I, \Gamma \Rightarrow A} \qquad I_d\frac{}{\Rightarrow I}$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow 1} \qquad \frac{}{\Gamma, 0 \Rightarrow A} \qquad \frac{}{\bot \Rightarrow}$$

$$\multimap_e \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta, B, \Sigma \Rightarrow C}{\Delta, A \multimap B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C} \qquad \multimap_d \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B}$$

$$\otimes_e\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \Rightarrow C} \qquad \otimes_d\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B}$$

$$\&_e\frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, A\&B \Rightarrow C} \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A\&B \Rightarrow C} \qquad \&_d\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\&B}$$

$$\oplus_e\frac{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \oplus B \Rightarrow C} \qquad \oplus_d\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma, !A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow B}{\Gamma, !A \Rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma, !A \Rightarrow B} \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A}{!\Gamma \Rightarrow !A}$$

Letras maiúsculas gregas são usadas para denotar sequências de fórmulas e letras maiúsculas latinas para denotar fórmulas. $!\Gamma$ significa que cada uma das fórmulas que aparecem em Γ tem ! como conectivo principal. Define-se $\neg A$ como $A \multimap \bot$.

CLL: Cálculo de Sequentes da Lógica Linear Clássica

Regras Estruturais:

$$(Identidade)\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad (P_e)\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta} \qquad (P_d)\frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B, A, \Delta}$$

$$(Corte)\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Sigma, A \Rightarrow \Delta'}{\Sigma, \Gamma \Rightarrow \Delta', \Delta}$$

Regras Lógicas:

$$I_e\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{I, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad I_d\frac{}{\Rightarrow I}$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow 1, \Delta} \qquad \frac{}{\Gamma, 0 \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{}{\bot \Rightarrow} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \bot, \Delta}$$

$$\multimap_e \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Sigma \Rightarrow \Delta'}{A \multimap B, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta', \Delta} \qquad \multimap_d \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta}$$

$$\otimes_e\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \Rightarrow \Delta} \qquad \otimes_d\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Sigma \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \otimes B, \Delta, \Delta'}$$

$$\Box_d\frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \Box B, \Delta} \qquad \Box_e\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Sigma \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Sigma, A \Box B \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

$$\&_e\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \& B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \& B \Rightarrow \Delta} \qquad \&_d\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \& B, \Delta}$$

$$\oplus_e\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus B \Rightarrow \Delta} \qquad \oplus_d\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !A, ?\Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta} \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma, ?A \Rightarrow, ?\Delta}$$

Letras maiúsculas gregas são usadas para denotar sequências de fórmulas e letras maiúsculas latinas para denotar fórmulas. $!\Gamma$ significa que cada uma das fórmulas que aparecem em Γ tem $!$ como conectivo principal. Da mesma maneira, $?\Gamma$ significa que cada uma das fórmulas que aparecem em Γ tem $?$ como conectivo principal. Define-se $\neg A$ como $A \multimap \bot$. Note que $\bot$ é a identidade de $\Box$.

B APÊNDICE

Provas dos Enunciados do Capítulo 3

Teorema B.1 *Cada sequente no sistema de Sequentes para R^- pode ser derivado por meio de uma demonstração sem a regra do corte.*

A prova deste teorema é feita por indução, tanto na complexidade da fórmula cortada, quanto no comprimento da derivação. A idéia é eliminar aplicações da regra do corte, substituíndo cada aplicação por outra aplicação do corte, mas numa fórmula mais simples ou numa derivão de menor comprimento. A base da indução é quando um dos sequentes superiores é um axioma. Neste caso o corte desaparece diretamente, ou em alguns casos, não é mais possível aplicar reduzões, assim dando término ao processo.

A prova para o caso R^- usa, no lugar da regra do corte comum, a regra chamada de corte indexado, que permite cortar uma ou mais ocorrências da mesma fórmula. Por exemplo, para cortar as duas ocorrências da fórmula A que aparecem nas posições $n+1$ e $n+m+2$ respectivamente, a regra do corte indexado é:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_n, A, \Sigma_m, A, \Phi \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta, \Sigma, \Phi \Rightarrow B} \; C_{n+1,n+m+2}$$

Neste sistema a regra do corte indexado é equivalente à regra do corte comum:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_n, A, \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta, \Sigma} \; C_{n+1}}{\Delta, \Gamma, \Sigma}$$

Desta forma, com a regra do corte indexado obtivemos a regra do corte comum, sendo que no último passo, na realidade, foram feitas várias aplicações da regra de permutação. Por outro lado,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta_n, A, \Sigma_m, A, \Phi \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma, \Delta_n, \Sigma_m, A, \Phi \Rightarrow C}}{\Gamma, \Gamma, \Delta_n, \Sigma_m, \Phi \Rightarrow C}}{\Gamma, \Delta, \Sigma, \Phi \Rightarrow C}$$

Desta forma, com várias aplicações da regra do corte é possível obter o efeito da regra do corte indexado, usando as regras de contração e permutação, válidas no sistema R^-.

A regra do corte indexado é usada no processo de eliminação da regra do corte para tomar conta dos casos onde temos, como sequentes superiores de uma aplicação da regra do corte, uma regra de introdução à direita, como sequente esquerdo, e, como sequente direito, a regra da contração aplicada à fórmula introduzida no sequente esquerdo. Mais especificamente, a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B} \qquad \dfrac{\Phi, A \otimes B, A \otimes B, \Sigma \Rightarrow C}{\Phi, A \otimes B, \Sigma \Rightarrow C}}{\Phi, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C}$$

reduz-se, a:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \otimes B}}{\Phi_n, A \otimes B, A \otimes B, \Sigma \Rightarrow C}}{\Phi, \Gamma, \Sigma \Rightarrow C}\ C_{n+1,n+2}$$

onde o corte indexado foi aplicado numa derivação de menor comprimento. Todas as derivações em que temos uma regra de introdução à direita e uma contração na fórmula introduzida, seguidas de um corte, se reduzem desta forma. Os outros casos são todos tratados da forma usual, mas em certos casos, quando temos como sequentes superiores do corte uma regra de introdução à direita (como sequente esquerdo) e uma regra de introdução à esquerda (como sequente direito), é necessário aplicar as regras de contração e permutação para obter a redução. Por exemplo, a derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B} \qquad \dfrac{A, \Delta \Rightarrow C}{A \& B, \Delta \Rightarrow C}}{\Gamma, \Delta^* \Rightarrow C}\ C_{1,i,j}$$

onde Δ^* contém as mesmas fórmulas que Δ, fora as ocorrências nas posições i, j da fórmula A que foram curtadas. Esta derivação reduz-se a:

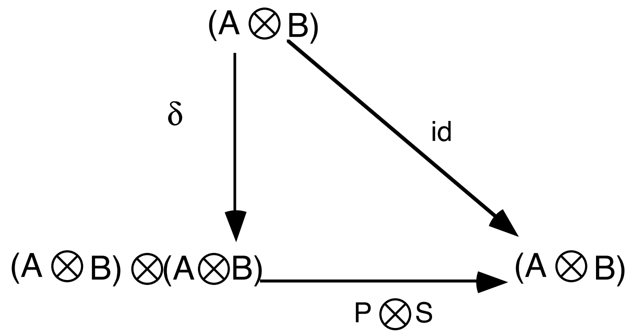
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B} \qquad A, \Delta \Rightarrow C}{A, \Gamma, \Delta^* \Rightarrow C}}{\Gamma, \Gamma, \Delta^* \Rightarrow C}}{\Gamma, \Delta^* \Rightarrow C}$$

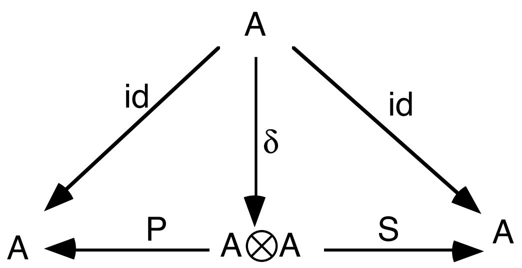
onde os cortes são aplicados em ramos de comprimento menor ou com fórmulas de complexidade menor. A última regra, na verdade, é uma sucesão de aplicações das regras de permutação e contração.

Proposição B.1 *Seja $\perp$ um objeto de uma categoria simêtrica monoidal fechada* $\mathbf{C}$ *($\perp$ é a interpretação de uma constante da linguagem de LLI), então (a) cada vez que existe um morfismo $g : A \rightarrow B$ existe $g' : (B \multimap \perp) \rightarrow (A \multimap \perp)$, e (b) existe um morfismo $f : A \rightarrow (A \multimap \perp) \multimap \perp$ em* $\mathbf{C}$.

Prova:
(a) sai direto de que $\multimap$ é um funtor contravariante na segunda componente; dado $g : A \rightarrow B$ existe o morfismo $g' = \_ \multimap \perp : (B \multimap \perp) \rightarrow (A \multimap \perp)$.
(b) decorre de que $\otimes$ e $\multimap$ são adjuntos:
temos o morfismo $ev_{A,\perp} : A \otimes (A \multimap \perp) = (A \multimap \perp) \otimes A \rightarrow \perp \;\in\; hom(A \otimes (A \multimap \perp), \perp) = hom(A, ((A \multimap \perp) \multimap \perp))$, então temos um morfismo $f : A \rightarrow ((A \multimap \perp) \multimap \perp)$.

Proposição B.2 *Um funtor tensor $\otimes$ com projeções e diagonal que satisfaça os diagramas comutativos abaixo é um funtor produto:*





Prova: Definimos a formação de pares por $< f, g >= (f \otimes g).\delta$.

(a) o diagrama formado pelo morfismo de formação de pares e as projeções comuta,

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes B \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr, "S"] & \\
A & C \otimes C \arrow[u, shift left, "f"'] \arrow[u, shift right, "g"] & B \\
 & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\delta"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Isto é, que $P.((f \otimes g).\delta) = f$, e $S.((f \otimes g).\delta) = g$ é direto pela definição das projeções P e S já que a composição com a transformação natural δ é só para garantir a duplicação dos argumentos.

(b) o morfismo mediador, formador de pares, é único, i.e. dado um morfismo $h : C \to A \otimes B$ tal que $P.h = f$ e $S.h = g$ devemos provar $h = (f \otimes g).\delta$.
$(f \otimes g).\delta = (P.h \otimes S.h).\delta = (P \otimes S).(h \otimes h).\delta = (P \otimes S).\delta.h = id = h$, pelo diagrama comutativo de hipótese.

C APÊNDICE

Provas dos Enunciados do Capítulo 4

Teorema C.1 *Cada sequente no sistema de Sequentes para LLI* pode ser demonstrado através de uma derivação sem a regra do corte.*

Prova: a prova não apresenta nenhuma dificultade adicional. Por exemplo, no caso da derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{(\Pi, \Delta) \Rightarrow A \otimes B} \qquad \dfrac{\Gamma[(A \otimes B, (C, D))] \Rightarrow E}{\Gamma[((A \otimes B, C), D)] \Rightarrow E}}{\Gamma[(((\Pi, \Delta), C), D)] \Rightarrow E}$$

deve-se reduzir a:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{(\Pi, \Delta) \Rightarrow A \otimes B} \qquad \Gamma[(A \otimes B, (C, D))] \Rightarrow E}{\Gamma[((\Pi, \Delta), (C, D))] \Rightarrow E}}{\Gamma[(\Pi^\star \otimes \Delta^\star, (C, D))] \Rightarrow E}}{\Gamma[((\Pi^\star \otimes \Delta^\star, C), D)] \Rightarrow E}}{\Gamma[(((\Pi, \Delta), C), D)] \Rightarrow E}$$

onde $\Pi^\star, \Delta^\star$ são fórmulas obtidas de Π e Δ respectivamente pela aplicação sucessiva da regra $\otimes_e$ que substitui a vírgula pelo conectivo $\otimes$. Neste caso a regra do corte é aplicada num ramo da derivação de menor comprimento.

Proposição C.1 $\vdash \Pi \Rightarrow B$ *no sistema de sequentes para LLI* sse* $\vdash \Pi^\star \multimap B$ *no sistema axiomático, onde* $\Pi^\star$ *é a fórmula obtida substituindo cada vírgula que aparece na árvore* Π *pelo conectivo* $\otimes$*, e cada ocorrência da árvore vazia* $\emptyset$ *pela fórmula* t*.*

Prova: no sentido de esquerda para direita é suficiente mostrar que no sistema de sequentes é possível derivar cada um dos axiomas e regras do sistema axiomático. No outro sentido, a prova é por indução no comprimento da derivação, deve-se assumir que no sistema axiomático (a interpretação) dos sequentes superiores é derivável, e então deve-se obter (a interpretação) do sequente inferior. Para provar este sentido da proposição são úteis os seguintes teoremas e regras derivadas no sistema axiomático de LLI*:

$$\dfrac{A \multimap A_1 \quad B \multimap B_1}{A \otimes B \multimap A_1 \otimes B_1}$$

$A \otimes B \multimap B \otimes A$

Proposição C.2 *$\vdash \Pi \Rightarrow B$ no sistema de sequentes para IES4 sse $\vdash \Pi^\star \rightharpoonup B$ no sistema axiomático, onde $\Pi^\star$ é a fórmula obtida substituindo cada vírgula que aparece na árvore Π pelo conectivo $\otimes$, e cada ocorrência da árvore vazia $\emptyset$ pela fórmula t.*

Prova: no sentido de esquerda para direita é suficiente mostrar que no sistema de sequentes é possível derivar cada um dos axiomas e regras do sistema axiomático. No outro sentido, a prova é por indução no comprimento da derivação, deve-se assumir que no sistema axiomático (a interpretação) dos sequentes superiores é derivável, e então deve-se obter (a interpretação) do sequente inferior. Para provar este sentido da proposição são úteis os seguintes teoremas e regras derivadas no sistema axiomático de IES4:

$$\frac{A \rightharpoonup A_1 \quad B \rightharpoonup B_1}{A \otimes B \rightharpoonup A_1 \otimes B_1}$$

$((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \rightharpoonup (A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3))$
$((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \rightharpoonup (A_2 \otimes (A_1 \otimes A_3))$
$A \rightharpoonup A \otimes A$
$(B \otimes A) \rightharpoonup A$

Proposição C.3 *Existe uma tradução fiel entre LLI e CL + κ. Isto significa que existe uma tradução t das fórmulas de LLI nas fórmulas de CL + κ tal que $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ em LLI sse $\vdash\ \kappa(t(A_1)), \ldots \kappa(t(A_n)) \Rightarrow t(A)$ em CL + κ.*

A tradução $t : \mathcal{F}(LLI) \to \mathcal{F}(CL + \kappa)$ é definida por:

$t(A) = A$ se A é uma fórmula atômica.
$t(A \otimes B) = \kappa(t(A)) \otimes \kappa(t(B))$
$t(A \multimap B) = \kappa(t(A)) \to t(B)$

Por indução no comprimento da demonstração $\vdash\ A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ é possível provar que $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ em LLI então $\vdash\ \kappa(t(A_1)), \ldots \kappa(t(A_n)) \Rightarrow t(A)$ em CL + κ.

Para demonstrar o outro sentido, definimos a tradução $t' : \mathcal{F}(CL + \kappa) \to \mathcal{F}(LLI)$ por:

$t'(A) = A$ se A é uma fórmula atômica.
$t'(A \otimes B) = t'(A) \otimes t'(B)$
$t'(A \to B) = t'(A) \multimap t'(B)$
$t'(A \leftarrow B) = t'(A) \multimap t'(B)$
$t'(\kappa(A)) = t'(A)$

Com t' assim definida temos que:
1- $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ em CL + κ então $\vdash t'(A_1), \ldots, t'(A_n) \Rightarrow t'(A)$ em LLI.
2- $t'(t(A)) = A$
Usando estes resultados obtemos que $\vdash\ \ \kappa(t(A_1)), \ldots \kappa(t(A_n)) \Rightarrow t(A)$ em CL + κ então $\vdash A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ em LLI.

D APÊNDICE

Provas dos Enunciados do Capítulo 5

Proposição D.1 *Seja um monóide modal* $(M, \leq, \circ, e, \multimap, \mathcal{M})$*, a operação modal satisfaz* $\mathcal{M}(a) \leq \mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(a)$ *e* $\mathcal{M}(a) \leq e$ *sse satisfaz* $\mathcal{M}(x) \circ \mathcal{M}(y) = \mathcal{M}(x\&y)$.

Prova: no sentido direita-esquerda em [Avr88].
Para mostrar o outro sentido, temos que: $\mathcal{M}(a) \leq a$ e $\mathcal{M}(b) \leq e$ por hipótese. Por compatibilidade temos que: $\mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b) \leq a \circ e \leq a$. Da mesma forma obtemos que: $\mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b) \leq e \circ b \leq b$. Por definição de ínfimo sabemos que $\mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b) \leq a\&b$, então temos que $\mathcal{M}(\mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b)) \leq \mathcal{M}(a\&b)$. Por outro lado temos, $\mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b) \leq \mathcal{M}(\mathcal{M}(a)) \circ \mathcal{M}(\mathcal{M}(b)) \leq \mathcal{M}(\mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b))$. Por transitividade obtemos o resultado desejado.

Falta ainda mostrar que podemos obter $\mathcal{M}(a\&b) \leq \mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b)$. Para isto, da definição de ínfimo temos que $a\&b \leq a$ então $\mathcal{M}(a\&b) \leq \mathcal{M}(a)$. Da mesma forma obtemos, $\mathcal{M}(a\&b) \leq \mathcal{M}(b)$. Por compatibilidade $\mathcal{M}(a\&b) \circ \mathcal{M}(a\&b) \leq \mathcal{M}(a) \circ \mathcal{M}(b)$. Por hipótese temos que $\mathcal{M}(a\&b) \leq \mathcal{M}(a\&b) \circ \mathcal{M}(a\&b)$. Por transitividade temos o resultado desejado.

Para verificar que uma categoria linear modal é um modelo categórico para o fragmento de $LLI_!$ sem a regra da contração, i.e. $LLI_!$ - C!, devemos mostrar que para cada derivação há um morfismo na categoria e que reduções se correspondem com equações entre morfismos:

Promoção (a) Seja o morfismo $f : !A_1 \otimes \ldots \otimes !A_n \to B$ correspondendo ao sequente superior. Então, por definição de comônada e de funtor monoidal temos o seguinte morfismo: $!A_1 \otimes \ldots \otimes !A_n \to !!A_1 \otimes \ldots \otimes !!A_n \to !(!A_1 \otimes \ldots \otimes !A_n) \xrightarrow{!f} !A$.
(b) Se o antecedente dos sequente é vazio, por hipótese temos $f : I \to B$. Por definição de funtor monoidal temos $I \xrightarrow{i} !I \xrightarrow{!f} !A$.

Deleção Seja o morfismo $f : \Gamma \otimes A \otimes \Delta \to B$ correspondendo ao sequente superior. Por hipótese temos o morfismo $\varepsilon_A : !A \to A$, então obtemos o morfismo $1_\Gamma \otimes \varepsilon_A \otimes 1_\Delta : \Gamma \otimes !A \otimes \Delta \to \Gamma \otimes A \otimes \Delta$. compondo com f obtemos um morfismo que corresponde ao sequente inferior, $f.(1_\Gamma \otimes \varepsilon_A \otimes 1_\Delta) : \Gamma \otimes !A \otimes \Delta \to B$.

Observe que o diagrama da definição de coálgebra, $\varepsilon_{!A}.\delta_A = id_{!A}$ dá a relação entre ε e δ necessária para modelar o sentido de cima para baixo da regra Promoção.

Além disto, com as equações da estrutura da categoria podemos satisfazer às equações do processo de normalização. Isto é, demonstrações que se reduzem correspondem ao mesmo morfismo na categoria. Por exemplo, a redução:
derelict (promote $z_1, \ldots, z_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in f) $\hookrightarrow$ $f[z_1/x_1, \ldots z_n/x_n]$
corresponde ao diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
!A_1 \otimes \cdots \otimes !A_n \arrow[r, "\delta_1 \otimes \cdots \otimes \delta_n"] \arrow[dr, "id"'] & !!A_1 \otimes \cdots \otimes !!A_n \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varepsilon \otimes \cdots \otimes \varepsilon"] & !(!A_1 \otimes \cdots \otimes !A_n) \arrow[r, "!f"] \arrow[d, "\varepsilon"] & !B \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
 & !A_1 \otimes \cdots \otimes !A_n \arrow[r, "id"] & !A_1 \otimes \cdots \otimes !A_n \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

onde o triangulo comuta por definição de comônada, o quadrado do meio comuta porque ε é uma transformação natural monoidal e o quadrado direito comuta porque ε é uma transformação natural.

A redução dos termos:
promote (promote $z_1, \ldots, z_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in $f), w_1, \ldots, w_m$ for $y, y_1, \ldots, y_m$ in g $\hookrightarrow$
promote $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m$ for $x'_1, \ldots, x'_n, y_1, \ldots, y_m$ in
$(g[$ promote $x'_1, \ldots, x'_n$ for $x_1, \ldots, x_n$ in $f/y])$
corresponde ao diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
!C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & !!C \arrow[r, "!f"] \arrow[d, "\delta"] & !A \arrow[d, "\delta"] & \\
!!C \arrow[r, "!\,\delta"] & !!!C \arrow[r, "!!f"] & !!A \arrow[r, "!g"] & !B
\end{tikzcd}
$$

onde o quadrado da esquerda comuta por definição de comônada e o quadrado da direita porque δ é uma transformação natural.

Verificaremos que uma categoria linear modal onde cada !-coálgebra livre $<!A, \delta_A :!A \to !!A>$ tem um morfismo $m :!A \to !A \otimes !A$ tal que $a.(id \otimes m).m = m.(m \otimes id)$ e $c.m = m$ que é um morfismo de coálgebras e além disto cada morfismo de coálgebras livres é um morfismo de co-semigrupos, é um modelo categórico para LLI$_!$.

C! Seja o morfismo $f : \Gamma \otimes !A \otimes !A \otimes \Delta \to B$ correspondendo ao sequente superior. Por hipótese temos o morfismo $m_{!A} :!A \to !A \otimes !A$, então obtemos o morfismo $1_\Gamma \otimes m_{!A} \otimes 1_\Delta : \Gamma \otimes !A \otimes \Delta \to \Gamma \otimes !A \otimes !A \otimes \Delta$. Compondo com f, obtemos um morfismo que corresponde ao sequente inferior, $f.(1_\Gamma \otimes m_{!A} \otimes 1_\Delta) : \Gamma \otimes !A \otimes \Delta \to \Gamma \otimes !A \otimes \Delta$.

Além disto, as reduções entre termos correspondem aos mesmos morfismos. Por exemplo, a redução:

derelict (copy $z :!A$ as x, y in f) $\hookrightarrow$ copy $z :!A$ as x, y in derelict $(f :!C)$
corresponde à equação $\varepsilon_{!C}.(f.m_{!A}) = (\varepsilon_{!C}.f).m_{!A}$ entre morfismos.

A redução
π_1(copy $z :!A$ as x, y in $f : C \times D$) $\hookrightarrow$ copy $z :!A$ as x, y in $\pi_1(f : C \times D)$
corresponde à equação $\Pi_{C,D}.(f.m_{!A}) = (\Pi_{C,D}.f).m_{!A}$ entre morfismos.

A redução:
copy (copy $x' :!A$ as x, y in $f :!C$) as z, w in g $\hookrightarrow$
copy $x' :!A$ as x, y in (copy $f :!C$ as z, w in g)
corresponde à equação $g.m_{!C}.(f.m_{!A}) = (g.m_{!C}.f).m_{!A}$ entre morfismos.

Proposição D.2 *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria monoidal, se o funtor de esquecimento* $U : \mathbf{Cosemcom}_C \to \mathbf{C}$ *tem um adjunto a direita* R*, então a comônada* (T, ε, δ) *definida em* $\mathbf{C}$ *pela adjunção entre* U *e* R *é tal que* $\mathbf{Cosemcom}_C \cong \mathbf{C}^T$*.*

Prova: a prova usa o teorema de Beck ([ML71, pag.147]):
Seja $< F, U, \nu, \epsilon >: C \to D$ uma adjunção, $< G, \delta, \epsilon >$ a comônada que ela define na categoria D e D^G a categoria das coálgebras desta comônada. Então as seguintes condições são equivalentes:

- o (único) funtor de comparação $K : C \to D^B$ é uma equivalência de categorias.
- O funtor $F : C \to D$ cria equalizadores para aqueles pares de morfismos f, g em C para os quais $F(f), F(g)$ têm um equalizador absoluto em D.

A prova da proposição reduz-se a verificar que o funtor $U : \mathbf{Cosemcom}_C \to \mathbf{C}$ cria equalizadores para aqueles pares de morfismos f, g em $\mathbf{Cosemcom}_C$ para os quais $U(f), U(g)$ têm um equalizador absoluto em C.

Dado um equalizador absoluto (E, e) em C:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "e"] & U(A,\delta) \arrow[r, shift left, "U(f)"] \arrow[r, shift right, "U(g)"'] & U(B,\delta) \end{tikzcd}$$

Ou o que é o mesmo, já que U é o funtor de esquecimento:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Já que (E, e) é um equalizador absoluto, aplicar um funtor a esse diagrama é de novo um equalizador. Em particular, se o funtor é o tensor da categoria monoidal C, temos que:

$$\begin{tikzcd} E \otimes E \arrow[r, tail, "e \otimes e"] & A \otimes A \arrow[r, shift left, "f \otimes f"] \arrow[r, shift right, "g \otimes g"'] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

é um equalizador em C também.
Podemos então definir uma comultiplicação em E induzida pela comultiplicação em A:

$$\begin{tikzcd}
E \otimes E \arrow[r, tail, "e \otimes e"] & A \otimes A \arrow[r, shift left, "f \otimes f"] \arrow[r, shift right, "g \otimes g"'] & B \otimes B \\
E \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, tail, "e"] & A \arrow[u, "\delta"'] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

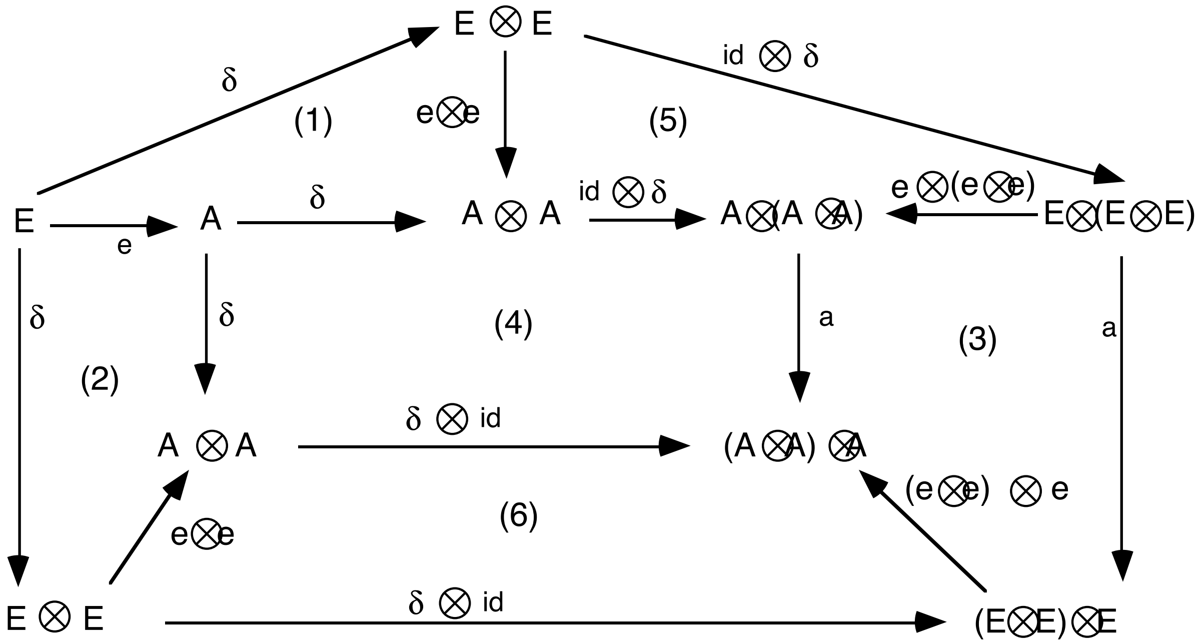
Então E com δ_E é um co-semigrupo, porque o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & E \otimes E \arrow[r, "id \otimes \delta"] & E \otimes (E \otimes E) \arrow[d, "a"] \\
E \otimes E \arrow[rr, "\delta \otimes id"] & & (E \otimes E) \otimes E \arrow[d, "(e \otimes e) \otimes e"'] \\
& & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d, shift right, "(f \otimes f) \otimes f"'] \arrow[d, shift left, "(g \otimes g) \otimes g"] \\
& & (B \otimes B) \otimes B
\end{tikzcd}$$

(1) comuta porque :

- $(f \otimes f) \otimes f.((e \otimes e) \otimes e.a_E.id_E \otimes \delta_E.\delta_E) = ((f \otimes f) \otimes f.(e \otimes e) \otimes e).(a_E.id_E \otimes \delta_E.\delta_E) = ((g \otimes g) \otimes g.(e \otimes e) \otimes e).(a_E.id_E \otimes \delta_E.\delta_E) = (g \otimes g) \otimes g.((e \otimes e) \otimes e.a_E.id_E \otimes \delta_E.\delta_E)$.

- $(e \otimes e) \otimes e.a_E.id_E \otimes \delta_E.\delta_E = (e \otimes e) \otimes e.\delta_E \otimes id_E.\delta_E$ já que temos o seguinte diagrama:



> (1) e (2) comutam por definição de δ_E, (3) por ser a transformação natural, (4) por ser A um co-semigrupo. (5) (e por raçocínio análogo (6)) comuta já que da definição de δ temos que $\delta.e = (e \otimes e).\delta$ então temos que $e \otimes (\delta.e) = e \otimes ((e \otimes e).\delta)$. Obtemos então que, $(id_A.e) \otimes (\delta.e) = (e.id_E) \otimes ((e \otimes e).\delta)$. Ou o que é o mesmo, $(id_A \otimes \delta).(e \otimes e) = (e \otimes (e \otimes e)).(id_E \otimes \delta)$.

Mas $((E \otimes E) \otimes E, (e \otimes e) \otimes e)$ é um equalizador em $\mathbf{C}$ (já que (E, e) é um equalizador absoluto), então existe um único morfismo $E \to (E \otimes E) \otimes E$ com estas condições, por tanto $a_E.id_E \otimes \delta_E.\delta_E = \delta_E \otimes id_E.\delta_E$.

O morfismo e é um morfismo de co-semigrupos (pela definição).

Além disto, $(< E, \delta_E >, e)$ é um equalizador em $\mathbf{Cosemcom}_C$ porque dados um co-semigrupo $< C, \delta_C >$ e um morfismo $h :< C, \delta_C > \to < A, \delta_A >$ tal que $f.h = g.h$ existe um único morfismo $l : C \to E$ tal que $e.l = h$ (por ser (E, e) equalizador em $\mathbf{C}$) e l é morfismo de co-semigrupos, i.e. $l \otimes l.\delta_C = \delta_E.l$. Esta equação é obtida do seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "(l \otimes l)"] & E \otimes E \arrow[r, "(e \otimes e)"] & (A \otimes A) \arrow[r, shift left, "(f \otimes f)"] \arrow[r, shift right, "(g \otimes g)"'] & (B \otimes B) \\
C \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "l"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & E \arrow[u, "\delta"'] \arrow[r, "e"] \arrow[ur, phantom, "="] & A \arrow[u, "\delta"'] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[ur, phantom, "="] & B \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}
$$

(1) comuta porque temos:

- $f \otimes f.(e \otimes e.l \otimes l.\delta_C) = (f \otimes f.e \otimes e).(l \otimes l.\delta_C) = (g \otimes g.e \otimes e).(l \otimes l.\delta_C) = g \otimes g.(e \otimes e.l \otimes l.\delta_C)$;
- $e \otimes e.l \otimes l.\delta_C = h \otimes h.\delta_C = \delta_A.h = \delta_A.e.l = e \otimes e.\delta_E.l.$

Mas por ser $(E \otimes E, e \otimes e)$ um equalizador em $\mathbf{C}$ existe um único morfismo $C \to E \otimes E$ em estas condições, por tanto $l \otimes l.\delta_C = \delta_E.l$

E APÊNDICE

E.1 O modelo das Categorias Dialéticas para a Lógica Linear Intuicionista

As categorias DC

Seja **C** uma categoria com limites finitos (i.e. cada diagrama finito tem um limite). Se A, U, X são objetos de **C** então um monomorfismo $\alpha : A \rightarrowtail U \times X$ é um objeto de **DC**. Isto é, A é um subobjeto do produto $U \times X$. Representamos o objeto α de **DC** por $U \stackrel{\alpha}{\nleftarrow} X$.

Se a categoria base é **Set** então os objetos de **DSet** são as inclusões das relações binárias (ou dos conjuntos isomorfos a elas) no produto cartesiano $U \times X$.

Um morfismo em **DC** entre dois tais objetos $\alpha : A \rightarrowtail U \times X$, e, $\beta : B \rightarrowtail V \times Y$, consiste de um par de morfismos em **C**, (f, F) onde $f : U \to V$ e $F : U \times Y \to X$ tal que existe um único morfismo k em **C** que faz comutar o seguinte diagrama de "pullbacks":

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha'"'] \arrow[dl, dashed, "k"'] & A \arrow[d, tail, "\alpha"] \\
B' \arrow[r, tail, "\beta'"] \arrow[d] & U\times Y \arrow[r, "(\pi_1, F)"] \arrow[d, "f \times Id_Y"] & U\times X \\
B \arrow[r, tail, "\beta"] & V\times Y &
\end{tikzcd}$$

A condição do diagrama é representada dizendo que:
$(\pi_1, F) \wedge \alpha \leq (f \times Id_Y) \wedge \beta$ (onde $(\pi_1, F) \wedge \alpha$ significa o "pullback" do primeiro morfismo ao longo do segundo).

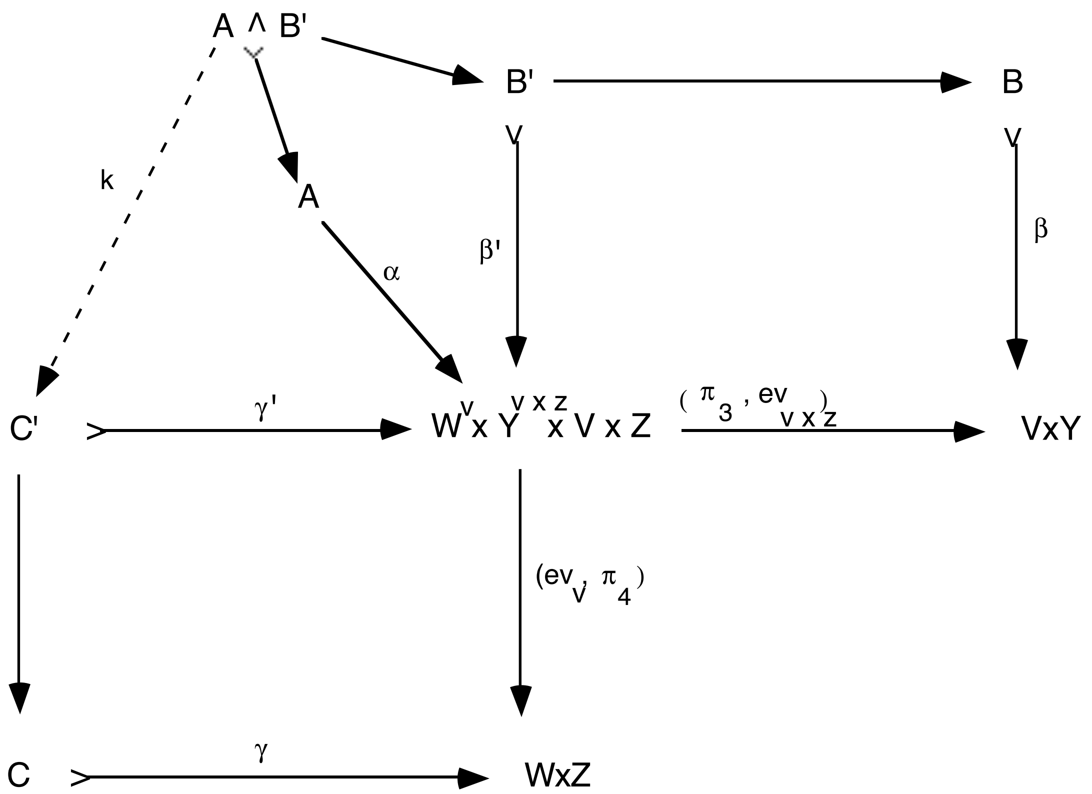
Em **DSet** esta condição reduz-se a:
$\forall u \in U, y \in Y \;\; \alpha(u, F(u, y)) \Rightarrow \beta(f(u), y)$.

A prova de que a construção acima define realmente uma categoria, com a composição de $(g : V \to W, G : V \times Z \to Y)$ e $(f : U \to V, F : U \times Y \to X)$ definida por $(g.f : U \to W, F.(Id_U \times G).(Id_U \times f \times Id_Z).(\delta_U \times Id_Z) : U \times Z \to X)$[1] e a identidade de um objeto $\alpha : A \rightarrowtail U \times X$ dada por $(Id_U : U \to U, \pi_2 : U \times X \to X)$, é provado em [dP88, pag 4].

Dados dois objetos em **DC**, $\alpha : A \to U \times X$, e, $\beta : B \to V \times Y$, seu produto tensorial é definido pelo objeto $\alpha \times \beta : A \times B \rightarrowtail U \times V \times X \times Y$, que em **DSet** significa que $\alpha \times \beta((u, v), (x, y)) \Leftrightarrow \alpha(u, x) \; e \; \beta(v, y)$. Esta operação define um bifuntor porque dados dois morfismos em **DC**, $(f, F), (g, G)$ o morfismo $(f \times g, F \times G)$ pertence a **DC**. Além disto, ele define uma estrutura simétrica monoidal em **DC** com identidade $1 \stackrel{\alpha}{\leftrightarrow} 1$, onde 1 é o objeto terminal de **C**. Que esta construção define um produto tensorial que não é um produto é provado em [dP88, pag 5]. Na verdade o tensor das categorias **DC** é um exemplo de tensor que não tem nem diagonais nem projeções.

Se a categoria base **C** é cartesiana fechada, pode-se definir um funtor de "internal-hom" em **DC** que transforma **DC** em uma categoria simétrica monoidal fechada.

Dados dois objetos $\mathcal{B} = W \stackrel{\gamma}{\leftrightarrow} Z$ e $\mathcal{C} = V \stackrel{\beta}{\leftrightarrow} Y$ o bifuntor de "internal-hom" em **DC** é definido considerando o seguinte diagrama



[1] $\delta : Id \to \times$, é a transformação natural definida por $\delta_A : A \to A \times A$, onde $\times$ é o produto em **C**, e 1 o objeto terminal. Lembre que $f \times g = < f.\pi_1, g.\pi_2 >$.

onde π_j são os projeções do produto em $\mathbf{C}$ e ev_A é a transformação natural de "avaliação" dada pelo "internal-hom" em $\mathbf{C}$. B' é definido pelo "pullback" de β ao longo de $(\pi_3, ev_{V\times Z})$ e C' é definido pelo "pullback" de γ ao longo de (ev_V, π_4). Então, $[\mathcal{B},\mathcal{C}]$ em $\mathbf{DC}$ é um objeto $\alpha : A >\!\!\to W^V \times Y^{V\times Z} \times V \times Z$ tal que existe um único morfismo k em $\mathbf{C}$ entre o "pullback" de A e B' (representado por $A \wedge B'$) e C'.

Este objeto $[\mathcal{B},\mathcal{C}]$ é representado por $W^V \times Y^{V\times Z} \overset{\gamma^\beta}{\nleftarrow} V \times Z$, onde intuitivamente esta relação significa que $\gamma^\beta((f,F),(v,z)) \Leftrightarrow \beta(v,F(v,z))$ então $\gamma(f(v),z))$.

Que a construção acima é um bifuntor de $\mathbf{DC}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{DC} \to \mathbf{DC}$ contravariante na primeira coordenada e covariante na segunda, e que é adjunto do funtor tensor é mostrado em [dP88, pag 8].

Se a categoria $\mathbf{C}$ é cartesiana fechada e além disto os coprodutos ($\oplus$, e 0 o objeto inicial) são estáveis e disjuntos, então é possível definir em $\mathbf{DC}$ produtos e coprodutos fracos.

Definição E.1 *Um coproduto numa categoria* $\mathbf{C}$*,* $A = \oplus_{\alpha\in I} A_\alpha$ *é disjunto se cada uma das injeções canônicas* $j_\alpha : A_\alpha \to A$ *é um monomorfismo e para cada par de índices diferentes* α, α'*, o "pullback" de* j_α *ao longo de* $j_{\alpha'}$ *é o objeto inicial de* $\mathbf{C}$*.*

Definição E.2 *Um coproduto* A *numa categoria* $\mathbf{C}$ *é estável sob "pullbacks" se dado um morfismo* $f : B \to A$*, ao se fazer o "pullback" de cada uma das injeções canônicas* j_α *ao longo de* f *obtemos que* $B \cong \oplus_{\alpha\in I} f \wedge j_\alpha$*.*

De posse das condições acima é possível definir, dados dois objetos $\alpha : A >\!\!\to U \times X$ e $\beta : B >\!\!\to V \times Y$, seu produto como o objeto $(\alpha \times Id_V) \oplus (Id_U \times \beta) : A \times V \oplus U \times B >\!\!\to U \times X \times V \oplus U \times V \times Y \cong U \times V \times (X \oplus Y)$, com projeções $p_1 = (\pi_1 : U \times V \to U, j_1.\pi_3 : U \times V \times X \to X \oplus Y)$ e $p_2 = (\pi_2, j_2.\pi_3)$ (onde j_1, j_2 são as injeções canônicas em $\mathbf{C}$). Que esta definição produz um bifuntor, com a propriedade universal é provado em [dP88, pag 11]. As condições de estabilidade e disjunção do coproduto em $\mathbf{C}$ são necessárias para garantir que dados dois morfismos mônicos $m : A >\!\!\to B$ e $n : C >\!\!\to D$, $m \oplus n : A \oplus C. \to B \oplus D$ seja também mônico.

O coproduto de dois objetos é também definido pelo mesmo procedimento das construcões anteriores, isto é usando os produtos, coprodutos e "pullbacks" de $\mathbf{C}$. Para definir as injeções canônicas deve-se usar as injeções canônicas em $\mathbf{C}$ e o morfismo de avaliação, ev, mas esta definição não satisfaz a propriedade universal do coproduto. Dados dois objetos $\alpha : A >\!\!\to U \times X$ e $\beta : B >\!\!\to V \times Y$, primeiro devem-se formar os seguintes "pullbacks":

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha'"'] & A \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B' \arrow[r] \arrow[d, tail, "\beta'"'] & B \arrow[d, tail, "\beta"] \\
UxX^U \arrow[r, "(\pi_1\text{, ev})"] & UxX & UxY^V \arrow[r, "(\pi_1\text{, ev})"] & VxY
\end{tikzcd}
$$

Então o coproduto é o objeto $\pi : A' \times Y^V \oplus B' \times X^U \to (U \oplus V) \times X^U \times Y^V$ que satisfaz o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A' \times Y^V \arrow[r] \arrow[d, "\alpha' \times Id_{Y^V}"] & A' \times Y^V \oplus B' \times X^U \arrow[d, "\pi"] & B' \times X^U \arrow[l] \arrow[d, "\beta' \times Id_{X^U}"] \\
U \times X^U \times Y^V \arrow[r] & (U \oplus V) \times X^U \times Y^V & V \times Y^V \times X^U \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Seja **C** uma categoria cartesiana fechada, com coprodutos estáveis e disjuntos e com uma estrutura monoidal livre. Que uma categoria tenha uma estrutura monoidal livre significa que existe um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Mon}_C$ entre a categoria **C** e a categoria de seus monóides, que é adjunto à esquerda do funtor de esquecimento $U : \mathbf{Mon}_C \to \mathcal{C}$, em outras palavras que existe uma adjunção $< F, U, \nu, \eta >: \mathcal{C} \to \mathbf{Mon}_C$.

Se **C** tem coprodutos numeráveis, tal adjunto à esquerda é definido para cada objeto X, pelo monóide $F(X) = (\oplus_{i \in N} X^i, \nu_X, \mu_X)$, onde $\oplus_{i \in N} X^i = X^0 \oplus X^1 \oplus \ldots X^n \oplus \ldots$, e $X^0 = 1, X^i = X \& X \& \ldots \& X$, i vezes ([ML71, pag.168]). Intuitivamente isto significa que $\oplus_{I \in N} X^i$ são todas as sequências finitas de elementos de X, que ν_X é a injeção da sequência vazia no conjunto das sequências de X, $\nu_X : 1 \to \oplus_{I \in N} X^i$, e, $\mu_X : \oplus_{I \in N} X^i \times \oplus_{I \in N} X^i \to \oplus_{I \in N} X^i$ significa a concatenação de sequências.

Esta adjunção define a seguinte mônada: o funtor é a composição $\star : U.F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, sua unidade dada pela sequência de um elemento, $\nu_X^\star : X \to X^\star$, e a multiplicação dada pelo fato de esquecer parênteses, $\mu_X^\star : X^{\star\star} \to X^\star$. Assim, $\star(A)$ gera os monóides livres de A.

Usando esta mônada em **C** é possível definir uma comônada em **DC**:

O endofuntor $! : \mathbf{DC} \to \mathbf{DC}$ é definido tal que a um objeto $\alpha : A >\!\!\to U \times X$ associa o objeto $!\alpha :!A >\!\!\to U \times X^\star$ que é o "pullback" do objeto $\alpha^\star : A^\star >\!\!\to (U \times X)^\star$ ao longo de $C(U, X) : U \times X^\star \to (U \times X)^\star$ (este último morfismo é obtido através da unidade da adjunção de F e U em **C**, transpondo exponencialmente e aplicando o homomorfismo de monóides). Este funtor atua sobre morfismos em **DC** associando o morfismo (f, F) com o $(f, !F)$ onde $!F = F^\star.C(U, Y) : U \times Y^\star \to X^\star$.

Intuitivamente, se pensamos que $\alpha : A >\!\!\to U \times X$ significa uma relação binária $\alpha(u, x)$ para $u \in U$ e $x \in X$, então este funtor produz a relação $!\alpha$ definida por $!\alpha(u, < x_1, \ldots, x_n >)$ *sse* $\alpha(u, x_1) \wedge \ldots \wedge \alpha(u, x_n)$.

Que ! é realmente um endofuntor e que existem transformações naturais $\delta_A :!A \to !!A$, definida pela identidade na primeira componente $U \to U$ e por $\mu_\star : U \times X^{\star\star} \to X^\star$ (esquecer parênteses de X) na segunda; e $\varepsilon_A :!A \to A$, definida pela identidade $U \to U$ na primeira componente e por $\nu_\star : U \times X \to X^\star$ (produzir a sequência unitária de X) tal que definem uma comônada $(!, \delta, \varepsilon)$ é provado em [dP88, pag 31].

A partir desta comônada define-se uma nova comônada $(!_c, \delta', \varepsilon')$ de forma similar à anterior mas através do funtor $\star_c$ que num objeto A define os monóides livres comutativos[2] em $\mathbf{C}$, dado pela adjunção entre $\mathbf{C}$ e $\mathbf{Moncom}_C$, a categoria dos monóides comutativos em $\mathbf{C}$.

Além disto, é provado que a categoria das coálgebras gerada pela última comônada, é equivalente com a categoria dos comonóides comutativos de $\mathbf{DC}$, $\mathbf{DC}^{!_c} \cong \mathbf{Comoncom}_{DC}$[3]. ([dP88, pag 36]). Isto diz que cada objeto $!_cA$ é um comonóide e assim existem os morfismos $d :!_cA \to !_cA \otimes !_cA$ e $e :!_cA \to I$. Também é possível obter os isomorfismos naturais $I \cong !I$ e $!(A \& B) \cong !A \otimes !B$ (este último usando o fato de que os comonóides são comutativos).

Finalmente, pode-se provar que $\mathbf{DC}_{!_c}$ é cartesiana fechada. Como um último resultado pode-se obter que a categoria $\mathbf{DC}$ com a comônada $(!_c, \delta', \varepsilon')$ é um modelo para a Lógica Linear Intuicionista (na verdade a prova deste fato foi feita usando a definição de modelo de Seely, mas isto implica que se tem um modelo no sentido de [BBdPH92]), e que a categoria $\mathbf{DC}_{!_c}$ é um modelo para a Lógica Intuicionista, [dP88, pag 39].

O coproduto fraco de $\mathbf{DC}$ modela o conectivo $\oplus$ da Lógica Linear Intuicionista porque a lógica não força a unicidade da função característica do coproduto, da mesma forma que a lógica, por si só, não força a unicidade da função característica do produto. Essa unicidade para o produto e coproduto, na verdade, é ditada pelas regras η quando temos um cálculo de termos correspondente à lógica.

As categorias GC

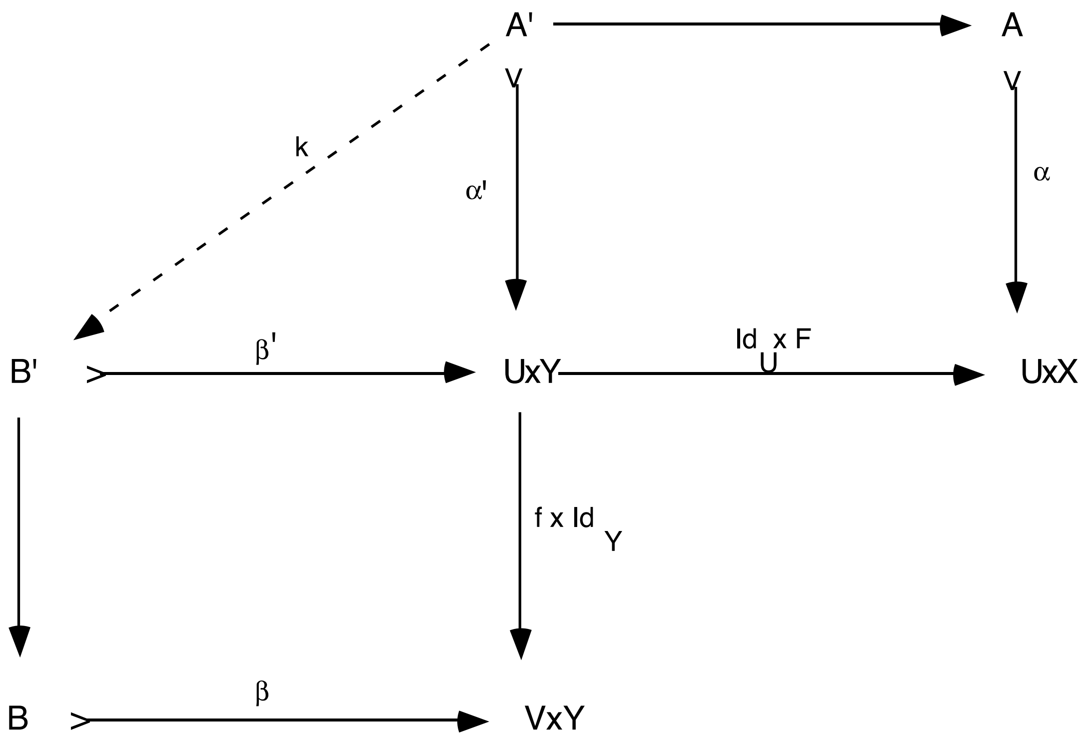
A categoria $\mathbf{DC}$ é um modelo da Lógica Linear Intuicionista com a modalidade ! (chamada "of course"), por outro lado a categoria $\mathbf{GC}$ é um modelo para a Lógica Linear Clássica. Na verdade ela é de interesse para modelar o conectivo $\Box$ porque mantém diferentes os quatros conectivos $\&, \wedge, \vee, \Box$, e as modalidades lineares !, ?. Mas só serão aqui discutidas as construções que servem para modelar os conectivos da parte intuicionista da Lógica Linear.

Seja, de novo, uma categoria $\mathbf{C}$ finitamente completa. Os objetos da categoria $\mathbf{GC}$ são os mesmos da categoria $\mathbf{DC}$, mas os morfismos são mais simples para se tratar.

Um morfismo em $\mathbf{GC}$ entre dois tais objetos $\alpha : A \rightarrowtail U \times X$ e $\beta : B \rightarrowtail V \times Y$, consiste de um par de morfismos em $\mathbf{C}$, (f, F) onde $f : U \to V$ e $F : Y \to X$ tal que existe um único morfismo k em $\mathbf{C}$ que faz comutar o seguinte diagrama de "pullbacks":

[2] Um monóide comutativo é um monóide $< C, \delta', \mu >$ tal que $\delta'_{C,C}.c = \delta'_{C,C}$.

[3] Um comonóide comutativo é um comonóide $< C, \delta', \mu >$ tal que $c.\delta'_{C,C} = \delta'_{C,C}$.



A condição do diagrama é representada dizendo que:
$(Id_U \times F) \wedge \alpha \leq (f \times Id_Y) \wedge \beta$ (onde $(Id_U \times F) \wedge \alpha$ significa o "pullback" do primeiro morfismo ao longo do segundo).

Observe que em **GSet** esta condição reduz-se a:
$\forall u \in U, y \in Y \;\; \alpha(u, F(y)) \Rightarrow \beta(f(u), y)$.

A prova de que com as definições acima se obtem uma categoria, com a composicão dada pela composição em cada coordenada, i.e., $(g : V \to W, G : Z \to Y).(f : U \to V, F : Y \to X)$ definida por $(g.f : U \to W, F.G : Z \to X)$, encontra-se em [dP88, pag 42].

Similar ao caso com **DC**, assumindo que a categoria **C** é finitamente completa e cartesiana fechada pode-se definir em **GC** uma estrutura simétrica monoidal fechada, mas neste caso é o "internal-hom" quem tem uma definição mais intuitiva sendo o tensor definido de maneira a obter a adjunção que garante que a categoria é fechada. E do mesmo modo, se **C** tem, além das condições acima, coprodutos estáveis sob "pullback" e disjuntos, pode-se definir em **GC** produtos e coprodutos, mas neste caso é possível obter um coproduto categórico.

A diferença fundamental entre **DC** e **GC** está na definição da comônada para simular o conectivo modal ! da Lógica Linear, e é por isto que esta construção será considerada com um pouco mais de detalhe.

Em **GC** não é possível definir diretamente uma comônada que satisfaça a todas as condições para modelar a Lógica Linear. Isto é devido principalmente ao fato de que, apesar dos morfismos serem mais simples, algumas construções ficam muito complexas, como a do produto tensorial. A solução foi definir duas comônadas que satisfaçam as condições necessárias para poder compô-las e assim obter uma terceira comônada que modele a Lógica Linear.

Seja **C**, como no caso de **DC**, uma categoria cartesiana fechada, com coprodutos estáveis e disjuntos e com uma estrutura monoidal livre. Assim, temos uma adjunção entre **C** e $\mathbf{Mon}_C$, e pode-se definir uma mônada cujo funtor $\star : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ define os monóides livres de um objeto A de **C**.

Define-se a partir do funtor $\star$ um novo endofuntor, chamado S, da seguinte maneira: $S(A \rightarrowtail U \times X) = S(A) \rightarrowtail U \times X^\star$ dado pelo seguinte "pullback":

$$
\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r] \arrow[d, tail] & A^{x} \arrow[d, tail, "\alpha^{x}"] \\
UxX^{x} \arrow[r, "C_{U,X}"] & (UxX)^{x}
\end{tikzcd}
$$

E, $S(f : U \to V, F : Y \to X) = (f, F^\star : Y^\star \to X^\star)$. Que este funtor define uma comônada $(S, \varepsilon_S, \delta_S)$ em **GC** é provado em [dP88, pag 67].

Para se definir o outro endofuntor, chamado T, é preciso lembrar que **C** é cartesiana fechada e que, então, para cada objeto U de **C** temos o endofuntor covariante relacionado com o funtor de "internal-hom", que é representado pela exponenciação $X \to X^U$.

O funtor T é definido por:
$T(A \rightarrowtail U \times X) = T(A) \rightarrowtail U \times X^U$ dado pelo seguinte "pullback":

$$
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r] \arrow[d, tail] & A \arrow[d, tail, "\alpha"] \\
UxX^{U} \arrow[r, "(\pi_1, ev)"] & UxX
\end{tikzcd}
$$

E, $T(f : U \to V, F : Y \to X) = (f, F.(-).f : Y^V \to X^U)$. Que este funtor define uma comônada $(T, \varepsilon_T, \delta_T)$ em **GC** é provado em [dP88, pag 68].

A composição de duas comônadas $(S, \varepsilon_S, \delta_S), (T, \varepsilon_T, \delta_T)$ nem sempre é uma comônada, mas se é possível definir uma transformação natural $\lambda : T.S \to S.T$, chamada de lei distributiva, tal que alguns diagramas com as transformações naturais das comônadas comutem, então a composição $(T.S, \varepsilon_{T.S}, \delta_{T.S})$ é de novo uma comônada.

Para o caso da categoria **GC** as comônadas definidas acima satisfazem a lei distributiva e então sua composição é de novo uma comônada em **GC**.

Como no caso de **DC** é preciso usar a adjunção de **C** com a categoria de seus monóides comutativos $\mathbf{Moncom}_C$ e definir o funtor $\star_c$. Os funtores S_c e T_c são definidos como S e T mas usando $\star_c$ no lugar do funtor $\star$. E assim, chega-se a definir o funtor $T_c.S_c =!$ que define uma comônada. E os últimos resultados são:

- cada !-coálgebra tem uma estrutura de comonóide comutativo com respeito ao tensor definido para **GC**, [dP88, pag 77].
- é possível obter os isomorfismos naturais $I \cong !I$ e $!(A\&B) \cong !A \otimes !B$, onde agora $\otimes$ é o tensor definido em **GC**, [dP88, pag 77].
- a categoria de Kleisli, das !-coálgebras livres, é cartesiana fechada, [dP88, pag 78].
- a categoria **GC** com a comônada definida pelo funtor !, é um modelo para a Lógica Linear com a modalidade, [dP88, pag 78].
- há uma equivalência de categorias entre a categoria **DC** e a categoria de Kleisli, das T-coálgebras livres em **GC**, [dP88, pag 76].

E.2 As categoria dialéticas para LLI$_!$

Os modelos Dialéticos mostram-se úteis mais uma vez. Na verdade, eles são de interesse porque provém modelos categóricos que não foram obtidos através do cálculo da lógica. Pode-se obter modelos categóricos para LLI$_!$ usando as categorias **DC** e **GC** mas definindo comônadas apropriadas que atuem nelas. Estas comônadas estarão definidas por um endofuntor que produza os semigrupos livres comutativos em **C**. Isto funcionará fácilmente usando **DC** mas para **GC** deverá-se usar o mesmo procedimento que no caso para a Lógica Linear, i.e, compor comônadas.

Começaremos por definir a estrutura em **DC** necessária para modelar a LLI$_!$.

As categorias DC

Já vimos que as categorias **DC** são categorias lineares (com coprodutos fracos), i.e. modelam a lógica que nesta tese é chamada de LLI (supondo que **C** é uma categoria cartesiana fechada, com coprodutos estáveis e disjuntos). Para modelar a lógica LLI$_!$ temos que definir uma comônada monoidal, que chamaremos de $(!, \delta, \varepsilon)$, em **DC** tal que cada !-coálgebra livre tenha estrutura de cosemigrupo comutativo, i.e. que $\mathbf{DC}^! \subseteq \mathbf{Cosecom}_{DC}$. Para isto, como no caso dos outros conectivos, será preciso exigir alguma estrutura extra na categoria base **C** que induza naturalmente a comônada em **DC**.

A estrutura necessária em **C** é que esta categoria tenha estrutura de semigrupo livre comutativo, i.e. que o funtor de esquecimento $U : \mathbf{Semcom}_C \to C$ tenha um adjunto à esquerda $R : C \to \mathbf{Semcom}_C$.

Como no caso tratado em [ML71, pag.168] dos monóides livres, se a categoria **C** tem coprodutos numeráveis ($\oplus$) sempre existe um adjunto à esquerda $F : C \to \mathbf{Sem}_C$ para o funtor de esquecimento $U : \mathbf{Sem}_C \to C$. Este adjunto é definido por: para um objeto X de **C**, $F(X) = (X^+, \delta')$, onde $X^+ = \oplus_{i \leq 1} X^i$ e $X^1 = X, X^i = X \& X \& \ldots \& X$, i vezes. O morfismo $\delta' : X^+ \times X^+ \to X^+$ está definido pela concatenação ou justaposição de sequências. Nos morfismos $f : A \to B$ de **C** o funtor é definido pelo morfismo de semigrupos $F(f) : (A^+, \delta') \to (B^+, \delta'')$ que envia cada gerador s do semigrupo livre A^+ em $f(s)$.

Que esta construção produz um funtor adjunto à esquerda do funtor de esquecimento, com transformações naturais $\nu_X : X \to UF(X)$ (que produz as sequências unitárias) e $\varepsilon_{(Y,f)} : FU((Y,f)) \to (Y,f)$ (que atribui a cada gerador s do monóide livre (Y^+, δ') no elemento s de Y), segue da prova em [ML71, pag.168] para o caso dos monóides.

A adjunção $(F, U, \nu, \varepsilon) : \mathbf{Semcom}_C \to C$ produz uma mônada em **C** que gera os semigrupos livres comutativos de **C**. Representamos esta mônada por $(+, \nu, \mu)$ onde $+ = U.F$ e $\mu : +^2 \to +$ "achata os multisets" (ou sequências comutativas). Como uma direta consequência da proposição do capítulo 4, temos que $C^+ \cong \mathbf{Semcom}_C$ (C^+ é a categoria de Eilenberg-Moore das $+$-álgebras).

Usando a mônada $(+, \nu, \mu)$ de **C** será definida uma comônada em **DC**, da mesma maneira como foi definido na caso anterior para modelar a Lógica Linear Intuicionista, mas usando o funtor $+$ no lugar do funtor $\star_c$:

O endofuntor $! : \mathbf{DC} \to \mathbf{DC}$ é definido tal que a um objeto $\alpha : A \rightarrowtail U \times X$ associa o objeto $!\alpha : !A \rightarrowtail U \times X^+$ que é o "pullback" do objeto $\alpha^+ : A^+ \rightarrowtail (U \times X)^+$ ao longo de $C(U, X) : U \times X^+ \to (U \times X)^+$ (este último morfismo é obtido através da unidade da adjunção de F e U em **C**, transpondo exponencialmente e aplicando o homomorfismo de semigrupos). Este funtor atua sobre morfismos em **DC** associando o morfismo (f, F) com o $(f, !F)$ onde $!F = F^+.C(U, Y) : U \times Y^+ \to X^+$.

Que $!$ é realmente um endofuntor e que existem transformações naturais $\delta_A : !A \to !!A$, definida pela identidade na primeira componente $U \to U$ e por $\mu_+ : U \times X^{++} \to X^+$ (esquecer parênteses de X) na segunda; e $\varepsilon_A : !A \to A$, definida pela identidade $U \to U$ na primeira componente e por $\nu_+ : U \times X \to X^+$ (produzir o multiset unitário de X) tal que definem uma comônada $(!, \delta, \varepsilon)$ segue da prova em [dP88, pag 31].

Usando os resultados de [dP88] para o caso de comonóides, é possível obter também neste caso que: o funtor de esquecimento $U : \mathbf{Cosecom}_{DC} \to DC$ tem um adjunto à direita $R : \mathbf{DC} \to \mathbf{Cosecom}_{DC}$ tal que $U.R = !$. E assim, usando a proposição estabelecida no capítulo 4 temos que $\mathbf{DC}^+ \cong \mathbf{Cosecom}_{DC}$. E então, $\mathbf{DC}_+ \subseteq \mathbf{Cosecom}_{DC}$ como exigido para ser modelo de $\mathrm{LLI}_!$.

Para verificar que a comônada $(!, \delta, \varepsilon)$ é monoidal, i.e. o funtor $!$ é monoidal e as transformações naturais são monoidais, é preciso definir uma transformação natural $r_{X,Y} : (X \times Y)^+ \to X^+ \times Y^+$ em **C** ([dP88, pag.28]) que permite definir o morfismo i e a transformação natural ϵ em **DC** tal que comutam os diagramas para verificar que o funtor $!$ é monoidal. Para verificar que $\delta_A : !A \to !!A$ é uma transformação natural monoidal é preciso usar o fato de que composição de funtores e/ou de transformações naturais monoidais é de novo monoidal.

Assim, chegamos ao resultado esperado: as categorias **DC** junto com a comônada $(!, \delta, \varepsilon)$ são um modelo para a lógica $\mathrm{LLI}_!$.

As categorias GC

Já vimos que as categorias **GC** são categorias lineares, i.e. modelam a lógica que nesta tese é chamada de LLI (supondo que **C** é uma categoria cartesiana fechada, com coprodutos estáveis e disjuntos). Para modelar a lógica LLI$_!$ temos que definir as comônadas em **GC** que compostas definam a comônada que satisfaça aos requisitos.

Se **C** tem estrutura de semigrupo livre comutativo, i.e. temos uma adjunção entre **C** e $\mathbf{Semcom}_C$, pode-se definir uma mônada cujo funtor $+ : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ define os semigrupos livres comutativos de um objeto A de **C**.

Define-se a partir do funtor + um novo endofuntor, chamado S, da seguinte maneira: $S(A \rightarrowtail U \times X) = S(A) \rightarrowtail U \times X^+$ dado pelo seguinte “pullback”:

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r] \arrow[d, tail] & A^+ \arrow[d, tail, "\alpha^+"] \\
U \times X^+ \arrow[r, "c_{U,X}"] & (U \times X)^+
\end{tikzcd}$$

E, $S(f : U \to V, F : Y \to X) = (f, F^+ : Y^+ \to X^+)$. Que este funtor define uma comônada $(S, \varepsilon_S, \delta_S)$ em **GC** segue da prova de [dP88, pag 67].

O funtor T é definido como no caso tratado em [dP88]: $T(A \rightarrowtail U \times X) = T(A) \rightarrowtail U \times X^U$ dado pelo seguinte “pullback”:

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r] \arrow[d, tail] & A \arrow[d, tail, "\alpha"] \\
U \times X^U \arrow[r, "(\pi_1, ev)"] & U \times X
\end{tikzcd}$$

E, $T(f : U \to V, F : Y \to X) = (f, F.(-).f : Y^V \to X^U)$. Que este funtor define uma comônada $(T, \varepsilon_T, \delta_T)$ em **GC** é provado em [dP88, pag 68].

As comônadas definidas acima satisfazem a lei distributiva e então sua composição ! é de novo uma comônada em **GC**, a prova segue a encontrada em [dP88]. E usando o resultado de [dP88, pag.77] temos que cada !-coálgebra tem uma estrutura de semigrupo comutativo com respeito ao tensor definido para **GC**.

Provamos finalmente que a comônada ! é monoidal, i.e. T.S é um funtor monoidal e $\varepsilon_T.\varepsilon_S$, $\delta_T.\delta_S$ são transformações naturais monoidais. Mas isto vale porque as duas comônadas usadas para compor são monoidais, isto é: $(T, \varepsilon_T, \delta_T)$ e $(S, \varepsilon_S, \delta_S)$ são monoidais e sua composição é de novo uma comônada monoidal.

Finalmente, chegamos ao resultado esperado: as categorias **GC** junto com a comônada $(T.S, \delta_T.\delta_S, \varepsilon_T.\varepsilon_S)$ são um modelo para a lógica $\mathrm{LLI}_!$.

F APÊNDICE

Nocões Básicas da Teoria de Categorias

Apresentaremos a seguir uma série de definições básicas da Teoria de categorias que servirão de guia para um melhor entendimento do trabalho realizado nesta tese. O leitor interessado em aprofundar conhecimentos sobre teoria de categorias pode referir-se a [ML71, HS73, LS86, AM75].

A Teoria de Categorias trata de "objetos" e "morfismos" entre objetos. Objetos e morfismos são entes primitivos da Teoria de Categorias, porém eles não devem ser confundidos com conceitos da teoria de conjuntos, i.e. objetos não devem ser interpretados como coleções de elementos e morfismos não devem ser interpretados como funções entre conjuntos. Qualquer acesso imediato à estrutura interna dos objetos é proibida: todas as propriedades dos objetos devem ser especificadas pelas propriedades dos morfismos (como a existência de um particular morfismo, sua unicidade ou a validade de algumas equações entre os morfismos).

Definição F.1 *Uma* categoria $\mathbf{C}$ *é:*
- uma classe de objetos, Obj_C,
- uma classe de morfismos, $Morf_C$,
- duas operações chamadas dom e cod, que associam cada morfismo f a seu domínio e codomínio, respectivamente. Representaremos indistintamente $f : A \to B$ e $dom(f) = A, cod(f) = B$,
- cada objeto B tem associado um morfismo $id_B : B \to B$, o morfismo identidade de B,
- uma operação de composição, representada pelo ponto, que associa a cada par de morfismos f, g tal que $cod(f) = dom(g)$, um morfismo $f.g$ com $dom(f.g) = dom(g)$ e $cod(f.g) = cod(f)$,
- para cada par de morfismos f, g tal que $cod(f) = B = dom(g)$ vale a lei da identidade: $id_B.f = f$ e $g.id_B = g$. Dados os morfismos f, g, h tal que $dom(f) = cod(g)$ e $dom(g) = cod(h)$ vale a lei da associatividade: $(f.g).h = f.(g.h)$.

Numa categoria $\mathbf{C}$ a classe de morfismos com domínio A e codomínio B é representada por $\mathbf{C}[A, B]$. Uma importante ferramenta em Teoria de Categorias é o uso de diagramas para representar equações. Num diagrama, o morfismo $f : A \to B$ é desenhado como uma flecha começando em A e terminando em B. Um diagrama comuta se a composição dos morfismos ao longo de qualquer um dos caminhos seguidos entre dois objetos fixos é igual.

Definição F.2 *Uma categoria* $\mathbf{D}$ *é uma* subcategoria *de uma categoria* $\mathbf{C}$ *se:*
- os objetos de $\mathbf{D}$ *são também objetos de* $\mathbf{C}$,
- todo morfismo $f : A \to B$ em $\mathbf{D}$ *é também um morfismo* $\mathbf{C}$,
- a composição e as identidades coincidem em $\mathbf{D}$ *e em* $\mathbf{C}$.

Uma subcategoria $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ é uma *subcategoria plena* se todo morfismo $f : A \to B$ em $\mathbf{C}$ é também um morfismo $\mathbf{D}$, quando A e B são objetos de $\mathbf{D}$.

Definição F.3 *A* categoria oposta (ou dual) $\mathbf{C}^{OP}$ *da categoria* $\mathbf{C}$ *tem os mesmos objetos que* $\mathbf{C}$ *e um morfismo $f : A \to B$ está em* $\mathbf{C}^{OP}$ *sse $f : B \to A$ está em* $\mathbf{C}$*; a composição $._{OP}$ é definida por $f._{OP}g = g.f$.*

Definição F.4 *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* A, B *objetos de* $\mathbf{C}$*, então:*
- um morfismo $h : A \rightarrow B$ *é um* monomorfismo *sse para qualquer* $f, g : C \rightarrow A$*, se* $h.g = h.f$ *então* $g = f$*.*
- um morfismo $h : A \rightarrow B$ *é um* epimorfismo *sse para qualquer* $f, g : B \rightarrow C$*, se* $g.h = f.h$ *então* $g = f$*.*
- um morfismo $h : A \rightarrow B$ *é um* isomorfismo *sse existe um morfismo* $g : B \rightarrow A$ *tal que* $g.h = id_A$ *e* $h.g = id_B$*.*

Dois objetos A, B são *isomórficos*, $A \cong B$, se existe um isomorfismo $h : A \xrightarrow{\sim} B$.

Definição F.5 *Um* subobjeto *de um objeto* B *de categoria* $\mathbf{C}$ *é um par* (A, f)*, onde* A *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f : A \rightarrow B$ *é um monomorfismo em* $\mathbf{C}$*.*

Definição F.6 *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria. Um objeto, representado por 0, é* inicial *sse para cada objeto* B *de* $\mathbf{C}$ *há um único morfismo* $f : 0 \rightarrow B$*. Um objeto, representado por 1, é* terminal *sse para cada objeto* B *de* $\mathbf{C}$ *há um único morfismo* $f : B \rightarrow 1$*.*

Observe que numa categoria, objetos inicias e terminais são únicos, a menos de isomorfismos.

Definição F.7 *Dado um par de morfismos* $f, g : A \rightarrow B$ *numa categoria* $\mathbf{C}$*, um* equalizador *para* f *e* g *é um par* (E, i)*, onde* E *é um objeto de* $\mathbf{C}$*,* $i : E \rightarrow A$ *é um morfismo de* $\mathbf{C}$ *tal que:*
- $f.i = g.i$
- para todo morfismo $h : C \rightarrow A$ *tal que* $f.h = g.h$ *existe um único morfismo* $k : C \rightarrow E$ *em* $\mathbf{C}$ *tal que* $i.k = h$*.*

De forma dual são definidos *co-equalizadores*.

Definição F.8 *Dado um par de morfismos* $f : B \rightarrow A$*,* $g : C \rightarrow A$ *numa categoria* $\mathbf{C}$*, um* pullback *de* f *e* g *é uma tripla* (P, p, q)*, onde* P *é um objeto de* $\mathbf{C}$*,* $p : P \rightarrow B$ *e* $q : P \rightarrow C$ *são morfismos tal que:*
- $f.p = g.q$*,*
- para cada outra tripla (D, h, k) *tal que* $f.h = g.k$*, existe um único morfismo* $l : D \rightarrow P$ *tal que* $p.l = h$ *e* $q.l = k$

A noção dual é chamada *pushout*.

Definição F.9 *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* A, B *objetos de* $\mathbf{C}$*. O* produto categórico *de* A *e* B *é uma tripla* $(A \times B, \Pi_{A,B}, \Pi'_{A,B})$*, onde* $A \times B$ *é um objeto da categoria* $\mathbf{C}$*,* $\Pi_{A,B} : A \times B \rightarrow A$*,* $\Pi'_{A,B} : A \times B \rightarrow B$ *são morfismos de* $\mathbf{C}$*, tal que dada qualquer outra tripla* $(C, f : C \rightarrow A, g : C \rightarrow B)$ *existe um único morfismo* $< f, g >: C \rightarrow A \times B$ *em* $\mathbf{C}$ *satisfazendo as equações:*
- $\Pi_{A,B}. < f, g >= f$
-$\Pi'_{A,B} < f, g >= g$

Note que a unicidade do morfismo $< f, g >$ pode ser estabelecida pela equação:
$< \Pi_{A,B}.h, \Pi'_{A,B}.h >= h$ para todo morfismo $h : C \rightarrow A \times B$. Observe também, que o produto é único, a menos de isomorfismo. A noção dual é chamada *co-produto*.

Definição F.10 *Uma categoria* $\mathbf{C}$ *é cartesiana se:*
- tem objeto terminal 1,
- para cada par de objetos A, B *existe o produto* $A \times B$.

Definição F.11 *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria, e* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$. *Um* cone *para* D *é um objeto* X *em* $\mathbf{C}$ *junto com uma familia* $f_i : X \to D_i$ *de morfismos de* $\mathbf{C}$ *(um morfismo para cada objeto* D_i *em* D*) tal que* $g.f_i = f_j$ *para cada morfismo* g *em* D.

Um limite *para um diagrama* D *é um cone* $(X, f_i : X \to D_i)$ *para* D *tal que se* $(X', f'_i : X' \to D_i)$ *é outro cone para* D*, então existe um único morfismo* $k : X' \to X$ *tal que* $f_i.k = f'_i$, *para cada* D_i *em* D.

As noções duais são chamadas de *co-cone e co-limite*. Observe que equalizadores, pushouts e produtos são todos exemplos de limites. Uma categoria $\mathbf{C}$ se diz *completa* se todos os diagramas em $\mathbf{C}$ têm limites (isto significa que produtos, co-produtos, equalizadores, co-equalizadores existem).

Definição F.12 *Sejam* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *duas categorias. Um* funtor (covariante) $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *é um par de operações* $F_{obj} : Obj_C \to Obj_D$, $F_{Morf} : Morf_C \to Morf_D$ *tal que para cada* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *em* $\mathbf{C}$*:*
- $F_{Morf}(f) : F_{obj}(A) \to F_{obj}(B)$,
- $F_{Morf}(g.f) = F_{Morf}(g).F_{Morf}(f)$,
- $F_{Morf}(id_A) = id_{F_{obj}(A)}$.

É usual na prática esquecer os sub-índices "Morf" e "Obj" já que é claro do contexto se o funtor F atua nos objetos ou nos morfismos.

Definição F.13 *Sejam* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *duas categorias. Um* funtor (contravariante) $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *é um par de operações* $F_{obj} : Obj_C \to Obj_D$, $F_{Morf} : Morf_C \to Morf_D$ *tal que para cada par* $f : A \to B, g : B \to C$ *em* $\mathbf{C}$*:*
- $F_{Morf}(f) : F_{obj}(B) \to F_{obj}(A)$,
- $F_{Morf}(g.f) = F_{Morf}(f).F_{Morf}(g)$,
- $F_{Morf}(id_A) = id_{F_{obj}(A)}$.

Observe que un funtor contravariante de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ é um funtor covariante de $\mathbf{C}^{OP}$ em $\mathbf{D}$.

O funtor identidade $Id_C : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ é a identidade em objetos e em morfismos. A composição de funtores $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$ é definida por: $GF(A) = G(F(A))$ e $GF(f) = G(F(f))$, para todo objeto A e morfismo $f : A \to B$ de $\mathbf{C}$.

Um exemplo de funtor é o funtor produto [LS86, pag.53]. Este funtor depende de dois argumentos (por isso, chamado de bi-funtor) $F : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ e é definido por $F(A, B) = A \times B$ nos objetos e por $F(f, g) =< f.\Pi, g.\Pi' >$, sempre que $f : A \to B$ e $g : C \to D$.

Um funtor que "esquece" a estrutura dos objetos é chamado funtor de *esquecimento*, por exemplo o funtor F : **Grp** $\to$ **Set** associa um grupo na categoria dos grupos **Grp** com o conjunto subjacente na categoria dos conjuntos **Set** (com as funções entre conjuntos como morfismos). Um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de uma categoria $\mathbf{C}$ nela mesma chama-se endo-funtor.

Definição F.14 *Uma categoria se diz pequena se a classe dos objetos e a classe dos morfismos são conjuntos. Uma categoria* $\mathbf{C}$ *onde para cada objeto* A, B $\mathbf{C}$*[A,B] é um conjunto, se diz que é* localmente pequena.

Dada uma categoria $\mathbf{C}$ localmente pequena pode-se definir o bi-funtor $hom : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$, que a cada par de objetos (A, B) de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}$ associa o conjunto dos morfismos de A em B, e para cada par de morfismos $(g, h) : (A, B) \to (A', B')$ de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}$ (onde $g : A' \to A$, $h : B \to B'$ em $\mathbf{C}$) o funtor associa a cada morfismo $f : A \to B$ o morfismo $h.f.g : A' \to B'$. Associados a este funtor estão o funtor contravariante $hom(-, A) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, que envia cada objeto A' de $\mathbf{C}$ no conjunto dos morfismos de $A' \to A$ e a cada morfismo $f : A' \to A''$ associa por pré-composição cada morfismo de A'' em A a um morfismo de A' em A; e o funtor covariante $hom(A, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$, que envia cada objeto A' de $\mathbf{C}$ no conjunto dos morfismos de $A \to A'$ e a cada morfismo $f : A' \to A''$ associa por pós-composição um morfismo de A em A' a um morfismo de A em A''.

Definição F.15 *Sejam* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *dois funtores. Então* $\tau : F \to G$ *é uma* transformação natural *de* F *em* G *sse:*
- para todo objeto A *de* $\mathbf{C}$ *existe um morfismo* $\tau(A) = \tau_A : F(A) \to G(A)$ *em* $\mathbf{D}$*,*
- para todo morfismo $f : A \to B$ *em* $\mathbf{C}$ $\tau_B.F(f) = G(f).\tau_A$*.*

Se a transformação natural τ é tal que para cada objeto A, τ_A é um isomorfismo na categoria $\mathbf{D}$ se chama um *isomorfismo natural*, neste caso se representa $F \cong G$.

A transformação identidade $id_F : F \to F$ é definida por $id_F(A) = id_{F(A)}$ para cada objeto A da categoria $\mathbf{C}$. Se $\tau : F \to G$ e $\delta : G \to H$ são transformações naturais, sua *composição horizontal* $\tau.\delta : F \to H$ é definida por $(\tau.\delta)(A) = \tau_A.\delta_A$, para cada objeto A da categoria $\mathbf{C}$.

Definição F.16 *Um funtor* $[\_, \_] : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$*, contravariante em sua primeira componente e covariante na segunda, e tal que* $hom \cong G.[\_, \_]$*, onde* G *é um funtor de esquecimento* $G : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$*, chama-se um* funtor de internal-hom.

Se a categoria $\mathbf{C}$ é cartesiana, $[A, B]$ se chama de *exponenciação* e se representa pelo objeto B^A.

Definição F.17 *Dados funtores* $L : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$*,* $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*,* $K : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$*, se* $\tau : F \to G$ *é uma transformação natural, obtemos as transformações naturais* $K\tau : KF \to KG$ *e* $\tau L : FL \to GL$ *entre funtores de* $\mathbf{D}$ *em* $\mathbf{B}$ *definidas por* $(K\tau)(A) = K(\tau(A))$ *e* $(\tau L)(D) = \tau(L(D))$*, para todo objeto* A *de* $\mathbf{A}$ *e* D *de* $\mathbf{D}$*.*

Se $H : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é outro funtor e $\delta : G \to H$ outra transformação natural, então temos a seguinte lei distributiva: $K(\delta.\tau) = (K\delta).(K\tau), (\delta.\tau)L = (\delta L).(\tau L)$.

Definição F.18 *Dados funtores* $F, F' : K \to L$ *e* $G, G' : L \to M$ *e transformações naturais* $\tau : F \to F'$ *e* $\sigma : G \to G'$ *a* composição vertical $\sigma; \tau : GF \to G'F'$ *é definida por* $\sigma; \tau = (\sigma F').(G\tau) = (G'\tau).(\sigma F)$*.*

Definição F.19 *Uma* adjunção *entre categorias* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *é uma quádupla* (F, U, η, ϵ)*, onde* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *e* $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *são funtores e* $\eta : Id_A \to UF$ *e* $\epsilon : FU \to Id_B$ *são transformações naturais tal que* $(U\epsilon).(\eta U) = id_U$ *e* $(\epsilon F).(F\eta) = id_F$*. Neste caso,* U *é um adjunto à direita de* F *e* F *é um adjunto à esquerda de* U*.*

Uma propriedade importante das adjunções é que: uma adjunção (F, U, η, ϵ) entre categorias localmente pequenas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ determina e é determinada pelo isomorfismo natural $hom(F(\_), \_) \cong hom(\_, U(\_))$.

Definição F.20 *Uma adjunção* (F, U, η, ϵ) *é uma* equivalencia adjunta *se* η *e* ϵ *são isomorfismos naturais. Uma* equivalencia *de categorias* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *é dada por um par de funtores* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *e* $U : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *tal que* $UF \cong Id_A$ *e* $FU \cong Id_B$*.*

Definição F.21 *Uma categoria* $\mathbf{C}$ *é* cartesiana fechada *se* $\mathbf{C}$ *é cartesiana e se para cada objeto* B *o funtor* $\_ \times B : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *tem como adjunto à direita o funtor* $(\_)^B : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$*.*

Definição F.22 *Uma* comônada *(ou cotripla) numa categoria* $\mathbf{C}$ *é uma tripla* (T, δ, ε)*, onde* $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *é um funtor,* $\delta : T \to T^2$ *e* $\varepsilon : T \to Id$ *são transformações naturais (chamadas de comultiplicação e counidade respectivamente) tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & T^2 \arrow[d, "T\delta"] \\
T^2 \arrow[r, "\delta T"] & T^3
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T & T^2 \arrow[l, "\varepsilon T"'] \arrow[r, "T\varepsilon"] & T \\
 & T \arrow[ul, "id_T"] \arrow[u, "\delta"'] \arrow[ur, "id_T"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição F.23 *Seja* (T, δ, ε) *uma comônada numa categoria* $\mathbf{C}$*, uma* T*-coálgebra é um par* $< A, h : A \to T(A) >$*, onde* A *é um objeto da categoria* $\mathbf{C}$*, e* h *é um morfismo na categoria* $\mathbf{C}$ *tal que os diagramas comutam:*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "id"] & \\
T(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"'] & A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"'] & T(A) \arrow[d, "T(h)"] \\
T(A) \arrow[r, "\delta_A"] & T^2(A)
\end{tikzcd}
$$

Definição F.24 *Sejam* $< C, h : C \to T(C) >$ *e* $< D, l : D \to T(D) >$ *duas T-coálgebras. Um* homomorfismo *de T-coálgebras é um morfismo* $f : D \to C$ *em* $\mathbf{C}$ *tal que* $T(f).l = h.f$

Definição F.25 *Seja* (T, δ, ε) *uma comônada numa categoria* $\mathbf{C}$. *A* categoria de Eilenberg-Moore $\mathbf{C}^T$ *da comônada* (T, δ, ε) *tem como objetos T-coálgebras e como morfismos, homomorfismos de T-coálgebras.*

Proposição F.1 *Seja* (T, δ, ε) *uma comônada numa categoria* $\mathbf{C}$. *Para cada objeto* C *da categoria* $\mathbf{C}$, $(T(C), \delta_C)$ *é uma coálgebra, chamada de coálgebra livre gerada pelo objeto* C *com respeito a* T.
Prova: [Asp90, pag.32], onde a prova é feita para o caso de uma mônada.

Proposição F.2 *Se* (T, δ, ε) *é uma comônada numa categoria* $\mathbf{C}$, *há uma adjunção* $< F^T, U^T, \delta, \varepsilon^T_{(A,h)} = h >: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^T$, *onde* $F^T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^T$ *produz co-álgebras livres e* $U^T : \mathbf{C}^T \to \mathbf{C}$ *é o funtor de esquecimento.*
Prova: [LS86, pag 31], onde a prova é feita para o caso de mônadas.

Definição F.26 *A* categoria de Kleisli $\mathbf{C}_T$ *de uma comônada* (T, δ, ε) *numa categoria* $\mathbf{C}$, *tem como objetos os mesmos objetos que a categoria* $\mathbf{C}$, *e os morfismos* $f : A \to B$ *em* $\mathbf{C}_T$ *são morfismos* $f : T(A) \to B$ *em* $\mathbf{C}$. *Morfismos de identidades são dados em* $\mathbf{C}_T$, *por morfismos* $\varepsilon_A : T(A) \to A$ *em* $\mathbf{C}$; *e a composição de* $f : T(A) \to B$ *e* $g : T(B) \to C$ *é dado por* $g.T(f).\delta_{T(A)} : T(A) \to C$

Proposição F.3 *Se (T, δ, ε) é uma comônada numa categoria $\mathbf{C}$, há uma adjunção $< F_T, U_T, \delta, 1_T >: \mathbf{C} \to \mathbf{C}_T$, onde $U_T : \mathbf{C}_T \to \mathbf{C}$ é o funtor definido por $U_T(A) = T(A), U_T(f : A \to B) = T(f).\delta_A$, e $F_T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}_T$ é definido por $F_T(A) = A, F_T(f : A \to B) = f.\varepsilon_A$.*
Prova: [LS86, pag 33], onde a prova é feita para o caso de mônadas.

Proposição F.4 *Uma adjunção $< F, G, \nu, \epsilon >: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ define uma mônada na categoria $\mathbf{A}$, dada por $< G.F, \nu, G.\epsilon.F >$, e uma comônada na categoria $\mathbf{B}$, dada por $< F.G, \epsilon, F.\nu.G >$.*
Prova: [LS86, dP88].

Proposição F.5 *Seja $< G, H, \nu, \epsilon >: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ uma adjunção, e $< G.H, \epsilon, G.\nu.H >$ a comônada que ela define na categoria $\mathbf{B}$, então há unicos funtores $K : \mathbf{A} \to \mathbf{B}^{G.H}$, $L : \mathbf{B}_{G.H} \to \mathbf{A}$, chamados de funtores de comparação, que fazem comutar o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
B_{G.H} \arrow[r, "L"] \arrow[d, shift left=2, "U_{G.H}"] & A \arrow[r, "K"] \arrow[d, shift left=2, "G"] & B^{G.H} \arrow[d, shift left=2, "U^{G.H}"] \\
B \arrow[u, shift left=2, "F_{G.H}"] \arrow[u, phantom, "a"] \arrow[r, leftrightarrow, "id"] & B \arrow[u, shift left=2, "H"] \arrow[u, phantom, "a"] \arrow[r, leftrightarrow, "id"] & B \arrow[u, shift left=2, "F^{G.H}"] \arrow[u, phantom, "a"]
\end{tikzcd}$$

Prova: [ML71].

Como corolários da proposição anterior obtemos que:
Se (T, δ, ε) é uma comônada numa categoria $\mathbf{C}$ um caso especial do funtor de comparação é o funtor $K : \mathbf{C}_T \to \mathbf{C}^T$ e então se tem funtores: $C \xrightarrow{F_T} \mathbf{C}_T \xrightarrow{K} \mathbf{C}^T \xrightarrow{U^T} \mathbf{C}$, [LS86]. E também que, a categoria de Kleisli de uma comônada (T, δ, ε) numa categoria $\mathbf{C}$ é equivalente à subcategoria completa das coálgebras livres da categoria de Eilenberg-Moore da mesma comônada, [LS86, pag 35].