6º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

RESUMO DOS TRABALHOS

Introdução

O 6º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional é uma realização científica organizada pelas seguintes instituições:

- SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL - SBMAC
- INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA - CTA/ITA
- INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS - CNPq/INPE
- LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - CNPq/LCC

E patrocinada por:

- CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO - CNPq
- INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS - CNPq/INPE
- IBM DO BRASIL
- FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DE SÃO PAULO - FAPESP

Local do Evento

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA - CTA/ITA
26 a 30 de setembro de 1983
São José dos Campos - SP

" ALTERNATIVAS PARA CORREÇÃO DO ERRO DOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA PARA A SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS "

Marco Antonio Mortari Rezende
Aluno do Curso de Engenharia
Elétrica da PUC/RJ

Orientadora: Prof$\underline{^{a}}$. Therezinha Chaves
Dep. Informática - PUC/RJ

Apresentação

Esse trabalho baseia-se em resultados teóricos obtidos em [3], onde partindo-se de uma fórmula de Runge-Kutta de ordem p, nível s e função erro principal d_1, constrói-se uma família de fórmulas de Runge-Kutta de ordem p, nível s' e função de erro de$_2$ $=(1-M)d_1$. Uma das vantagens ao se trabalhar com tais fórmulas é obter-se aproximações de ordem p+1, embora as fórmulas usadas sejam apenas de ordem p.

Introdução

Um método M-cíclico é aquele em que, para a determinação de M sucessivas aproximações y_{k+i}, i=1,2,...,M da solução da E.D.O.

$$y'(x) = f(x,y(x)),\ y(a) = \eta_o\ ,\ x\epsilon[a,b] \qquad (1)$$

utiliza ciclicamente M fórmulas distintas.

Nesse trabalho utilizamos particulares métodos M-cíclicos, baseados na idéia geral de se calcular aproximações numéricas através da combinação de um método de Runge-Kutta de ordem p e nível s, usado M-1 vezes e de um outro método de Runge-Kutta de ordem também p e passo s', obtido de tal maneira se reduza o erro acumulado nos M-1 passos anteriores.

Como caso particular escolhemos um método de Runge-Kutta de nível e ordem 2. A partir dele determinamos um outro método de Runge-Kutta, de nível 3 e ordem 2, de modo que seu erro principal , d_2, fosse: $d_2 = (1-M)d_1$ (2)

onde d_1 é o erro do primeiro método.

O Método

A forma geral de um método de Runge-Kutta de nível 3 é:

$$y_{k+1} = y_k + h\ \Phi_1(x,y;h) = y_k + h \sum_{i=1}^{3} \mu_i\ k_i \tag{3}$$

onde $k_1 = f(x,y)$; $k_2 = f(x+\alpha_2\ h,\ y+\beta_{21}\ k_1 h)$;

$k_3 = f(x+\alpha_3 h, y + \beta_{31}k_1 h + \beta_{32}k_2 h)$, onde consideramos $\beta_{31} = 0$.

Como é mostrado em [1], y_{k+1} seria exato se Φ_1 fosse a expansão infinita de f em série de Taylor. Logo a diferença entre Φ_1 e esse desenvolvimento nos fornece o erro cometido pela discretização feita, no caso por Φ_1; e tem a forma

$$\begin{aligned} d = {} & (\mu_1+\mu_2+\mu_3-1)f + (\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3 - \tfrac{1}{2})\ hf_x + (\mu_2\beta_{21}+\mu_3\beta_{32} - \tfrac{1}{2})hff_y + \\ & + (\mu_2 \frac{\alpha_2^2}{2} + \mu_3 \frac{\alpha_3^2}{2} - \frac{1}{6})\ h^2\ f_{xx} + (\mu_2\alpha_2\beta_{21} + \mu_3\alpha_3\beta_{32} - \\ & - \frac{1}{3})\ h^2 ff_{yy} + (\mu_2 \frac{\beta_{21}^2}{2} + \mu_3 \frac{\beta_{32}^2}{2} - \frac{1}{6})\ h^2 f_{yy} + \\ & + (\mu_3\beta_{32}\alpha_2 - \frac{1}{2})\ h^2 f_x f_y + (\mu_3\beta_{32} - \frac{1}{6})\ h^2 ff_y^2 + o(h^3) \end{aligned} \tag{4}$$

Para determinar um método de nível 2 devemos ter $\mu_3=\alpha_3 = \beta_{32} = 0$. Escolhendo $\mu_1=0$, $\mu_2=1$, $\alpha_2=\beta_{21} = \frac{1}{2}$ temos o tradicional método de "Euler modificado" de nível 2 e ordem 2 (conforme [1]).

Para determinarmos o método de nível 3, impondo a condição (2), e calculando os respectivos erros, temos um sistema de 6 equações com 7 variáveis e que, portanto, possui uma variável livre. Fazendo-se $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\alpha_3=\beta_{32} = \frac{3}{4}$, $\mu_1 = \frac{2M}{9}$, $\mu_2 = 1 - \frac{2M}{3}$, $\mu_3 = \frac{4M}{9}$ temos um método de nível 3 e ordem 2.

Conclução

Comninando esses dois métodos ciclicamente chegamos a resultados muito favoráveis:

1. Equação resolvida: $y'(x)=2xe^x+y(x)$, $y(0)=0$, $x\in[0,2]$, $h=0,01$

2. Resultados: Usando-se o 1º método M-1 e o segundo apenas 1 , nos pontos k assinalados, obtivemos os erros (valor aproximado menos valor exato):

k	M = 2	M = 6	M = 12	apenas o 1º método
48	1,7 E-7	1,4 E-6	3,4 E-6	6,6 E-5
96	5,2 E-7	5,1 E-6	1,2 E-5	2,7 E-4
144	1,4 E-6	1,3 E-5	3,1 E-5	8,0 E-4
188	3,4 E-6	3,4 E-5	4,2 E-5	2,3 E-3

Isso nos mostra que os resultados com a aplicação cíclica dos dois métodos é muito mais eficiente que a aplicação única do primeiro método, com um aumento pequeno de esforço computacional, que o segundo método tem nível 3.

Bibliografia

[1] Albrecht, P. - "Análise Numérica, Um Curso Moderno", Livro Técnico, 1973.

[2] Albrecht, P. - "Explicit Optimal Stability Functionals and Their application to Cyclic Discretization Methods" - Computing - 19, 1978, 233/234

[3] Martins, S. - Tese de Doutoramento U.S.P. - São Carlos (em preparação).