

# Reconstrução de Superfícies a partir de Seções Bidimensionais

Adelailson Peixoto  
peixoto@inf.puc-rio.br

Marcelo Gattass  
gattass@tecgraf.puc-rio.br

PUC-Rio.Inf.MCC 28/00 Julho, 2000

## Resumo

Este trabalho discute o problema de reconstrução de superfícies a partir de um conjunto de curvas bidimensionais, situadas em planos paralelos. Estes planos encontram-se espaçados ao longo de um dos eixos principais do sistema de coordenadas. A partir destas curvas são feitas interpolações, através de algum método específico, de modo que a superfície seja reconstruída. A forma como as curvas são interpoladas, para gerar a superfície, depende do método de reconstrução aplicada. Serão discutidas as principais técnicas de reconstrução, como cada uma aborda os principais problemas e as soluções adotadas.

**Palavras Chave.** reconstrução de superfícies, triangulações, dados volumétricos, interpolação de fatias, modelagem geométrica, seções bidimensionais, funções implícitas.

## Abstract

This work discusses the problem of reconstructing surfaces from cross-sectional contours. The contours are situated on parallel planes and are distributed along the direction of one axis of the coordinate system. The basic idea is to interpolate the contours, using a specific method, to recover the surface. The interpolation process depends on the applied reconstruction method. It will be discussed the main reconstruction techniques, how each approach treats the problems and which solution they've adopted.

**Keywords.** surface reconstruction, triangulations, volumetric data, slice interpolation, geometric modeling, cross sections, implicit functions.

# 1-Introdução

Qualquer tipo de *objeto gráfico* [13] é representado, no computador, por um conjunto finito de informações, uma vez que os recursos computacionais de memória, processamento e etc. possuem limitações físicas [12]. Estas informações finitas que representam o objeto gráfico são chamadas de *amostras*. Reconstruir um objeto significa recuperar suas informações geométricas e topológicas e seus atributos a partir do conjunto de amostras que o representa. Esta reconstrução é feita através de algum tipo de interpolação sobre as amostras.

O problema de reconstrução de objetos gráficos tem uma grande importância em todas as áreas da Computação Gráfica. Independente do tipo de objeto em questão (imagem, superfície, volumes, curvas, etc), sua reconstrução é necessária para que se possa fazer qualquer processamento sobre o mesmo. No caso de reconstrução de superfície a partir de curvas planares paralelas, cada conjunto de curvas situadas em um mesmo plano pode ser considerado uma amostra da superfície e, portanto, a interpolação destas curvas será usada para reconstruir a superfície.

## 1.1-Objetivos

A reconstrução da borda ou superfície que delimita um objeto sólido, a partir de uma série de seções planares paralelas, tem recebido bastante atenção da comunidade acadêmica nas últimas duas décadas.

Este problema pode ser matematicamente definido como:

Dado um conjunto de *contornos* ou curvas fechadas  $C_i, i=1, 2, \dots, n$ , onde cada elemento  $C_i$  está situado no plano  $z = z_i$ , encontrar a superfície  $S$  de modo que os contornos  $C_i$  sejam a interseção de  $S$  com o plano  $z = z_i$ . A figura 1a mostra os contornos paralelos distribuídos em 3 fatias. A figura 1b mostra a superfície reconstruída.

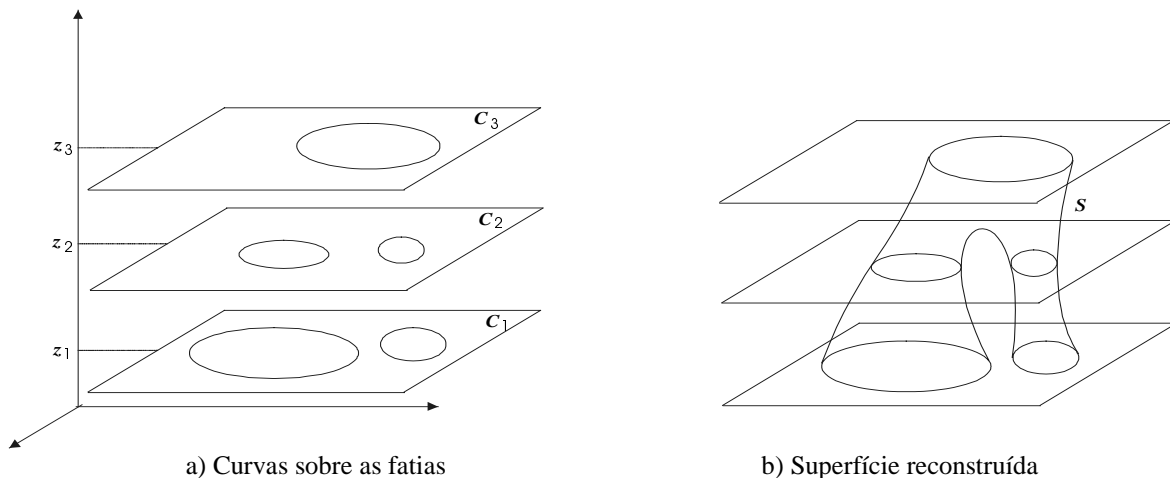


Figura 1: Reconstrução de uma superfície a partir de contornos.

Note-se que cada elemento ou amostra  $C_i$  pode ser composto por uma ou mais curvas fechadas. No caso de  $C_i$  representar mais de uma curva, não são permitidos os casos onde contornos de uma mesma fatia se interceptem.

## 1.2-Aplicações

A principal motivação para se estudar o problema de reconstrução de superfícies a partir de seções paralelas vem das aplicações voltadas para a área médica. Através de tecnologias como Tomografia Computadorizada (CT) e Ressonância Magnética (MRI) são obtidas informações sobre órgãos e tecidos humanos, que são armazenadas em fatias (imagens bidimensionais). As informações das fatias são utilizadas para definir o conjunto de contornos que, por sua vez, podem ser interpolados para gerar superfícies. Estas superfícies seriam as bordas dos órgãos ou tecidos humanos que, agora, podem ser exibidos e utilizados em aplicações gráficas (figura 2).

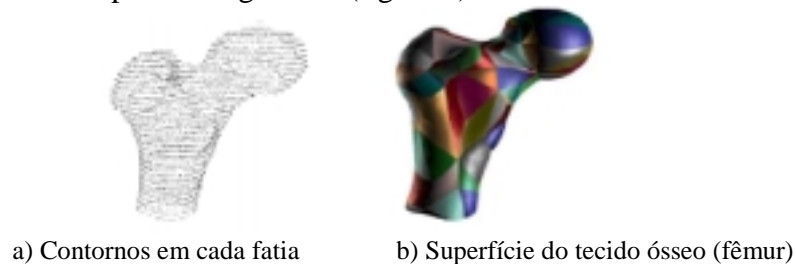


Figura 2: Reconstrução de um fêmur.

Outra aplicação destes métodos é na reconstrução de modelos tridimensionais de terrenos. Os modelos são reconstruídos a partir de contornos que representam as elevações topográficas do terreno. A figura 3a mostra as curvas de nível de um terreno, a figura 3b mostra estas curvas em suas elevações e a figura 3c mostra o terreno reconstruído em *wireframe*.

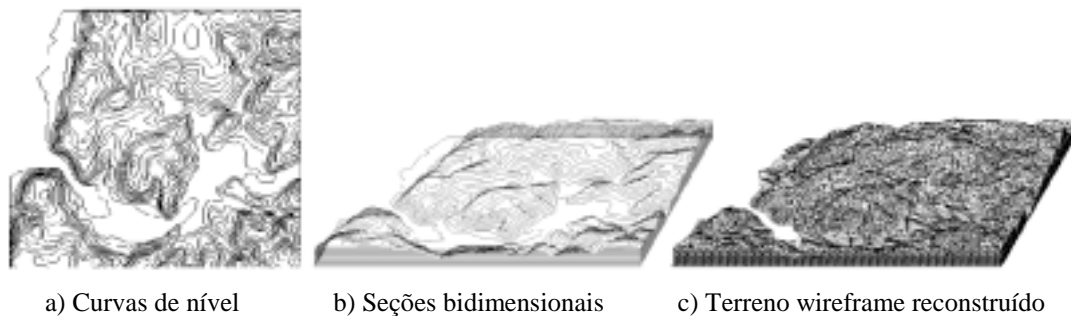


Figura 3: Reconstrução de um terreno.

Finalmente, outra área onde estes métodos de reconstrução podem ser aplicados é em Modelagem Geométrica. Após o objeto ser varrido por algum equipamento scanner, são armazenadas amostras do objeto em estruturas bidimensionais, que podem ser utilizadas para a reconstrução da superfície que define a borda do objeto.

### 1.3-Reconstrução a Partir de Fatias de Volumes

Esta seção define objeto volumétrico e discute as duas principais categorias de reconstrução a partir de um conjunto de *fatias*.

**Objeto Gráfico Volumétrico.** Um objeto volumétrico pode ser matematicamente definido como  $f: U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^m$ , onde  $U$  é o *suporte geométrico* e  $f$  é a *função de atributos* do objeto [13]. No geral o suporte geométrico é definido como um bloco  $U = [0,X] \times [0,Y] \times [0,Z]$ . A dimensão do conjunto de atributos ( $\mathbf{R}^m$ ) depende da aplicação. Por exemplo, se os atributos considerados são densidade e opacidade (dois atributos, logo  $m=2$ ), então a cada ponto  $(x, y, z) \in U$  são associados um valor de densidade e um valor de opacidade,

$$f: U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$f(x,y,z) = (f_d(x,y,z), f_o(x,y,z)),$$

onde  $f_d(x, y, z) \in \mathbf{R}$  é a função de densidade e  $f_o(x, y, z) \in \mathbf{R}$  é a função de opacidade do elemento  $(x, y, z)$ . A função de densidade é um dos principais atributos destes objetos.

No universo discreto, cada um dos três intervalos  $[0,X]$ ,  $[0,Y]$  e  $[0,Z]$  é uniformemente amostrado em  $NX$ ,  $NY$  e  $NZ$  amostras, respectivamente. Assim, o espaçamento entre cada amostra, em cada direção, será  $\Delta x = X/NX$ ,  $\Delta y = Y/NY$  e  $\Delta z = Z/NZ$ , respectivamente. Cada elemento ou *voxel* do objeto, referenciado como voxel  $(i, j, k)$ , é tratado como um pequeno bloco retangular, com dimensões  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  e coordenadas  $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \in U$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, NX-1$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, NY-1$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, NZ-1$ ). Este tipo de representação de objetos é conhecido como *representação matricial*. A figura 4a mostra um volume com um voxel. A figura 4b mostra o voxel  $(i,j,k)$  ampliado e seus 8 vértices.

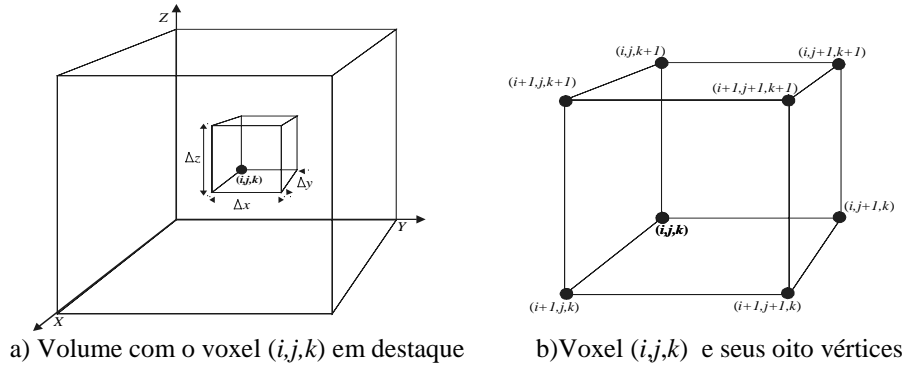


Figura 4: Dado volumétrico com seu voxel  $(i,j,k)$ .

Para cada valor de  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, NZ-1$ ) há uma fatia  $U_k$  do volume, definida como

$$U_k = \{(i, j, k); 0 \leq i \leq (NX-1) \text{ e } 0 \leq j \leq (NY-1)\},$$

cujas coordenadas  $(i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z)$  estão contidas em  $U$ . Como  $k$  é constante a fatia  $U_k$  pode ser definida simplesmente como  $U_k = \{(i, j); 0 \leq i \leq (NX-1) \text{ e } 0 \leq j \leq (NY-1)\}$ .

Para uma melhor compreensão de objetos volumétricos, o leitor pode consultar as referências [25] [18].

Existem duas categorias principais utilizadas para reconstruir um objeto, a partir do conjunto de fatias  $\{U_k\}$ : Reconstrução de Volumes e Reconstrução de Superfícies. Schumaker [24] apresenta um *survey* com algumas técnicas de reconstrução de objetos 3D.

**Reconstrução de Volumes.** Esta categoria de reconstrução varre todo o volume de dados (definido acima), buscando gerar uma imagem do objeto a partir de alguns parâmetros pré-definidos ou pré-calculados. Alguns destes parâmetros são os atributos: densidade, opacidade, textura, campos de vetores normais, etc. Tais parâmetros indicam como os dados internos do volume são combinados e processados para gerar a imagem final, através da interação com a luz. Estes métodos de reconstrução (na verdade apenas geram imagens) são usados principalmente para visualizar objetos amorfos como gases, dados geológicos e até mesmo estruturas humanas sem forma definida como sangue e gordura. Porém nada impede que estes métodos também sejam utilizados para visualizar objetos com uma morfologia bem definida. Uma das principais vantagens da reconstrução de volumes é a qualidade das imagens geradas, que dão um ótimo resultado visual de como as estruturas volumétricas estão relacionadas, dando realmente a impressão de que o dado mostrado é volumétrico. Um dos grandes problemas desta categoria de reconstrução é a grande quantidade de dados processados. Em muitos métodos, uma vez iniciado o processo de reconstrução, não há como interrompê-lo até que a imagem final do objeto seja gerada. E isto pode ser um processo muito demorado. Alguns dos métodos de reconstrução de volumes são o *ray-casting* [18] e o *shear-warping* [16]. No restante deste trabalho não serão tratados métodos de reconstrução de volumes.

**Reconstrução de Superfícies.** Nesta categoria de reconstrução, as informações internas do objeto volumétrico não são utilizadas para compor o objeto reconstruído. Estes métodos buscam reconstruir a superfície que delimita o objeto volumétrico. A partir de atributos como a função de densidade, é feita uma busca na fatias do volume, que procura definir o conjunto de contornos que irão delimitar a superfície do volume. A partir da definição destes contornos é aplicado algum método de interpolação para reconstruir a superfície do objeto. Esta categoria é utilizada principalmente para reconstruir superfícies de objetos morfologicamente bem definidos. No caso de gases, fogo ou outros objetos que representem fenômenos naturais, esta categoria não apresenta bons resultados, sendo que a reconstrução volumétrica apresenta resultados bem mais positivos nestes casos. Uma das grandes vantagens dos métodos de reconstrução de superfícies, em relação aos métodos de reconstrução volumétrica, é a quantidade de informações armazenadas. Quando se constrói a borda (superfície) de um objeto são necessárias bem menos informações do que para o seu volume. Uma vez contruída a superfície, pode-se aplicar técnicas de *rendering* conhecidas para visualizar o objeto. O restante deste trabalho irá discutir os principais métodos de reconstrução de superfícies.

## 2- Métodos de Reconstrução de Superfície a Partir de Fatias

Diversos fatores devem ser determinados antes que qualquer método de reconstrução seja aplicado a um conjunto de fatias. Dentre estes, destacam-se: quais critérios serão usados para a reconstrução, como os contornos serão representados, qual a relação entre o número de contornos.

### 2.1- Critérios para Reconstrução de Superfície

Todo método de reconstrução de superfícies procura encontrar uma boa solução para este problema a partir de critérios pré-estabelecidos. Isto porque não existe uma única solução para este problema. Na verdade o significado de uma ‘boa solução’ é um tanto subjetivo, no sentido de que depende, em parte, da intuição. Uma boa solução para o problema depende de uma série de critérios que devem ser estabelecidos para reconstruir a superfície. É claro que o bom senso deve prevalecer e há casos em que tais critérios parecem um tanto óbvios. Por exemplo, se cada fatia contém apenas um contorno e os contornos estão ligeiramente alinhados verticalmente, espera-se que a superfície reconstruída tenha um formato cilíndrico (figura 5a). No caso de os contornos não estarem sobrepostos, duas soluções consideráveis são: reconstruir a superfície com uma topologia equivalente ao cilindro (figura 5b) ou reconstruir uma superfície desconexa, onde cada contorno define uma parte da superfície (figura 5c). Estes exemplos simples mostram como é necessário que sejam estabelecidos critérios para que uma determinada solução seja encontrada.

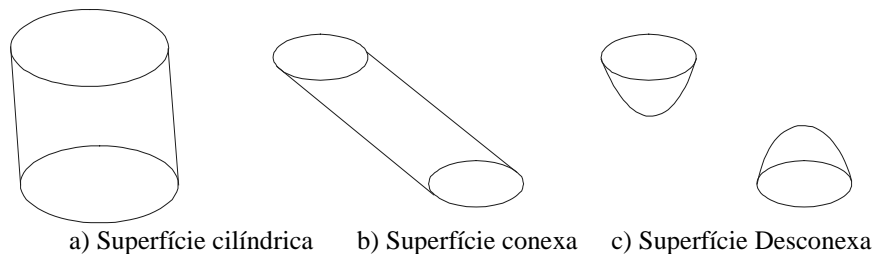


Figura 5: Possibilidades de reconstrução de superfícies entre fatias.

### 2.2-Representação de Contornos

Antes de se aplicar qualquer método de reconstrução de superfícies, é necessário resolver um outro problema: o da representação dos contornos. Assim, dada uma fatia  $U_k$ , conforme definida na seção 2.1, como representar o conjunto de contornos  $C_k$ , extraídos de  $U_k$ ? Há basicamente duas maneiras de se representar os contornos contidos nesta fatia: representação matricial e representação poligonal.

**Representação Matricial.** A própria representação da fatia  $U_k$  já é matricial. Assim a fatia  $U_k$  é composta por  $NX \times NY$  elementos e cada elemento  $(i,j)$  é um retângulo (também

chamado de pixel) de dimensão  $\Delta x \times \Delta y$ . Um elemento  $(i, j)$  de  $U_k$  pode estar sobre, dentro ou fora de um contorno fechado definido sobre a fatia. Para decidir a posição do elemento  $(i, j)$  em relação ao contorno são utilizadas uma densidade de busca  $d$  e as informações da função densidade  $f_d$  sobre os quatro vértices do retângulo  $(i, j)$ . Se a densidade  $f_d$  for menor que  $d$  nos quatro vértices do elemento  $(i, j)$ , então este retângulo é externo ao contorno. Se a densidade  $f_d$  for maior ou igual a  $d$  nos quatro vértices do elemento  $(i, j)$ , então este retângulo é interno ao contorno. Caso contrário, o retângulo  $(i, j)$  está sobre o contorno. Os contornos são definidos por todos os elementos situados sobre eles. A figura 6 mostra três retângulos situados externa (6a), internamente (6b) e sobre um contorno (6c), onde o cálculo das posições dos retângulos foi feito a partir da densidade de busca  $d=15$  e da função de densidade calculada nos quatro vértices do retângulo. A figura 7 mostra uma fatia com um contorno definido.

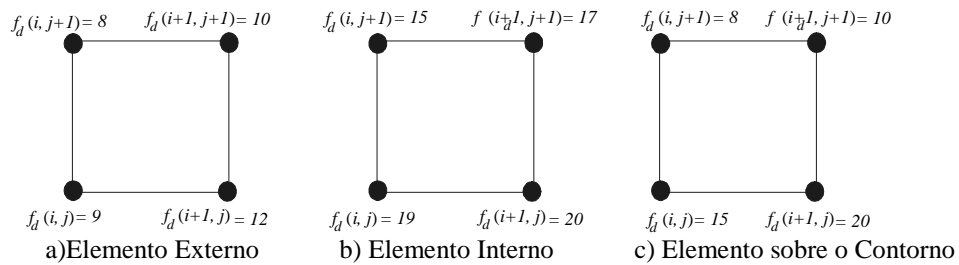


Figura 6: Classificação de um elemento (retângulo ou pixel) da fatia.

Dependendo da forma de aquisição e do tipo do objeto volumétrico, o cálculo dos contornos pode não resultar em curvas bem definidas, simples e sem interseções. A extração de contornos bem definidos está diretamente ligada à variação da função de densidade ao longo dos voxels do objeto. Portanto é de fundamental importância estudar o comportamento da função de densidade em cada fatia

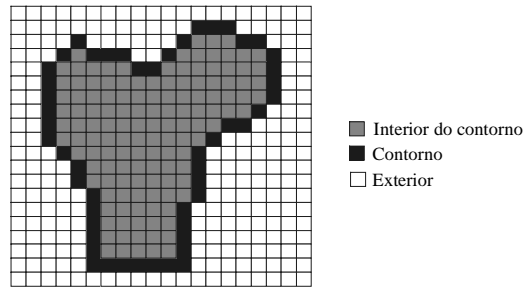


Figura 7: Contorno com representação matricial sobre a fatia.

Um método clássico que utiliza esta representação de contornos, para reconstruir uma superfície é o *marching cubes* [19]. Neste método, os contornos não são diretamente extraídos de cada fatia separadamente. Dado o valor de densidade de busca  $d$ , o volume vai sendo varrido e, para cada voxel  $(i, j, k)$  (um voxel está situado entre duas fatias consecutivas), a função de densidade determina como é feita a interpolação entre as fatias, dentro daquele voxel. É então gerada uma triangulação, dentro do voxel. Após percorrer todos os voxels do volume, a superfície está finalmente reconstruída. Vale

ressaltar que este método difere dos métodos que serão aqui abordados, no sentido em a superfície não vai sendo gerada entre duas fatias consecutivas, mas dentro de cada voxel separadamente. No geral, este algoritmo funciona melhor para objetos morfológicamente bem definidos, pois nestes casos, a variação da função de densidade facilita a definição da borda (contornos) dos objetos. No caso da extração de estruturas amorfas, as superfícies reconstruídas não apresentam resultados tão bons. Outro problema do marching cubes é a enorme quantidade de triângulos gerados dentro dos voxels.

**Representação Poligonal.** Nesta representação, cada contorno do conjunto  $C_k$  é representado por um conjunto de ponto  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (figura 8).

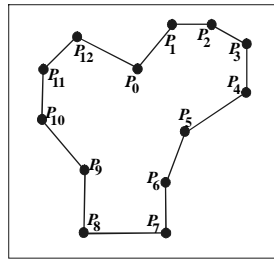


Figura 8: Contorno com representação poligonal.

Maioria dos métodos de reconstrução utilizam este tipo de representação dos contornos para gerar uma superfície triangulada. Há diversas maneiras de gerar uma representação poligonal dos contornos. Em [1] é implementada uma versão 2D do algoritmo de marching cubes [19], para extrair os contornos poligonais de cada fatia. Em qualquer algoritmo, a extração dos contornos é feita sempre a partir de uma densidade de busca  $d$  e da função de densidade do objeto. Assim como na representação matricial, dependendo do tipo e da forma de aquisição do objeto volumétrico, os contornos encontrados podem não estar bem definidos, sendo necessário algum processamento extra, para sua definição.

Há diversas técnicas de *segmentação* de imagens e *extração de arestas* que podem ser utilizadas para definir os contornos das fatias. Os métodos de reconstrução de superfícies, em geral, consideram que os contornos foram extraídos previamente e os utilizam como dados de entrada.

### 2.3-Relação entre o Número de Contornos das Fatias

Dentre os primeiros métodos de reconstrução que surgiram, maioria consideram que cada fatia pode conter apenas um único contorno, ou seja, fatias contendo contornos iguais ao  $C_1$  e  $C_2$ , da figura 1, não são permitidas. São permitidas apenas fatias semelhantes a  $C_3$ . Estes métodos são referenciados como *1-1* [14][15]. Em contrapartida, há métodos que admitem a relação *1-n*, ou seja a cada duas fatias consecutivas, uma contém uma única curva enquanto a outra pode conter diversas curvas (desde que não se interceptem) [8][1][2]. Há ainda métodos de reconstrução que admitem a relação *m-n* entre duas fatias



consecutivas, ou seja, ambas podem conter mais de um contorno[1][2]. A figura 9 mostra os três casos.

É claro que os métodos  $m-n$  são mais poderosos, uma vez que representam mais possibilidades para reconstruir superfícies com topologias complexas.

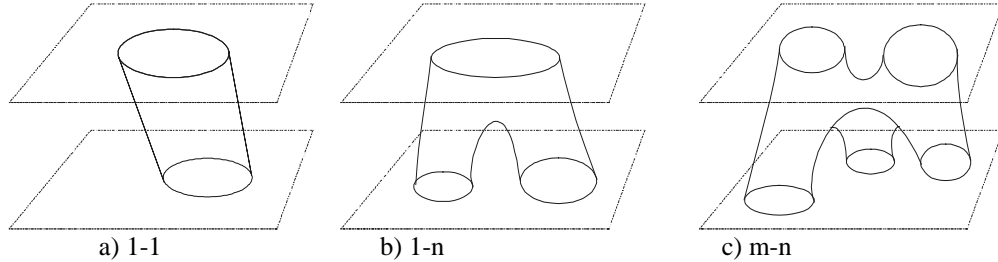


Figura 9: Relação entre o número de contornos adjacentes.

Alguns métodos  $m-n$  são implementados em cima da relação  $1-n$  [8]. Ou seja, dadas duas fatias  $C_1$  e  $C_2$ , cuja relação é  $m-n$ , uma nova fatia  $C_3$ , contendo apenas um contorno, é inserida entre  $C_1$  e  $C_2$ . Agora as fatias  $C_1$  e  $C_3$  e as fatias  $C_3$  e  $C_2$  mantêm uma relação  $1-n$ , podendo-se utilizar métodos equivalentes  $1-n$  para a reconstrução da superfície (figura 10).

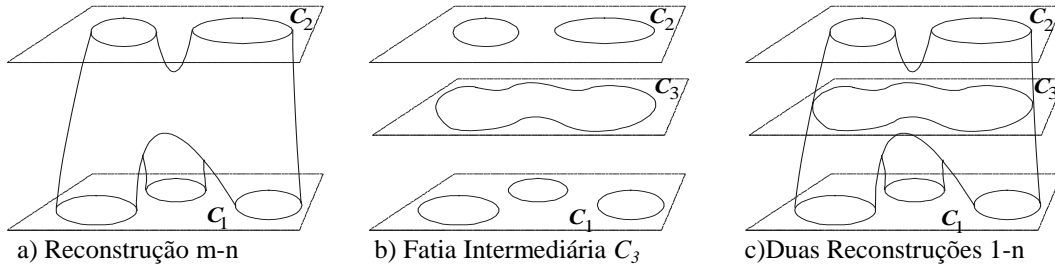


Figura 10: Reconstrução a partir de contornos intermediários.

## 2.4-Métodos Heurísticos e Métodos Implícitos

Dado o conjunto de *contornos*  $C_i, i=1, 2, \dots, n$ , pode-se destacar dois tipos de métodos para reconstruir a superfície  $S$  a partir dos  $C_i$ 's: Métodos Heurísticos e Métodos Implícitos.

Nos Métodos Heurísticos a superfície é reconstruída a partir de um conjunto de regras ou heurísticas pré-estabelecidas. Assim, a partir de um conjunto de axiomas são determinadas a topologia e a geometria da superfície.

Nos Métodos Implícitos a superfície é definida como uma iso-superfície de uma função implícita  $F$  (em geral a iso-superfície  $F=0$ ). A função  $F$  é determinada através da interpolação de funções definidas em cada fatia. A seguir, estes dois métodos serão tratados detalhadamente.

### 3-Métodos Heurísticos

Foi visto anteriormente que a reconstrução de uma superfície a partir de fatias depende de uma série de critérios pré-estabelecidos. Tais critérios podem ser determinados a partir de um conjunto de heurísticas que ditam as regras da reconstrução. De um modo geral os métodos heurísticos consideram que os contornos utilizados nas fatias são representados por curvas poligonais fechadas (representação poligonal) e a interpolação aplicada para reconstruir a superfície gera uma malha triangular. A representação poligonal dos contornos é mais apropriada do que a matricial, pois os pontos dos polígonos serão utilizados para compor esta malha triangular da superfície.

Dado o conjunto de contornos representados poligonalmente, há três etapas distintas, durante a construção da superfície:

- Correspondência** Estabelecimento das conexões entre os contornos de fatias adjacentes,
- Geração da Malha** Geração de uma malha (em geral triangular) para conectar contornos adjacentes, gerando a superfície.
- Bifurcações** Como são resolvidas as mudanças topológicas entre uma fatia e outra (relação  $m-n$ ).

Há métodos que tratam as três etapas para gerar a superfície. Outros métodos tratam apenas uma ou outra. A seguir as três etapas são detalhadas.

#### 3.1-Correspondência

Na etapa da correspondência são determinados quais contornos de duas fatias adjacentes devem ser conectados. É esta etapa que estabelece a topologia da superfície reconstruída. A figura 11 mostra várias possibilidades de conexão dos contornos definidos em três fatias.

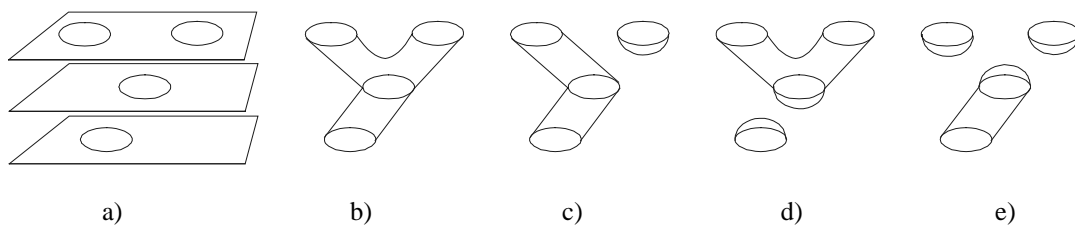


Figura 11: Diferentes formas de conexão entre os contornos.

Esta etapa visa estabelecer a conexão correta entre os contornos das fatias adjacentes. De um modo geral, se os contornos se encontram muito distantes entre si, não há conexão entre eles. Estas decisões podem ser tomadas com base na resolução das informações das fatias. Por exemplo, quando o espaçamento entre fatias adjacentes não é muito grande, é

possível estabelecer a conexão dos contornos, baseando-se nas suas projeções nas fatias adjacentes, como o método apresentado por Wang [29]. Há diversos métodos que assumem que a correspondência é estabelecida localmente, o que facilita esta etapa [8][22] (A seção 3.4 mostra um exemplo com todas as etapas de reconstrução).

Se os dados, porém, não são densos o suficiente, são necessárias informações mais globais para determinar a correspondência entre os contornos, ou seja, é necessário que se tenha uma visão global dos dados, em vez de trabalhar localmente apenas nas fatias adjacentes. Meyer et al. [20] e Soroka [28] desenvolveram métodos em que os contornos são aproximados por elipses e em seguida agrupados em cilindros, como uma forma de estabelecer a correspondência .

Em geral, o estabelecimento da conexão se torna facilitado quando as fatias admitem apenas um contorno (relação 1-1) [14][15]. Neste caso ou os contornos se conectam (formando uma superfície contínua) ou não (formando uma superfície descontínua).

### 3.2-Geração da Malha Entre os Contornos

Nesta etapa, também chamada de *tiling*, os contornos correspondentes (definidos na etapa anterior) de cada duas fatias adjacentes são interpolados, de modo que a superfície é reconstruída entre eles. Este problema envolve a geração de uma malha triangular entre os contornos correspondentes. Como estes estão representados poligonalmente, esta etapa visa definir quais vértices de um contorno são ligados a quais vértices de seu contorno correspondente, para gerar a malha triangular. A figura 12 mostra a triangulação gerada entre dois contornos. Para facilitar as definições, cada aresta que liga dois vértices de contornos diferentes será chamada de *corda*, conforma mostra a figura. Cada triângulo da triangulação contém duas cordas e um segmento de contorno.

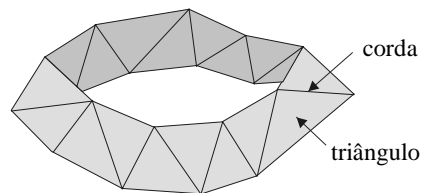


Figura 12: Malha triangular gerada entre dois contornos.

É muito difícil obter uma triangulação topologicamente correta quando os contornos correspondentes são muito diferentes. Gitlin et al. [11] mostram um exemplo em que não se pode construir uma malha triangular entre dois contornos.

Há vários critérios que podem ser considerados para gerar uma triangulação ótima. Há métodos que consideram critérios métricos, como área da superfície ou volume do objeto, para obter uma triangulação [14][15]. Outros métodos consideram critérios topológicos [1][2].

As primeiras soluções para o problema do *tiling* foram propostas por Keppel [15] e Fuchs et al. [14] que estabeleceram critérios para unir os contornos, baseando-se no problema de busca em grafos. Com base na busca do caminho mais curto no grafo, Keppel procura gerar uma triangulação que represente o poliedro de maior volume, enquanto Fuchs et al. geram uma triangulação que represente o poliedro de menor área. Porém, além de considerar a relação *1-1* entre fatias consecutivas, os métodos de Keppel e Fuchs et al. têm a restrição de que os contornos devem ser semelhantes.

Uma técnica muito usada para gerar a malha triangular é o *Mapeamento de Contornos*, no qual os contornos são mapeados em polígonos auxiliares. A malha triangular é, então, gerada através destes polígonos auxiliares. Esta técnica é usada principalmente quando os contornos correspondentes não apresentam grau de semelhança. Abaixo são descritos alguns métodos baseados em Mapeamento de Contornos.

Christiansen et al.[6] desenvolveram uma heurística em que a geração dos triângulos entre dois contornos é baseada na escolha das menores cordas. Neste método, que admite contornos não semelhantes, os contornos são mapeados em quadrados unitários (polígonos auxiliares). A triangulação é construída entre os quadrados, em seguida estas informações são mapeadas de volta aos contornos originais. Este método funciona melhor quando aplicado a contornos semelhantes.

Ekoule et al. [8] desenvolveram uma heurística para aplicar a contornos correspondentes que não precisam ser semelhantes, mas possuem fechos convexos semelhantes, os quais são usados como polígonos auxiliares. Neste método, é gerada uma triangulação entre os fechos convexos, de acordo com a heurística das menores cordas. Em seguida, as partes côncavas dos contornos são mapeadas em seus fechos convexos correspondentes, e isto determina a triangulação dos contornos. Este método evita alguns casos anormais produzidos pelo método de Christiansen et al.

Outro método que utiliza Mapeamento de Contornos foi desenvolvido por Batnitzky et al.[3], onde os polígonos auxiliares são *polígonos estrelados*, ou seja, polígonos onde há pontos internos que “enxergam” todos os seus vértices.

### **3.3-Bifurcações**

O problema das bifurcações, também chamado de *branching*, ocorre quando um contorno de uma fatia possui mais de um contorno correspondente na fatia adjacente (relações *1-n* e *m-n*). Neste caso a superfície reconstruída sofre uma mudança topológica entre as duas fatias. A bifurcação caracteriza um ponto de sela na superfície (figura 13c). A triangulação gerada deve, então, refletir esta alteração topológica. A possibilidade da existência de bifurcações complica consideravelmente o problema de geração da malha triangular entre os contornos. Quando um contorno de uma fatia não tem contorno correspondente na fatia adjacente, há duas topologias possíveis: ou há um buraco na superfície (figura 13a) ou há o surgimento de uma nova característica vertical da superfície (figura 13b). Quando um contorno possui dois contornos correspondentes,

ocorre a bifurcação (figura 13c). É claro que se um contorno possui  $m$  correspondentes, ocorrem  $(m-1)$  bifurcações entre estes contornos.

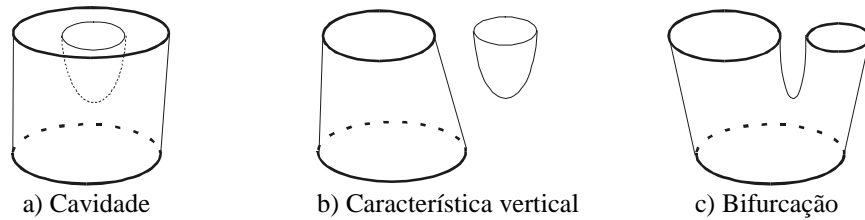


Figura 13: Alterações topológicas da superfície.

Há várias soluções consideráveis para resolver o problema das bifurcações. A figura 14 mostra 4 das mais usadas. Na figura 14b, uma curva ou ponto  $L$  é colocada entre as duas fatias para modelar o ponto de sela formado pela bifurcação. Na figura 14c a curva  $L$  é colocada sobre a fatia que contém apenas um contorno. Na figura 14d o segmento de reta  $L$  é colocado entre os dois contornos, para formar um único contorno composto; neste caso  $L$  é chamada de *ponte* e a relação entre o número de contornos passa a ser  $1-1$ . Na figura 14e é gerado um polígono composto formado pelo fecho convexo dos contornos; a região limitada pelo fecho convexo é então triangulada; neste caso o problema também passa a ser tratado como  $1-1$ . Comparando topologicamente estas soluções adotadas, a da figura 14b, em geral, é a mais correta, pois corresponde às propriedades físicas do objeto reconstruído, melhor do que as outras soluções.

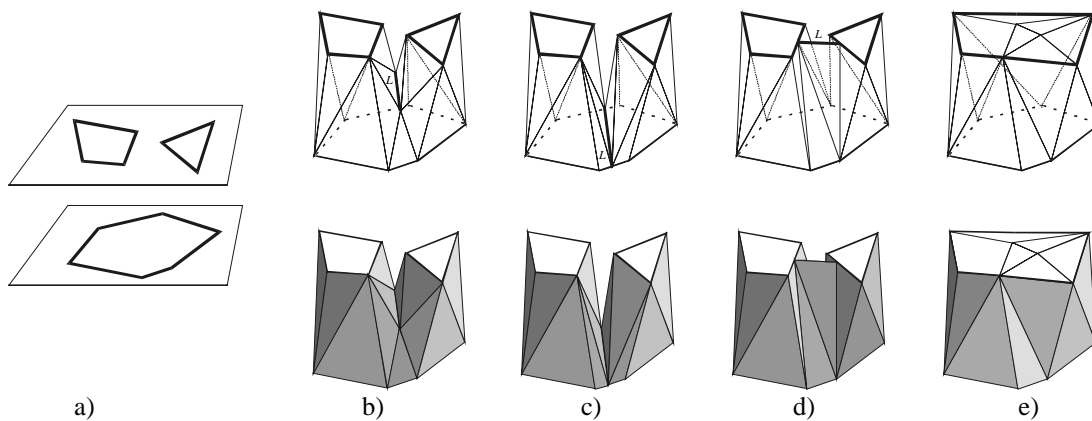


Figura 14: Diferentes soluções para as bifurcações.

O método desenvolvido por Christiansen et al.[6] é aplicado aos casos mais simples de branching (relação  $1-2$ ). Neste método, os dois contornos da mesma fatia são usados para formar um contorno composto (figura 14d). Para modelar o ponto de sela eles aplicam um deslocamento no ponto médio da ponte  $L$ . Este método apresenta falhas quando a ponte é inconsistente com a geometria do outro contorno. Nestes casos é necessária a intervenção do usuário, o que pode tornar o uso do método inviável. Outros métodos que utilizam esta técnica de branching da figura 14d foram desenvolvidos por Shantz [26] e

Shinagawa et al. [27]. No método de Ekoule et al. [8], que também faz uso de pontes para resolver o branching, é gerado um contorno composto intermediário às duas fatias que têm relação  $1-n$ . Em seguida são geradas duas malhas triangulares: uma entre o contorno intermediário e o contorno único e outra entre o contorno intermediário e os  $n$  contornos. Este método produz menos distorções do que os métodos de Christiansen, que não utiliza contornos compostos intermediário.

No método desenvolvido por Boissonnat [4] é gerada uma triangulação 2D de Delaunay nas duas fatias, separadamente. Cada triangulação é projetada na fatia adjacente. Em seguida é contruída uma triangulação de Delaunay 3D entre as duas fatias, o que resulta em um conjunto de tetraedros que definem um poliedro entre as fatias. A partir de um conjunto de heurísticas e conceitos são resolvidos os problemas de correspondência, tiling e branching, para gerar a superfície. Outros métodos foram desenvolvidos a partir deste, como o de Geiger [10] e o de Nonato [21], sendo que este último reconstrói um dado com informações volumétricas. Todos estes métodos são  $m-n$ .

Vale lembrar que nem todos os métodos heurísticos tratam as três etapas (correspondência, tiling e branching). Muitos métodos apresentam soluções para apenas um ou outro problema.

### 3.4-Exemplo de Método Heurístico

Para melhor compreensão das etapas discutidas nas seções anteriores, nesta seção será discutido um método de reconstrução de superfície baseado em um conjunto de heurísticas.

**Exemplo 1.** O método discutido neste exemplo foi desenvolvido por Barachet et al. [2].

Trata-se de um método  $m-n$ , ou seja, aplica-se aos casos onde as fatias contêm múltiplos contornos correspondentes. Não é necessário que os contornos sejam semelhantes. Para estabelecer a correspondência entre os contornos são utilizadas as suas projeções  $xy$ . Os contornos possuem orientação, o que define a região interna e a região externa ao contorno. Os contornos cujas projeções  $xy$  se sobrepuserem devem ser conectados. A figura 15a mostra os contornos nas duas fatias, a figura 15b mostra suas projeções  $xy$  e a figura 15c mostra como deve ser feita a correspondência ou conexão dos contornos.

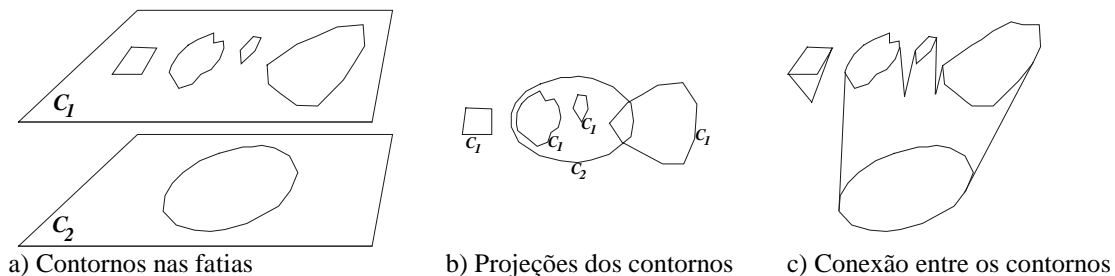


Figura 15: Correspondência entre contornos.

O tiling ou geração da malha triangular é solucionada no espaço 2D e posteriormente mapeada para o espaço tridimensional. A triangulação 2D é feita em duas etapas: primeiro é resolvida a triangulação das partes ou *regiões semelhantes* dos contornos correspondentes e, posteriormente, é resolvida a triangulação das *regiões não semelhantes*.

A parte semelhante de dois contornos correspondentes é definida como a região que é interna a um contorno e externa a outro, cuja distância aos contornos é menor do que um *threshold* pré-definido. A figura 16a mostra, em destaque, a região semelhante e a figura 16b mostra esta mesma região triangulada.

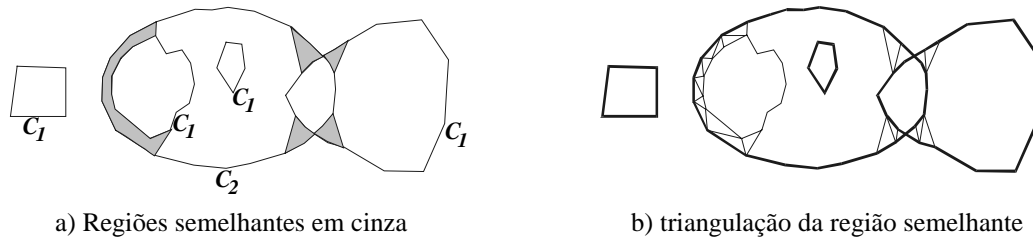


Figura 16: Definição e triangulação das regiões semelhantes.

As regiões não semelhantes são definidas pela subtração entre as projeções dos contornos e as regiões semelhantes. Assim, para definir a região não semelhante, basta retirar das projeções dos contornos, todas as arestas que fazem parte da triangulação feita na região semelhante. A figura 17a mostra a região não semelhante da figura 16. A região não semelhante obtida é formada por um conjunto de curvas poligonais fechadas e disjuntas entre si que contêm arestas dos contornos de ambas as fatias. É possível que algumas destas curvas sejam internas a outras. O interior das curvas agora deve ser triangulado. No caso de haver polígonos  $p_1, p_2, \dots, p_k$  internos a um polígono  $p$ , deve ser feito um pré-processamento antes da triangulação: é aplicado um algoritmo de *spanning tree* mínimo para introduzir arestas (pontes) que liguem  $p_1, p_2, \dots, p_k$  a  $p$ , formando assim um único polígono. A figura 17b mostra o polígono simples formado pela introdução de uma ponte e a figura 17c mostra a triangulação da região não semelhante.

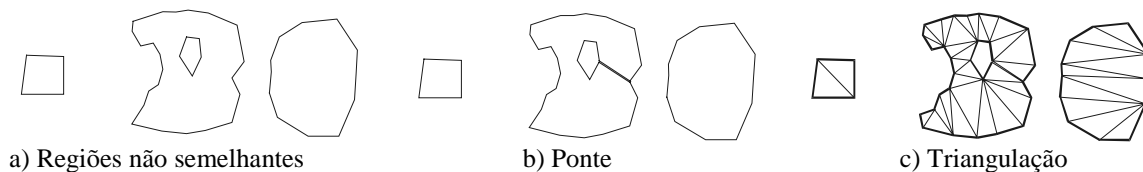


Figura 17: Definição e triangulação das regiões não semelhantes.

A triangulação 2D final é gerada pela união das duas triangulações (regiões semelhantes e não semelhantes). A figura 18a mostra a triangulação final, resultante da união. Esta triangulação define como os vértices dos contornos correspondentes são conectados para reconstruir a superfície entre as duas fatias. A figura 18b mostra a superfície reconstruída.

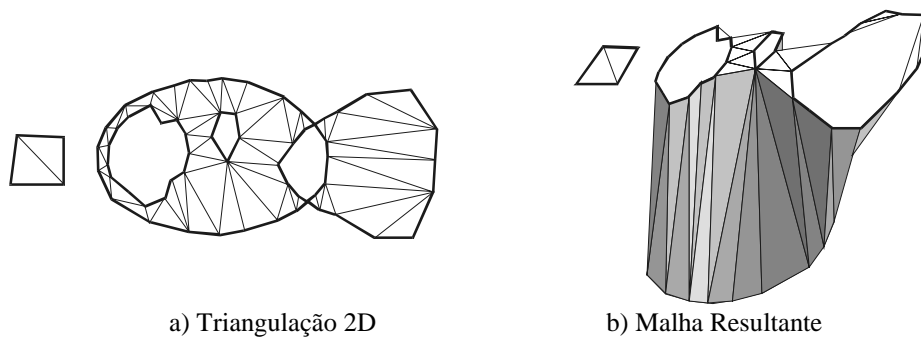


Figura 18: Triangulação final e geração da malha.

A malha gerada por este método contém triângulos tanto entre as fatias quanto na mesma fatia. Este método não trata as bifurcações de um modo específico. Nas regiões da superfícies onde deveriam ser criados pontos de sela, são criados triângulos na mesma altura dos contornos (na mesma fatia). Os contornos de uma fatia que não possuem contornos correspondentes na fatia adjacente são apenas triangulados e as características verticais esperadas (figura 13b) não são criadas.



## 4-Métodos Implícitos

A principal característica destes métodos é que a superfície é descrita como uma isosuperfície de uma função implícita  $F$ . Em geral a isosuperfície  $F=0$  é utilizada para descrever a superfície reconstruída. O método marching cubes [19] reconstrói a superfície como sendo a isosuperfície  $F=d$ , onde  $d$  é um valor de densidade qualquer. Porém, como já foi dito antes (seção 2.3), este método não considera cada fatia como sendo uma amostra, considera que cada voxel é uma amostra, e a partir destes voxels a superfície é reconstruída.

A função  $F$  é calculada através da interpolação de funções, chamadas de *field functions*, definidas sobre as fatias. Assim, a reconstrução da superfície pode ser definida a partir das etapas:

- Field Function** Definição das funções usadas nas fatias.
- Interpolação** Modo como as field functions são interpoladas para gerar  $F$  e consequentemente reconstruir a superfície.

Para os métodos implícitos, a representação matricial dos contornos é mais apropriada do que a representação poligonal, devido ao fato de haver uma correspondência natural entre representação matricial e uma função implícita. Um contorno representado matricialmente pode ser definido como o conjunto de pontos  $(x, y)$  da fatia  $U_k$ , tal que  $f_d(x,y)=d$ , que é uma descrição implícita da função de densidade.

Levin [17] discute o problema de reconstruir objetos multidimensionais a partir da interpolação de um conjunto de seções transversais. Em particular, são apresentadas algumas aplicações para o caso 3D.

### 4.1-Field Functions

As field functions são definidas localmente nas fatias. Para construir uma superfície natural e suave é necessário escolher apropriadamente as field functions, pois nem sempre elas originam uma superfície da forma correta.

Um exemplo de field function bastante utilizado é *função distância*,  $D_C : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , calculada sobre o contorno  $C$ . Assim  $D_C(x, y)$  calcula a menor distância entre o ponto  $(x,y)$  e a curva  $C$ . À função distância  $D_C$  pode ser atribuído um sinal, se for considerado o fato de o ponto  $(x, y)$  poder ser interno ou externo à curva  $C$ . Assim  $D_C(x, y)$  é positiva se  $(x, y)$  for externo a  $C$ , negativa se  $(x, y)$  for interno e zero caso  $(x, y)$  esteja sobre a curva  $C$ .

Os métodos desenvolvidos em [7],[9] e [17] utilizam a função distância sobre as fatias.

## 4.2-Interpolação

A interpolação das field functions gera uma função  $F$ , que será utilizada para definir a superfície. A reconstrução da superfície é feita nos pontos  $(x,y,z)$ , nos quais  $F(x, y, z) = 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita [23], quanto mais suave for a função  $F$ , mais suave também será a superfície (isosuperfície  $F=0$ ).

A interpolação das field functions também pode resultar na reconstrução de superfícies inadequadas. Como a isosuperfície  $F=0$  pode ocorrer em qualquer lugar, é importante ter controle da interpolação das fatias, para que a superfície não seja reconstruída com erros. Se após a interpolação os pontos  $(x, y, z)$ , onde  $F(x, y, z) = 0$ , ocorrerem em lugares indesejados, a superfície reconstruída pode ter uma aparência desagradável.

A interpolação da função pode ser feita *globalmente*, a partir do conjunto de fatias  $\{U_k\}$  ou pode ser feita *localmente* entre cada duas fatias adjacentes  $U_k$  e  $U_{k+1}$ .

Cong et al.[7] desenvolveram um método onde a função  $F$  é interpolada localmente entre cada duas fatias adjacentes. No método de Floater et al.[9] a interpolação da função  $F$  é feita de maneira global. Estes dois métodos serão discutidos na próxima seção.

É importante observar que as bifurcações ou branching que ocorrem sobre a superfície são detectadas automaticamente durante a interpolação da função  $F$ .

## 4.3-Exemplos de Métodos Implícitos

**Exemplo 1.** O método discutido neste exemplo foi desenvolvido por Cong et al. [7].

Este método utiliza a função distância definida em cada fatia como field function. O cálculo da função  $F$  é feito localmente, entre cada duas fatias adjacentes.

Sejam dois conjuntos de contornos  $C_1$  e  $C_2$ , pertencentes a duas fatias adjacentes que contêm alturas  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente. As projeções de  $C_1$  e  $C_2$  no plano  $xy$  são utilizadas para definir o domínio da função  $F$ , calculada entre estas duas fatias.

Seja a função  $O_C(x,y)$  definida como  $-1$ , caso o ponto  $(x,y)$  seja interno à projeção do contorno  $C$  no plano  $xy$ ,  $1$  caso  $(x,y)$  seja externo e  $0$  caso  $(x,y)$  esteja sobre a projeção de  $C$ . O domínio da função  $F$ , interpolada entre os contornos  $C_1$  e  $C_2$ , é definido pela região  $R(C_1, C_2)$ ,

$$R(C_1, C_2) = \{(x,y); O_{C_1}(x,y) \cdot O_{C_2}(x,y) \leq 0\}$$

A figura 19 mostra alguns exemplos da região  $R$ . Esta etapa equivale à etapa da correspondência nos métodos heurísticos. As subregiões desconexas equivalem a contornos que não são conectados. Ou seja os contornos  $C_1$  e  $C_2$  só se conectam se houver sobreposição de suas projeções.

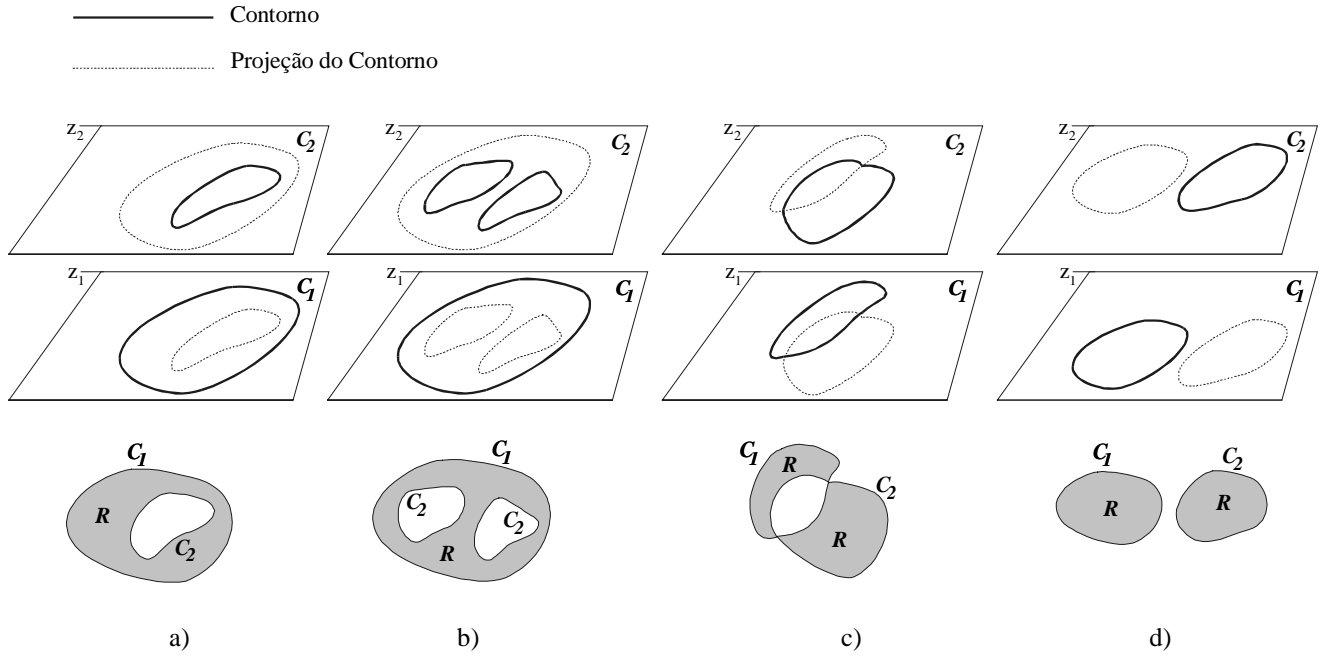


Figura 19: Região  $R$  em destaque.

Para a interpolação das field functions Cong et al. estabelecem um critério no qual todos os pontos da região  $R$  têm igual importância na reconstrução da superfície. De acordo com este critério a taxa de variação do módulo do gradiente, na direção do próprio vetor gradiente é nula. Ou seja a superfície reconstruída  $S$  é tal que

$$\nabla(|\nabla S|) \cdot (\nabla S / |\nabla S|) = 0. (*)$$

Em outras palavras, a altura da superfície  $S$  decresce linearmente de  $z_2$  até  $z_1$ , ou seja

$$S(C_1) = z_1 \text{ e } S(C_2) = z_2 (**).$$

As equações (\*) e (\*\*) são utilizadas para interpolar a superfície  $S$  entre  $z_1$  e  $z_2$ . Existem vários métodos numéricos que podem ser utilizados para resolver estas equações. A solução numérica apresentada neste método de reconstrução utiliza a função distância, como field function, calculada sobre as fatias  $C_1$  e  $C_2$ . Assim para qualquer ponto  $(x,y) \in R$ , a superfície  $S$  interpolada é dada por

$$S(x, y) = [z_1 D_{C_2}(x,y) - z_2 D_{C_1}(x,y)] / [D_{C_2}(x,y) - D_{C_1}(x,y)],$$

onde  $D_{C_1}(x,y)$  é função distância em relação ao contorno  $C_1$  e  $D_{C_2}(x,y)$  é função distância em relação ao contorno  $C_2$ . Observe que nos pontos  $(x,y) \in C_1$  (onde  $D_{C_1}(x,y) = 0$ ) a superfície  $S$  tem altura  $z_1$  e nos pontos  $(x,y) \in C_2$  (onde  $D_{C_2}(x,y) = 0$ )  $S$  tem altura  $z_2$ .

A função  $F(x,y,z)$ , interpolada entre  $z_1$  e  $z_2$ , pode ser expressa por

$$F(x,y,z) = (z - z_1) D_{C_2}(x,y) + (z_2 - z) D_{C_1}(x,y).$$

Observe que a isosuperfície  $F(x,y,z) = 0$  corresponde exatamente à superfície  $S(x,y)$ . Para reconstruir toda a superfície deve-se aplicar este método a cada par de fatias adjacentes.

**Exemplo 2.** O método discutido neste exemplo foi desenvolvido por Floater et al. [9].

Este método reconstrói a superfície  $S$  como a isosuperfície  $F=0$ , onde a função  $F$  é interpolada de forma global, a partir de todo conjunto de fatias. A função distância também é utilizada como field function. O domínio da função  $F$  é definido como o *bounding box*  $\Omega$  que envolve todas as fatias do volume. Assim  $F$  é definida como  $F: \Omega \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , onde  $\Omega = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2] \times [Z_1, Z_2]$ .

Seja  $R = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ , a projeção de  $\Omega$  no plano  $xy$ .  $R$  é utilizado como o domínio das field functions. A construção de  $F$  é dividida em duas etapas:

- a) Para cada fatia  $U_k$ , situada na altura  $z_k$ , construir a field function  $f_k$ , de modo que  $f_k(C_k) = 0$ , ou seja nos contornos da fatia a função se anula. Outros critérios para a definição de  $f_k$  são: a função  $f_k$  só deve mudar de sinal se e somente se algum contorno for cruzado;  $f_k$  deve ser positiva nos pontos externos a qualquer contorno da fatia  $U_k$ .
- b) Uma vez definidas as field functions, estas devem ser interpoladas para gerar a função  $F$ . A interpolação de  $F$  é feita através do uso de splines na direção  $z$ .

As funções distância com sinal são utilizadas como field functions. Neste método a função distância é calculada em toda fatia ( $R = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ ) e não apenas em uma região  $R$ , como no método do exemplo anterior. Para considerar contornos dentro de contorno, a função distância é alterada convenientemente: considerando uma linha traçada a partir de um ponto externo à  $R$  até um ponto  $(x,y)$  interno à  $R$ , basta contar o número de interseções que ocorrem entre a linha e os contornos da fatia.

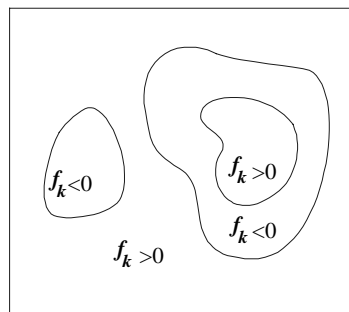


Figura 20: Definição da função distância em cada região.

Se este número de interseções é par (0, 2, 4...), o sinal da função distância é definido como positivo, se o número for ímpar, o sinal é negativo. A figura 20 mostra uma fatia com vários contornos e qual o sinal da função distância em cada região. Após esta etapa,

em cada fatia há uma field function definida como as propriedades requeridas na etapa (a).

A próxima etapa é interpolar  $F$  a partir das field functions. Para tal Floater et al. utilizam uma B-spline cúbica de ordem  $C^2$  [5]. Assim é definido um conjunto de nós  $t_1, t_2, \dots, t_{n+6}$ , correspondentes aos valores de  $z$  (direção da interpolação) de cada fatia, com multiplicidade quatro nos extremos:  $z_1, z_1, z_1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_{n-1}, z_{n-1}, z_{n-1}$ .

Para cada ponto  $(x, y)$ , é encontrado o único coeficiente  $a(x, y)$  tal que

$$F(x, y, z) = \sum_{r=1}^{n+2} N_{r,4,t}(z) a(x, y)$$

satisfaz as condições de interpolação

$$F(x, y, z_k) = f_k(x, y), \quad k=1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z_n) = 0$$

Aqui,  $N_{r,4,t}$  é a B-spline de ordem quatro com suporte  $[t_r, t_{r+4}]$ .

Os pontos onde  $F(x, y, z) = 0$  representam a superfície  $S$ .

Floater et al. apresentaram uma etapa de pós-processamento para gerar uma malha que represente a superfície  $F=0$ . No espaço  $\Omega$  foi definida uma grade tridimensional suficientemente fina, formada por nós  $p_{i,j,k} = (x_i, y_j, z_k)$ . Esta grade divide  $\Omega$  em células, cada uma contendo oito nós como vértices. Cada célula é dividida em cinco tetraedros e  $F$  é aproximada por uma função linear dentro de cada tetraedro. Os zeros desta função linear (lembrar que a superfície ocorre onde  $F=0$ ) formam um plano e assim os zeros dentro de cada tetraedro formam ou uma face triangular ou uma face quadrangular que pode ser dividida para formar dois triângulos.

## 5-Conclusões

Neste trabalho foram discutidos os principais problemas relacionados à reconstrução de superfícies a partir de um conjunto de fatias ou imagens bidimensionais.

O objeto reconstruído a partir de um conjunto de fatias pode ter uma representação volumétrica ou uma representação apenas pelo bordo (superfície). A representação volumétrica requer muito mais processamento, uma vez que contém informações do interior do objeto.

Para reconstruir a superfície a partir do conjunto de fatias, é necessário que sejam extraídos contornos de cada fatia que irão representar a superfície. Estes contornos ou curvas fechadas simples podem ter diversas representações, como a representação matricial e a representação poligonal. Alguns algoritmos de detecção de arestas e de segmentação podem ser utilizados para a extração dos contornos das fatias.

Dentre os métodos para reconstruir superfícies destacam-se os métodos heurísticos e os métodos implícitos.

Os métodos heurísticos, que utilizam a representação poligonal para os contornos, reconstróem a superfície a partir de um conjunto de heurísticas pré-estabelecidas. Há três etapas envolvidas no processo de reconstrução. Durante a etapa da Correspondência fica estabelecida a conexão entre os contornos das fatias adjacentes, ou seja qual contorno de uma fatia deve ser conectado a qual contorno da fatia adjacente. Durante a etapa da Geração da Malha ou *Tiling* é gerada uma malha (em geral triangular) entre os contornos correspondentes, de modo que a superfície é reconstruída entre estes contornos. O problema de gerar os triângulos envolve saber como conectar os vértices dos contornos correspondentes. A terceira etapa envolve a ocorrência de Bifurcações ou *Branching* na superfície. Isto ocorre quando um contorno em uma fatia corresponde a mais de um contorno da fatia adjacente. A possibilidade de bifurcações aumenta a dificuldade de reconstrução da superfície. Os métodos heurísticos produzem uma superfície com uma representação B-Rep (Boundary representation), ou seja, uma representação por bordo.

Os métodos implícitos utilizam representação matricial ou poligonal para os contornos definidos sobre as fatias. Nestes métodos são definidas funções, chamadas de field functions, sobre as fatias. Estas funções são interpoladas para gerar uma função implícita  $F$ , de modo que a superfície reconstruída  $S$  é a isosuperfície  $F=0$ . A interpolação de  $F$  pode ser feita global ou localmente em relação às fatias. Nestes métodos as bifurcações são detectadas automaticamente, o que é uma grande vantagem em relação aos métodos heurísticos. Porém, a superfície reconstruída não possui necessariamente um representação por bordo (malha), sendo necessária uma etapa de pós-processamento, caso se deseje gerar a malha da superfície.

## Bibliografias

- [1] Bajaj, C.; Coyle, E. & Lin, K. 1996. Arbitrary Topology Shape Reconstruction from Planar Cross Sections. *Graph. Models Image Process.* **58**, 6, 524-543.
- [2] Barequet, G. & Sharir, M. 1996. Piecewise-Linear Interpolation between Polygonal Slices. *Computer Vision and Image Understanding.* **6**, 2, 251-272.
- [3] Batnitzky, S.; Price, H. I.; Cook, P. N.; Cook, L. T. & Dwyer, S. J. 1981. Three-Dimensional Computer Reconstruction from Surface Contours for Head CT Examinations. *Journal of Computer Assisted Tomography*, **5**, 60-67.
- [4] Boissonnat, J. D. 1988. Shape Reconstruction from Planar Cross Sections. *Computer Vision, Graphics and Image Processing.* **44**, 1-29.
- [5] de Boor, C. 1978. A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, New York.
- [6] Christiansen, H. N. & Sederberg, T. W. 1978. Conversion of Complex Contour Line Definitions into Polygonal Element Mosaics. *Computer Graphics*, **12**, 187-192.
- [7] Cong, G. & Parvin, B. 1999. An Algebraic Solution to Surface Recovery from Cross-Sectional Contours. *Graphical Models and Image Processing*, **61**, 222-243.
- [8] Ekoule, A. B.; Peyrin, F. C. & Odet, C. L. 1991. A Triangulation Algorithm from Arbitrary Shaped Multiple Planar Contours. *ACM Trans. on Graph*, **10**, 2, 182-199.
- [9] Floater, M. & Westgaard, G. 1996. Smooth Surface Reconstruction from Cross-Sections Using Implicit Methods. Rep., SINTEF.
- [10] Geiger, B. 1993. Three Dimensional Modeling of Human Organs and its Applications to Diagnosis and Surgical Planning. Technical Report, 2105, INRIA, France.
- [11] Gitlin, C. O'Rourke, J. & Subramanian, V. 1996. On Reconstructing Polyhedra from Parallel Slices. *International Journal of Comput. Geometry & Applications*, **6**, 1, 103-122.
- [12] Gomes, J. M. & Velho, L. 1995. Abstractions Paradigms for Computer Objects. *The Visual Computer*, **11**, 227-239.
- [13] Gomes, J. M.; Costa, B.; Darsa, L. & Velho, L. 1996. Graphical Objects. *The Visual Computer*, **12**, 269-282.

- [14] Fuchs, H.; Kedem, Z. M. & Useton, S. P. 1977. Optimal Surface Reconstruction from Planar Contours. *Communications of ACM*, **20**, 693-702.
- [15] Keppel, E. 1975. Approximating Complex Surfaces by Triangulation of Contour Lines. *IBM Journal of Research and Development*, **19**, 2-11.
- [16] Lacroute, P. G. & Levoy, M. 1994. Fast Volume Rendering Using a Shear-Warp Factorization of the Viewing Transformation. *Proceedings of SIGGRAPH'94*, 451-458.
- [17] Levin, D. 1986. Multidimensional Reconstruction by Set-Valued Approximation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **6**, 173-184.
- [18] Levoy, M. 1988. Efficient Ray Tracing of Volume Data. *ACM Transaction on Graphics*, **9**, 29-37.
- [19] Lorensen, W. E. & Cline, H. E. 1987. Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *Computer Graphics*, **21**, 163-169.
- [20] Meyers, D.; Skinner, S. & Sloan, K. 1992. Surfaces from Contours. *ACM Trans. on Graphics*, **11**, 3, 228-258.
- [21] Nonato, L. G. 1998. Reconstrução Volumétrica de Objetos Dados por Seções Bidimensionais. Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [22] Oliva, J. M.; Perrin, M. & Coquillart, S. 1996. 3D Reconstruction of complex Polyhedral Shapes from Contours using a Simplified Generalized Voronoi Diagram. *Comp. Graph. Forum*, **15**, 3, 397-408.
- [23] Rudin, W. 1976. Principles of Mathematical Analysis. *McGraw-Hill*, New-York.
- [24] Schumaker, L. L. 1990. Reconstructing 3D Objects from Cross-sections. *Computation of Curves and Surfaces*, W. Dahmen, M. Gasca, and C. Micchelli eds., Kluwer, Dordrecht 275-309.
- [25] Seixas, R. B. 1997. Visualização Volumétrica com Ray-Casting num Ambiente Distribuído. Tese de Doutorado, Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro .
- [26] Shantz, M. 1981. Surface Definition for Branching Contour-Defined Object. *Computer Graphics*, **15**, 2, 242-270.



- [27] Shinagawa, Y & Kunni, T. L.. 1991. The Homotopy Model: a Generalized Model for Smooth Surface Generation from Cross Sectional Data. *The Visual Computer*, **7**, 72-86.
- [28] Soroka, B. I. 1981. Generalized Cones from Serial Sections. *Computer Graphics and Image Processing*, **15**, 2,154-166.
- [29] Wang, Y. F. & Aggarwal, J. K. 1986. Construction of Surface from 3-D Volumetric Scene Description. *Pattern Recognition*,**19**, 3, 197-207.