



PUC

Série: Monografias em Ciência da Computação,
No. 5/91

UMA FAMÍLIA DE LÓGICAS PARACONSISTENTES E/OU PARACOMPLETAS
COM SEMÂNTICAS RECURSIVAS

Arthur ^RA. V. Buchsbaum
Tarcísio H. C. Pequeno

Departamento de Informática

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 - CEP-22453
RIO DE JANEIRO - BRASIL

PUC RIO - DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Série: Monografias em Ciência da Computação, No. 5/91

Editor: Carlos J. P. Lucena

Abril, 1991

UMA FAMÍLIA DE LÓGICAS PARAconsistentes E/OU PARACOMPLETAS
COM SEMÂNTICAS RECURSIVAS *

Arthur A. V. Buchsbaum
Tarcísio H. C. Pequeno **

* Trabalho patrocinado pela Secretaria de Ciência e Tecnologia da Presidência da República.

** Em licença pela Universidade Federal do Ceará.

In charge of publications:

Rosane Teles Lins Castilho
Assessoria de Biblioteca, Documentação e Informação
PUC Rio - Departamento de Informática
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
22453 - Rio de Janeiro, RJ
Brasil

Tel.: (021) 529-9386

Telex: 31078

Fax: (021) 511-5645

E-mail: rosane@inf.puc-rio.br

Resumo

Apresentamos uma família de cálculos paraconsistentes e/ou para completos com semânticas recursivas. As famílias de cálculos CI, PC e NAL são re-elaborações dos cálculos C_1 , P_1 e N_1 de da Costa. Elas foram desenvolvidas para permitir recursividade e formas mais naturais de explicação da negação paraconsistente e/ou para completa. O cálculo paraconsistente CIE é uma base monotônica adequada para o raciocínio por defaults.

Palavras-chave: lógica paraconsistente, lógica para completa, lógica não alética, semântica recursiva, semântica de valorações, semântica matricial, semântica de maximização, semântica de minimização, inconsistência epistêmica, inconsistência ontológica.

Abstract

A family of paraconsistent and/or para complete calculi with recursive semantics is presented. The families of calculi CI, PC and NAL are reconstructions of the calculi C_1 , P_1 and N_1 of da Costa. They have been developed to allow recursivity and more natural forms for explaining the paraconsistent and/or para complete negation. The paraconsistent calculus CEI is a monotonic basis suitable for the reasoning by defaults.

Keywords: paraconsistent logic, para complete logic, non alethic logic, recursive semantics, semantics of valuations, semantics of matrices, semantics of maximization, semantics of minimization, epistemic inconsistency, ontological inconsistency.

SUMÁRIO

1	-	Introdução	4
2	-	Convenções, Notação e Terminologia	11
3	-	Os Cálculos Paraconsistentes CI_1 , CI_2 , CI_3 e CI_4	16
4	-	Os Cálculos Paracompletos PC_1 e PC_2	26
5	-	Os Cálculos Não Aléticos NAL_1 , NAL_2 , NAL_3 e NAL_4	34
6	-	O Cálculo CIE	44
7	-	Conclusões	55
		Referências	57

1 - Introdução

Em [20] advoga-se a indissociabilidade e a complementaridade dos papéis desempenhados pela não-monotonicidade e paraconsistência na modelagem de certos esquemas de raciocínio exibidos pelo senso comum e/ou requeridos na confecção de artefatos ditos inteligentes. Em linhas gerais, o argumento é construído a partir das considerações que seguem.

As lógicas não monotônicas formam uma classe especial de métodos indutivos de raciocínio. Elas promovem uma expansão da dedução de modo a permitir a efetuação de inferências com base em evidências não conclusivas, à luz de um conhecimento incompleto dos fatos. Naturalmente disso resultam inferências não válidas. Podem ocorrer situações em que as premissas sejam verdadeiras mas não as conclusões. Resulta também daí a não monotonicidade do raciocínio: o surgimento de novas evidências pode revogar conclusões anteriormente estabelecidas. Em decorrência, esse tipo de raciocínio deve ser capaz de administrar conflitos em situações nas quais considerações parciais levam a conclusões contraditórias, e resolvê-los sempre que a evidência total disponível o permitir.

O seguinte exemplo (vide Morris [19]) ilustra esse ponto:

- Pássaros geralmente são capazes de voar;
- Animais geralmente não são capazes de voar;
- Os pássaros são animais;
- Tweety é um pássaro (regras como as duas primeiras poderiam ser expressas numa lógica de defaults, por exemplo na seguinte forma: dado que alguém é pássaro pode-se concluir que ele é capaz de voar - salvo alguma indicação explícita em contrário).

O conflito surge na aplicação das duas primeiras regras com Tweety considerado como pássaro na primeira e visto na sua condição de animal na segunda. Isso levaria à conclusão de que existem evidências de que Tweety é capaz de voar da mesma forma que existem evidências em contrário. Esse

conflito é apenas aparente e poderia ser resolvido apelando-se a um critério de especificidade, pelo qual a regra a respeito de pássaros deveria prevalecer sobre a regra a respeito da classe mais ampla dos animais, sempre que suas conclusões conduzam a uma contradição.

Esse exemplo põe em destaque uma das características mais marcantes do raciocínio não monotônico - o seu caráter holístico. Embora as regras de inferência não monotônicas, como as regras de default, por exemplo (vide Reiter [23] e [24]), possam parecer semelhantes às regras dos sistemas dedutivos, elas diferem destas com respeito a um aspecto essencial: a sua não localidade. Regras não monotônicas são *sensíveis ao contexto*. Sua aplicação requer o exame de propriedades globais da teoria. A análise dessas propriedades globais e a capacidade de compor o total das evidências disponíveis de forma a resolver conflitos locais são basicamente as funções de uma lógica não monotônica. No entanto ocorrem muito naturalmente situações em que não há critérios disponíveis que permitam a resolução de tais conflitos e de onde resultam inevitavelmente inconsistências, caso se mantenha o compromisso com a caracterização dicotômica (verdadeiro/falso) das conclusões. Esse é um compromisso básico da abordagem não monotônica e qualitativa do raciocínio, e não pode ser relaxado sob pena de descaracterizá-la.

O seguinte é um exemplo clássico na literatura não monotônica a ilustrar esse tipo de situação:

- Quackers em geral são pacifistas;
- Membros do Partido Republicano são geralmente não pacifistas;
- Nixon é Quacker;
- Nixon é republicano.

Não há qualquer critério, à luz do conhecimento fornecido, capaz de resolver as conclusões contraditórias a respeito de Nixon, a que as regras acima conduzem.

Essa inevitabilidade da aquisição de inconsistências associada a métodos indutivos de raciocínio já era reconhecida mesmo antes do advento da literatura sobre

lógicas não monotônicas. Hempel, em [16], por exemplo, detecta esse fenômeno com respeito a certas regras tidas, segundo ele, como representando "the most basic types of inductive reasoning". Na realidade, a administração de contradições dessa natureza é parte da prática científica corrente. Elas demandam uma revisão da teoria científica, de modo a que a consistência possa ser restabelecida.

A situação difere de forma significativa quando se trata do raciocínio do senso comum. Aqui já se reconhece de antemão a inacurácia e insuficiência do conhecimento a suportar as conclusões. Diante da ocorrência de contradições não há revisão a ser feita, mas sim que prover os meios para que a situação possa ser convenientemente tratada, pelo menos até que a aquisição de novos conhecimentos ou a ocorrência de um fato novo possam eventualmente remover o conflito. A lógica de defaults de Reiter [23] trata do problema abrindo as conclusões divergentes em múltiplas extensões, cada uma delas internamente consistente.

Em [20] é sugerido um reconhecimento realista das contradições, abrigando-as em uma mesma teoria, de modo a que o raciocínio possa de fato ser tratado de forma intra-lógica, sem apelo a procedimentos e mecanismos externos para a manipulação de extensões, por exemplo. Obviamente, uma lógica que permitisse a convivência de contradições em uma teoria deve ser paraconsistente. Essa é a forma pela qual se é naturalmente levado à adoção de uma lógica paraconsistente, em consequência de um raciocinar não monotônico. Por outro lado, a não monotonicidade confere uma dinâmica ao raciocínio paraconsistente, fazendo com que o ingresso de novas informações ao conhecimento disponível possa recompor consistências e/ou introduzir novas divergências. Emerge dessa correlação um quadro que faz lembrar "O Jardim dos Caminhos Bifurcantes", de Borges [4], onde o curso das conclusões se abre em alternativas contraditórias, que por sua vez podem voltar a se abrir ou eventualmente colapsar, e assim por diante, conforme o conhecimento se enriquece.

A construção de uma lógica, tal como a lógica IDL (vide [20]), capaz de combinar essas características, se dá

da seguinte maneira. As regras não monotônicas são utilizadas para expandir uma lógica dedutiva, a qual denominamos "base monotônica" da lógica. Essa base monotônica seria constituída por um cálculo paraconsistente. Na realidade por um cálculo que se comporte de forma paraconsistente para conclusões das regras não monotônicas e classicamente para as demais.

O cálculo CIE aqui apresentado foi desenhado exatamente para servir de base monotônica à lógica IDL. Ele constitui um refinamento do cálculo apresentado em [20], com vistas a refletir melhor nossas intuições a respeito do raciocínio naquelas circunstâncias. Seu projeto beneficiou-se da elaboração de um esquema semântico idealizado para capturar essas mesmas intuições. Na realidade variações desse esquema nos permitiram obter uma família de semânticas paraconsistentes, paracompletas e não aléticas. Examinando os cálculos C_1 , P_1 e N_1 de da Costa (vide [8], [14] e [15]) à luz dessas semânticas, logramos construir os cálculos CI_1 , CI_2 , CI_3 e CI_4 , paraconsistentes, PC_1 e PC_2 , paracompletos, e NAL_1 , NAL_2 , NAL_3 e NAL_4 , não aléticos. Esses cálculos apresentam algumas vantagens com respeito aos cálculos nos quais se inspiraram. Além de serem, via de regra, mais fortes que aqueles, admitem semânticas recursivas, como é o caso das semânticas aqui exibidas. A cada um desses cálculos corresponde uma semântica, recursiva, com respeito à qual ele pode ser mostrado correto e completo.

O tipo de inconsistência que iremos tratar decorre não de um comportamento incoerente do mundo sob exame, ou mais precisamente deste com respeito à família de conceitos que utilizamos para descrevê-lo, mas, mesmo sob a hipótese de coêrencia da realidade, da insuficiência e imprecisão do nosso conhecimento a respeito deste. Por isso a denominamos *inconsistência epistêmica*, para ressaltar a oposição com *inconsistência ontológica*, diretamente decorrente do comportamento da realidade. Estes termos, com sentido semelhante, foram anteriormente empregados por Rescher & Brandom em [25].

A intuição refletida nas semânticas a serem apresentadas é a verdade relativa a múltiplos observadores (ou múltiplos referenciais) quando, por deliberação ou impossibilidade, não levamos em conta a informação a respeito das diferentes condições de cada observação. Pode acontecer, por exemplo, uma variação de condições incontrolável mas suficiente para afetar um experimento a um nível detectável pelos nossos instrumentos. Isso reflete novamente uma situação de conhecimento imperfeito, nesse caso a respeito das condições de observação, ou mesmo, num fenômeno mais profundo, da falta de recursos na linguagem para expressão das distinções.

Suponha um objeto percebido como vermelho por um observador, mas como verde por um outro que se mova com velocidade diferente com respeito ao objeto, sem que tenhamos qualquer informação a respeito dessas velocidades. Para um quadro mais nítido da situação, suponha que nem mesmo sabemos que a observação da cor poderia ser afetada pela velocidade relativa ao objeto. As lógicas paraconsistentes que projetamos destinam-se exatamente a tratar situações como essa: serem capazes de construir raciocínios a partir de informações provindas de observações divergentes, sem que tenhamos qualquer informação sobre os observadores que as fizeram.

Essa situação tem paralelos com a nossa motivação inicial, a respeito de múltiplas extensões geradas por uma teoria com defaults. Estamos aí novamente diante de um quadro de incompletude de informação que não nos permite controlar ou privilegiar alternativas igualmente plausíveis.

Ocorre-nos ainda um terceiro tipo de situação a guardar paralelos com as duas primeiras, sendo também plausível a um tratamento com as semânticas a serem apresentadas. É o caso de processos que têm um comportamento irregular ao longo do tempo, sobre o qual dispomos de informações obtidas em diferentes momentos. Esse tipo de situação é muito frequente no conhecimento e no discurso do senso comum. Suponha, por exemplo, um indivíduo capaz de comportar-se de forma violenta em certas circunstâncias, porém de comportamento absolutamente pacato em outras, ou seja, um indivíduo que nem

se comporta de forma consistentemente violenta nem pacata. Sobre tal indivíduo poderia-se dizer tanto que ele é violento como que ele é pacato, ou talvez, mais prudentemente, nem uma coisa nem outra.

Na consideração de situações como essa, bem como das outras duas descritas acima, temos duas alternativas radicais.

Em uma *atitude crédula* ou *tolerante* aceitamos algo como verdadeiro se ele o é em alguma versão. Assim aceitamos um objeto como sendo verde se algum observador o perceber como tal ou se assim se concluir em alguma extensão. Da mesma forma consideraríamos um indivíduo como violento se em alguma ocasião ele se comportar como tal. Essa atitude nos levaria a aceitar versões contraditórias, nos conduzindo portanto a semânticas paraconsistentes.

A outra alternativa seria uma *atitude cética*: só aceitamos algo como verdadeiro se todas versões o confirmarem como tal. Essa atitude levaria a semânticas paracompletas - conforme o exemplo visto acima, nem aceitaríamos a cor do objeto como verde, nem como não verde. Uma combinação judiciosa dessas atitudes nos permitiria divisar semânticas não aléticas, que exibem ao mesmo tempo paraconsistência e paracompletude.

Um quadro geral para a definição dessas semânticas pode ser construído da seguinte maneira. Uma valoração V para uma propriedade atômica p é constituída por uma coleção não vazia de valorações clássicas v_i para p (cada uma expressando a opinião de um observador sobre p). Nas semânticas paraconsistentes, que denominamos *semânticas de maximização*, p será *verdadeiro* se o valor máximo que as valorações v_i conferem a p é 1 e *falso* apenas quando esse valor for 0. Da mesma forma, $\neg p$ será o caso se o valor máximo de $\neg p$ em V for 1 (ou o valor mínimo de p for igual a 0).

As semânticas paracompletas, que denominamos *semânticas de minimização*, são obtidas tomando-se p como *verdadeiro* se, e somente se, o valor mínimo atribuído por um v_i de V a p for 1. $\neg p$ será então o caso se o valor máximo de p em V for 0.

Por sua vez, as semânticas não aléticas são construídas minimizando-se sobre famílias de valorações paraconsistentes, ou, alternativamente, maximizando-se sobre famílias de valorações paracompletas.

Definições completas dessas diversas alternativas semânticas serão dadas juntamente com a apresentação dos cálculos correspondentes. Veremos aqui variações nas definições dessas semânticas, dentro do quadro geral aqui apresentado: as que correspondem aos cálculos paraconsistentes CI_1 e CI_3 (CI_2 e CI_4 diferem de CI_1 e CI_3 apenas por conterem a negação clássica), aos cálculos paracompletos PC_1 e PC_2 e aos cálculos não aléticos NAL_1 e NAL_3 (NAL_2 e NAL_4 também diferem de NAL_1 e NAL_3 por conterem a negação clássica).

A semântica do cálculo CIE apresenta também algumas peculiaridades, para que possa refletir a coexistência de fórmulas *irrevogáveis* (clássicas) com fórmulas apenas *plausíveis*, oriundas das regras não monotônicas. Essas últimas são distinguidas no cálculo CIE (assim como em IDL) pela ocorrência de um ponto de interrogação (?). A paraconsistência em CIE restringe-se a esse tipo de fórmulas.

2 - Convenções, Notação e Terminologia

Uma *lógica* (relativa a uma linguagem) é um par $\langle L, \vdash \rangle$, onde L é uma coleção de fórmulas, e \vdash é uma relação de dedução, definida em $2^L \times L$. Uma lógica particular relativa a uma linguagem é portanto definida pela especificação de sua linguagem e de uma relação de dedução. Dadas uma coleção de fórmulas Γ e uma fórmula α de L tais que $\Gamma \vdash \alpha$, dizemos que de Γ *deduz-se* α ou que α é *teorema* de Γ . Caso $\emptyset \vdash \alpha$ (o que notamos simplesmente por $\vdash \alpha$), dizemos que α é um teorema da lógica. A um conjunto de fórmulas fechado com respeito a Γ denominamos uma *teoria*. Em particular, ao fecho de Γ denominamos a teoria de Γ . Γ é então dito ser uma apresentação em um conjunto de axiomas para uma teoria. Se \mathcal{L} é uma lógica, denotaremos a sua relação de dedução por $\vdash_{\mathcal{L}}$, e, caso não houver dúvida quanto à lógica referida, a sua relação de dedução será denotada simplesmente por \vdash .

Um *cálculo* (relativo a uma linguagem) é um par $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$, onde \mathcal{A} é uma coleção de fórmulas de uma dada linguagem L , ditas axiomas do cálculo, e \mathcal{R} é uma coleção de regras de inferência. Dado um cálculo lógico C , consideraremos a sua relação de dedução \vdash_C definida da maneira usual (como é feito em [3], por exemplo) a partir dos axiomas e regras de inferência de C . Temos daí que todo cálculo define uma lógica. Uma coleção de fórmulas Γ de um cálculo C é dita *trivial* em C se $\Gamma \vdash_C A$, para toda fórmula A de C .

Em todo este trabalho, as expressões "ent" e "sss" serão usadas respectivamente para indicar a implicação e a equivalência na metalinguagem.

O conceito de fórmula de uma linguagem formal será considerado da maneira usual (como em [3]), a não ser nas partes deste trabalho em que este seja expressamente definido de outra forma.

Uma *semântica de valorações* para uma linguagem proposicional é uma coleção de funções definidas nesta linguagem, com valores em uma coleção de *valores de verdade* possuindo alguns *valores distinguidos*. A coleção usual de valores de verdade é $\langle 0, 1 \rangle$, com o valor distinguido 1. Todo

sistema lógico possui uma semântica de valorações bivalente (vide [17]). Chamamos uma fórmula de *verdadeira* com respeito a uma dada valoração se esta atribuir a aquela um valor distinguido, caso contrário chamamos esta fórmula de *falsa*. Uma valoração *satisfaz* uma fórmula dada se ela associar a esta fórmula um valor distinguido. Uma fórmula é *satisfatível* em uma semântica de valorações se existir uma valoração desta semântica que a satisfizer, e é *válida* se todas as valorações desta semântica a satisfizerem. Dizemos que uma valoração *satisfaz* uma coleção de fórmulas se ela satisfizer todas as fórmulas desta coleção. Uma coleção de fórmulas é dita *satisfatível* em uma semântica de valorações se existir uma valoração desta semântica que a satisfizer, caso contrário a coleção é dita *insatisfatível*.

Dizemos que uma função v definida em uma linguagem proposicional L é *recursiva* se, para cada conectivo $\#$ de L há uma função $f_{\#} : O^n \rightarrow O$ tal que $v(\#(B_1, \dots, B_n)) = f_{\#}(v(B_1), \dots, v(B_n))$, onde n é a aridade de $\#$, O é o contra-domínio de v e B_1, \dots, B_n são fórmulas arbitrárias de L .

Sejam M uma semântica de valorações para uma linguagem proposicional L e O a coleção de valores de verdade de M . Dizemos que M é uma *semântica matricial* se, para cada conectivo $\#$ de L há uma função $f_{\#} : O^n \rightarrow O$ tal que, para cada valoração $v \in M$, $v(\#(B_1, \dots, B_n)) = f_{\#}(v(B_1), \dots, v(B_n))$, onde n é a aridade de $\#$ e $B_1, \dots, B_n \in L$. Para cada conectivo $\#$, a função correspondente $f_{\#}$ é dita a *tabela* ou *matriz de valores de verdade* para $\#$. Observe que, se M é uma semântica matricial, então todas as suas valorações são recursivas, mas a recíproca não é verdadeira.

Dizemos que uma semântica S de valorações para uma linguagem proposicional L é *recursiva* se há uma coleção S' de funções definidas em L e uma sobrejeção de S' em S tal que todas as funções de S' são recursivas. Todas as semânticas que mostramos neste trabalho são recursivas no sentido que acabamos de definir. Com a única exceção da semântica para o cálculo CIE, em todas as demais semânticas as sobrejeções requeridas são também injeções, e daí bijeções. Uma função de

S' é recursiva e descreve exhaustivamente os *significados* que ela atribui para as fórmulas de L , enquanto que uma função de S não é necessariamente recursiva e descreve os *valores de verdade* que ela atribui para as fórmulas de L . Não exigimos que, na definição de semântica recursiva, a sobrejeção requerida fosse uma bijeção porque uma atribuição de valores de verdade para as fórmulas de uma linguagem não determina necessariamente uma atribuição de significados.

Toda semântica matricial é recursiva, mas a recíproca não é verdadeira. Temos também que, se todas as valorações de uma semântica são recursivas, então a semântica é recursiva, porém também aqui não vale a recíproca.

Dizemos que uma função $V : L \rightarrow \{0,1\}$, onde L é uma linguagem formal possuindo os conectivos \rightarrow , \wedge e \vee , é *bem comportada* (com respeito a \rightarrow , \wedge e \vee) se V respeitar as seguintes condições:

$$V(A \rightarrow B) = 1 \text{ sss } V(A) = 0 \text{ ou } V(B) = 1;$$

$$V(A \wedge B) = 1 \text{ sss } V(A) = 1 \text{ e } V(B) = 1;$$

$$V(A \vee B) = 1 \text{ sss } V(A) = 1 \text{ ou } V(B) = 1.$$

Por exemplo, uma valoração para o cálculo $C1$ (veja [9]) é bem comportada.

Todas as valorações das semânticas definidas neste trabalho são bem comportadas, já que tencionamos pesquisar formas não clássicas de negação, na presença da implicação, conjunção e disjunção clássicas.

Seja L uma linguagem formal contendo os conectivos lógicos \rightarrow , \wedge , \vee e \neg . Dizemos que v é uma *valoração clássica* (proposicional) se v é uma função de L em $\{0,1\}$ tal que v é bem comportada e, para toda fórmula $A \in L$, $v(\neg A) = 1$ sss $v(A) = 0$.

Seja S uma semântica de valorações para uma dada linguagem, Γ uma coleção de fórmulas desta linguagem e A uma fórmula desta linguagem. Se cada valoração que satisfaz Γ satisfaz A , dizemos que A é uma *conseqüência lógica* de Γ com respeito a S , e notamos isto por $\Gamma \Vdash_S A$. Se $\Gamma = \emptyset$, então podemos notar $\Gamma \Vdash_S A$ por $\Vdash_S A$. Se não houver nenhuma dúvida quanto à semântica considerada, podemos notar $\Gamma \Vdash A$ simplesmente por $\Gamma \Vdash A$.

Dizemos que um cálculo C é *correto* com respeito a uma semântica S se, para toda coleção Γ de fórmulas deste cálculo e para toda fórmula A deste cálculo, $\Gamma \vdash_C A$ implica em $\Gamma \models_S A$. Reciprocamente, dizemos que C é *completo* com respeito a S se, para toda coleção Γ de fórmulas deste cálculo e para toda fórmula A deste cálculo, $\Gamma \models_S A$ implica em $\Gamma \vdash_C A$.

Sejam L e L' linguagens formais dos cálculos C e C' tais que toda fórmula de L é fórmula de L' . Dizemos que C' é uma *extensão conservativa* de C se, para toda coleção de fórmulas Γ de L e para toda fórmula A de L , $\Gamma \vdash_C A$ sss $\Gamma \vdash_{C'} A$.

Seja C um cálculo e consideremos definidos os *literais* de C . Dizemos que uma fórmula de C está na *forma conjuntiva normal* se ela é uma conjunção de disjunções de literais de C . Dizemos também que uma fórmula de C está na *forma disjuntiva normal* se ela é uma disjunção de conjunções de literais de C .

A partir de agora, em todo este trabalho, consideraremos L uma linguagem proposicional possuindo uma infinidade enumerável de letras sentenciais e os conectivos lógicos \neg , \rightarrow , \wedge e \vee , e L' uma linguagem proposicional possuindo todos os sinais de L , mais o sinal \sim . Usamos o sinal \neg para representar a negação não clássica específica de cada cálculo, e o sinal \sim (como sinal primitivo) para representar a negação clássica dos cálculos CI_2 , CI_4 , NAL_2 e NAL_4 . Nos cálculos PC_1 , PC_2 e CIE o sinal \sim é usado como sinal definido (onde expressões da forma $\sim \alpha$ são definidas de um modo diferente em cada cálculo), também para representar a negação clássica.

Se α e β são fórmulas arbitrárias, usaremos em todo este artigo as seguintes abreviaturas:

$$\alpha^{\circ} \equiv \sim \alpha \vee \sim \neg \alpha$$

$$\alpha^* \equiv \alpha \vee \neg \alpha$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\alpha \Rightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$$

$$\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$$

O sinal definido \Rightarrow é chamado de *implicação forte*, e o sinal definido \Leftrightarrow de *equivalência forte*.

Usaremos as variáveis sintáticas p, q, r para representar letras sentenciais, e as variáveis sintáticas A, B, C para representar fórmulas arbitrárias de L ou L' , conforme o caso considerado.

Adotaremos a seguinte ordem de precedência entre os grupos de conectivos, caso houver omissão de parênteses na escrita de fórmulas: $\langle \leftrightarrow \rangle, \langle \Rightarrow \rangle, \langle \wedge, \vee \rangle, \langle \neg, \sim, ? \rangle$ (o conectivo "?", usado no cálculo CIE, se refere à menor expressão que seja fórmula que o preceder). Se ainda faltarem parênteses após a ordem de precedência haver sido considerada, em uma expressão possuindo duas ou mais ocorrências consecutivas de " \Rightarrow ", então a parentetização restante é realizada a partir do lado direito. Por exemplo, a expressão $\neg A \Rightarrow \sim B \wedge C \Rightarrow \neg D \leftrightarrow E? \vee \neg F$ representa a fórmula $((\neg A) \Rightarrow (((\sim B) \wedge C) \Rightarrow (\neg D))) \leftrightarrow ((E?) \vee (\neg F))$.

Dizemos que uma lógica é *paraconsistente* se não é verdade, em geral, que qualquer fórmula é consequência nesta lógica de duas fórmulas contraditórias A e $\neg A$. Uma lógica diz-se *paracompleta* se nela não for válido o princípio do terceiro excluído, isto é, não se tem em geral que $A \vee \neg A$ é um teorema da lógica, dada uma fórmula A . Uma lógica que é simultaneamente *paraconsistente* e *paracompleta* é dita *não alética*.

3 - Os Cálculos Paraconsistentes CI_1 , CI_2 , CI_3 e CI_4

Os cálculos paraconsistentes da família CI (a sigla CI é uma abreviatura da expressão "cálculo para inconsistência") foram construídos para corresponder à alternativa semântica que qualificamos como *crédula*: num quadro de verdades relativas divergentes para um mesmo fato, o aceitamos como verdadeiro se ele o for para algum ponto de vista. O cálculo CI_3 difere do cálculo CI_1 de forma a refletir uma variação quanto a um aspecto na definição de sua semântica, a ser precisado quando da apresentação dessas semânticas. CI_2 e CI_4 diferem respectivamente de CI_1 e CI_3 pelo fato de incluírem a negação clássica (representada pelo conectivo \sim , em adição ao símbolo \neg , utilizado neste capítulo para a negação paraconsistente). Semanticamente, a negação clássica corresponde à seguinte definição: $\sim A$ é o caso se, e somente se, A não o for. CI_2 e CI_4 são na realidade extensões conservativas de CI_1 e CI_3 respectivamente. Para maiores detalhes quanto às motivações da lógica paraconsistente, veja [1], [2], [5], [11], [12], [13], [20], [21] e [22].

Os seguintes princípios foram adotados na confecção desses cálculos:

- 1ª) não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula a partir de duas fórmulas contraditórias A e $\neg A$;
- 2ª) o princípio da não-contradição não vigora, isto é, duas fórmulas contraditórias A e $\neg A$ podem ser ambas verdadeiras;
- 3ª) todos os teoremas são justificáveis à luz da intuição semântica que lhes corresponde;
- 4ª) esses cálculos devem buscar ser uma aproximação maximal da lógica clássica, respeitando os princípios acima.

Esses princípios são semelhantes aos adotados em da Costa [8] na construção dos cálculos C_n , os quais foram tomados como paradigma e como ponto de partida no projeto dos cálculos que são aqui apresentados. Acreditamos no entanto termos sido melhor sucedidos na aproximação do critério (4). Os cálculos CI_1 e CI_2 , por exemplo, possuem como teoremas a lei da dupla negação (a qual só vale parcialmente em C_1), as leis de De Morgan (as quais não valem em C_1) e a lei para

decompor a negação da implicação em uma conjunção (a qual também não vale em C_1).

Uma outra propriedade a distinguir esses cálculos daqueles da família C_n , de uma certa forma decorrente das propriedades citadas acima, é a existência de semânticas recursivas para os primeiros. Embora semânticas tenham sido dadas para os cálculos C_n em [9] e [10], tais semânticas não são recursivas. Essa tem sido uma das críticas levantadas contra os cálculos C_n (em [21] e [22], por exemplo).

Um fato curioso ocorre com o princípio da não-contradição. Esse princípio, conforme a formulação dada acima, assevera que duas fórmulas contraditórias A e $\neg A$ não podem ser ambas verdadeiras. Nestes cálculos, embora a expressão $\neg (A \wedge \neg A)$ seja um teorema, ao contrário do que ocorre no cálculo C_1 , temos que, ainda assim, apesar das aparências, o princípio da não-contradição não vigora, pois a interpretação semântica de $\neg (A \wedge \neg A)$ vista aqui para os cálculos CI difere daquela dada para esta expressão no cálculo C_1 .

A linguagem de CI_1 é L . Os postulados de CI_1 (axiomas ou regras de inferência) são dados abaixo:

- (ci) $A \rightarrow B \rightarrow A$;
- (cii) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
- (ciii) $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$;
- (civ) $A \wedge B \rightarrow A$;
- (cv) $A \wedge B \rightarrow B$;
- (cvi) $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$;
- (cvii) $A \rightarrow A \vee B$;
- (cviii) $B \rightarrow A \vee B$;
- (cix) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;
- (cx) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
- (cxi) $\neg (A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$;
- (cxii) $\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
- (cxiii) $\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
- (cxiv) $\neg \neg A \leftrightarrow A$;
- (cxv) $A \vee \neg A$.

A linguagem de CI_2 é L' , e os postulados de CI_2 são todos os postulados de CI_1 , expressos em L' , menos o postulado (x), o qual em CI_2 é um teorema, mais os seguintes esquemas, que introduzem o símbolo \sim :

$$(xvi) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A;$$

$$(xvii) \quad \sim \sim A \rightarrow A;$$

$$(xviii) \quad \neg \sim A \rightarrow A.$$

Teorema 3.1: Em CI_1 e CI_2 valem todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos \rightarrow , \wedge e \vee , ou seja:

$$\Gamma, A \vdash B \text{ ent } \Gamma \vdash A \rightarrow B;$$

$$A, A \rightarrow B \vdash B;$$

$$A, B \vdash A \wedge B;$$

$$A \wedge B \vdash A;$$

$$A \wedge B \vdash B;$$

$$A \vdash A \vee B;$$

$$B \vdash A \vee B;$$

$$A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash C.$$

Teorema 3.2: O sinal \sim funciona como a negação clássica em CI_2 , isto é:

$$A \rightarrow B, A \rightarrow \sim B \vdash \sim A;$$

$$\sim \sim A \vdash A.$$

Teorema 3.3: CI_2 é uma extensão conservativa de CI_1 .

Teorema 3.4: Entre outros, os seguintes esquemas são teoremas de CI_2 :

$$\sim A \rightarrow \neg A;$$

$$\neg \sim A \leftrightarrow A;$$

$$A^\circ \leftrightarrow \sim (A \wedge \neg A);$$

$$\neg (A \wedge \neg A);$$

$$A^{\circ\circ};$$

$$(A^\circ)^\circ;$$

$$B^\circ \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A;$$

$$\sim A \leftrightarrow \neg A \wedge A^\circ;$$

$$\neg A \leftrightarrow \sim A \vee \sim A^\circ;$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B);$$

$$A^\circ \leftrightarrow (A \wedge \neg A)^\circ;$$

$$B^\circ \rightarrow (A \rightarrow B)^\circ;$$

$$(A \rightarrow B)^\circ \rightarrow A^\circ \vee B^\circ;$$

$$A^\circ \wedge B^\circ \rightarrow (A \wedge B)^\circ;$$

$$(A \wedge B)^\circ \rightarrow A^\circ \vee B^\circ;$$

$$A^\circ \wedge B^\circ \rightarrow (A \vee B)^\circ;$$

$$(A \vee B)^\circ \rightarrow A^\circ \vee B^\circ.$$

Teorema 3.5: Entre outros, os seguintes esquemas não são teoremas de CI₂:

$CA \rightarrow BD \rightarrow (CA \rightarrow \neg BD) \rightarrow \neg A;$	$A^\circ;$
$CA \rightarrow BD \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A);$	$\sim (CA \wedge \neg AD);$
$A \rightarrow \neg A \rightarrow B;$	$CA \wedge \neg AD^\circ;$
$A \wedge \neg A \rightarrow B;$	$A^\circ \rightarrow (CA \rightarrow BD)^\circ;$
$CA \leftrightarrow \neg AD \rightarrow B;$	$(CA \rightarrow BD)^\circ \rightarrow A^\circ \wedge B^\circ;$
$\neg A \vee B \rightarrow (CA \rightarrow B);$	$CA \wedge BD^\circ \rightarrow A^\circ \wedge B^\circ;$
$CA \leftrightarrow B \rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B);$	$CA \vee B)^\circ \rightarrow A^\circ \wedge B^\circ.$
$\neg A \rightarrow \sim A;$	

O teorema seguinte estabelece que a equivalência forte é preservada pela composição de fórmulas.

Teorema 3.6: Seja A' uma fórmula obtida de A substituindo algumas ocorrências de B (não necessariamente todas) por B'. Então $\Gamma \frac{}{CI_2} B \leftrightarrow B'$ implica em $\Gamma \frac{}{CI_2} A \leftrightarrow A'$.

Definição 3.7: Dizemos que A é um literal de CI₂ se A é de uma das formas p, $\sim p$, $\neg p$ ou $\sim \neg p$.

Teorema 3.8: Toda fórmula de CI₂ pode ser colocada em forma conjuntiva normal, isto é, dada uma fórmula A de CI₂, existe uma fórmula B de CI₂ em forma conjuntiva normal tal que $\frac{}{CI_2} A \leftrightarrow B$.

O teorema 3.8, juntamente com os teoremas 3.1 e 3.2, indica a existência de um método de resolução clausal para o cálculo CI₂. Sobre o método de resolução aplicado à lógica clássica, veja [7] e [18].

Teorema 3.9: Toda fórmula de CI₂ pode ser colocada em forma disjuntiva normal.

O teorema 3.9, juntamente com os teoremas 3.1 e 3.2, indica a existência de um sistema de tableaux para o cálculo CI₂, no qual as fórmulas excluídas são precisamente os literais de CI₂, e onde o critério de fechamento só depende das fórmulas excluídas. Sobre o método dos tableaux, veja [3], [5] e [6].

O teorema seguinte esclarece a relação entre os cálculos CI_1 e CI_2 .

Teorema 3.10: Seja f uma função com argumentos na coleção das fórmulas de CI_1 , e com valores na coleção das fórmulas de CI_2 , definida pelas seguintes condições:

$$f(p) = p;$$

$$f(A \# B) = f(A) \# f(B), \text{ onde } \# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\};$$

$$f(\neg p) = \neg p;$$

$$f(\neg (A \rightarrow B)) = f(A) \wedge f(\neg B);$$

$$f(\neg (A \wedge B)) = f(\neg A) \vee f(\neg B), \text{ onde } A \wedge B \text{ não é da forma } C \wedge \neg C;$$

$$f(\neg (A \wedge \neg A)) = \sim f(A) \vee \sim f(\neg A);$$

$$f(\neg (A \vee B)) = f(\neg A) \wedge f(\neg B);$$

$$f(\neg \neg A) = f(A).$$

Então, para qualquer fórmula A de CI_1 ,
 $\frac{}{CI_1} A$ implica em $\frac{}{CI_2} f(A)$.

Teorema 3.11: CI_2 é decidível pelas seguintes matrizes de três valores, com 1 e 2 como valores distinguidos:

	B	A \rightarrow B		
A		0	1	2
0		2	2	2
1		0	1	2
2		0	1	2

	B	A \wedge B		
A		0	1	2
0		0	0	0
1		0	1	1
2		0	1	2

	B	A \vee B		
A		0	1	2
0		0	1	2
1		1	1	2
2		2	2	2

A	$\neg A$
0	2
1	1
2	0

A	$\sim A$
0	2
1	0
2	0

Como CI_2 é uma extensão conservativa de CI_1 , temos naturalmente que CI_1 também é decidível por estas matrizes.

Na confecção das tabelas acima, usamos a heurística de associar a cada atribuição de uma fórmula componente uma certa fórmula, de modo a determinar a atribuição correspondente da fórmula composta considerada.

No caso presente utilizamos as seguintes associações:

A	fórmula associada
0	$\sim A$
1	$A \wedge \neg A$
2	$\sim \neg A$

Assim, por exemplo, se A tiver o valor 1 e B tiver o valor 2, então $A \wedge B$ deverá ter o valor 1, já que

$$\vdash_{CI_2} (A \wedge \neg A) \wedge \sim \neg B \rightarrow (A \wedge B) \wedge \neg (A \wedge B).$$

Definição 3.12: Dizemos que V é uma valoração para CI₁ se V é uma função de L em $\{0,1\}$ e há uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações clássicas e duas funções V_{\max} e V_{\min} de L em $\{0,1\}$, onde $V = V_{\max}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (3.12.1) $V_{\max}(p) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v(p) = 1$;
- (3.12.2) $V_{\min}(p) = 1$ sss para todo $v \in \mathcal{E}$, $v(p) = 1$;
- (3.12.3) $V_{\max}(\neg A) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$;
- (3.12.4) $V_{\min}(\neg A) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$;
- (3.12.5) $V_{\max}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$ ou $V_{\max}(B) = 1$;
- (3.12.6) $V_{\min}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (3.12.7) $V_{\max}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ e $V_{\max}(B) = 1$;
- (3.12.8) $V_{\min}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ e $V_{\min}(B) = 1$;
- (3.12.9) $V_{\max}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ ou $V_{\max}(B) = 1$;
- (3.12.10) $V_{\min}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ ou $V_{\min}(B) = 1$.

Note que, na definição acima, como $V = V_{\max}$, temos que V_{\max} é uma função que deve ser bem comportada, o que nem sempre coincide com a busca da maximização. Tal coincidência se dá de fato com conjunções e disjunções, mas não com implicações. Por exemplo, se quiséssemos realmente maximizar a fórmula $A \rightarrow B$, então deveríamos substituir a cláusula (3.12.5) da definição por

$$V_{\max}(A \rightarrow B) = 1 \text{ sss } V_{\min}(A) = 0 \text{ ou } V_{\max}(B) = 1.$$

Porém, se fizéssemos isto, a implicação, segundo tal semântica, não gozaria mais da propriedade

$$A, A \rightarrow B \vdash B.$$

A função V_{\min} , conforme a definição 3.12, de fato minimiza em todas as situações, e é tal diferença que gera a assimetria entre as cláusulas (3.12.5) e (3.12.6).

Teorema 3.13: $\Gamma \frac{\perp}{CI_1} A \text{ sss } \Gamma \frac{\perp}{CI_1} A$

Definição 3.14: Dizemos que V é uma valoração para CI_2 se forem cumpridas todas as condições da definição anterior, com V_{\max} e V_{\min} definidas em L' , mais as seguintes condições adicionais:

$$(3.14.1) \quad V_{\max}(\sim A) = 1 \text{ sss } V_{\max}(A) = 0;$$

$$(3.14.2) \quad V_{\min}(\sim A) = 1 \text{ sss } V_{\max}(A) = 0.$$

Observe que, segundo as duas últimas definições, temos sempre que $V_{\min}(A) \leq V_{\max}(A)$.

Descrevemos a seguir a heurística usada para determinar as condições da última definição. Podemos considerar $\sim A$ como uma abreviatura para $A \rightarrow \perp$, onde \perp é um conectivo de aridade zero que é sempre falso, isto é, se v é uma valoração clássica, então $v(\perp) = 0$. Portanto, se V for uma valoração para CI_2 , então $V(\perp) = 0$.

$$\text{Temos que } V_{\max}(\sim A) = 1$$

sss

$$V_{\max}(A \rightarrow \perp) = 1$$

sss

$$V_{\max}(A) = 0 \text{ ou } V_{\max}(\perp) = 1$$

sss

$$V_{\max}(A) = 0.$$

$$\text{Temos também que } V_{\min}(\sim A) = 1$$

sss

$$V_{\min}(A \rightarrow \perp) = 1$$

sss

$$V_{\max}(A) = 0 \text{ ou } V_{\min}(\perp) = 1$$

sss

$$V_{\max}(A) = 0.$$

Teorema 3.15: $\Gamma \frac{\perp}{CI_2} A \text{ sss } \Gamma \frac{\perp}{CI_2} A.$

Mostramos a seguir que o cálculo CI₂ (e portanto o cálculo CI₁) admite uma interpretação na lógica clássica de primeira ordem.

Para cada letra sentencial p associamos um sinal predicativo P de aridade 1. Seja LC um cálculo para a lógica de predicados clássica cuja linguagem possui os sinais predicativos citados.

Teorema 3.16: Sejam g , g_{\max} e g_{\min} funções com argumentos em L' e com valores na coleção das fórmulas de LC, onde $g = g_{\max}$, definidas pelas seguintes condições:

$$g_{\max}(p) = \exists x Px;$$

$$g_{\min}(p) = \forall x Px;$$

$$g_{\max}(\neg A) = \neg g_{\min}(A);$$

$$g_{\min}(\neg A) = \neg g_{\max}(A);$$

$$g_{\max}(\sim A) = \neg g_{\max}(A);$$

$$g_{\min}(\sim A) = \neg g_{\min}(A);$$

$$g_{\max}(A \# B) = g_{\max}(A) \# g_{\max}(B), \text{ onde } \# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\};$$

$$g_{\min}(A \rightarrow B) = g_{\max}(A) \rightarrow g_{\min}(B);$$

$$g_{\min}(A \wedge B) = g_{\min}(A) \wedge g_{\min}(B);$$

$$g_{\min}(A \vee B) = g_{\min}(A) \vee g_{\min}(B).$$

Então, para qualquer fórmula A de CI₂,

$$\frac{}{CI_2} A \text{ sss } \frac{}{LC} g(A).$$

Devido à assimetria entre as cláusulas (3.12.5) e (3.12.6), e pelo fato da função V_{\max} da definição 3.12 não maximizar realmente em todos os casos, imaginamos uma semântica alternativa que possua internamente uma função maximizadora V_{\max} , e externamente, em sua definição formal, uma função V que seja bem comportada. Chamamos tal semântica de *semântica de maximização com interface*.

Na realidade definiremos abaixo duas semânticas desta espécie, respectivamente para os cálculos CI₃ e CI₄.

Definição 3.17: Dizemos que V é uma valoração para CI_3 se há uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações clássicas e duas funções V_{\max} e V_{\min} tal que V , V_{\max} e V_{\min} são funções de L em $\langle 0,1 \rangle$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (3.17.1) $V(p) = V_{\max}(p)$;
- (3.17.2) $V_{\max}(p) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v(p) = 1$;
- (3.17.3) $V_{\min}(p) = 1$ sss para todo $v \in \mathcal{E}$, $v(p) = 1$;
- (3.17.4) $V(\neg A) = V_{\max}(\neg A)$;
- (3.17.5) $V_{\max}(\neg A) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$;
- (3.17.6) $V_{\min}(\neg A) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$;
- (3.17.7) $V(A \rightarrow B) = 1$ sss $V(A) = 0$ ou $V(B) = 1$;
- (3.17.8) $V_{\max}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$ ou $V_{\max}(B) = 1$;
- (3.17.9) $V_{\min}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (3.17.10) $V(A \wedge B) = 1$ sss $V(A) = 1$ e $V(B) = 1$;
- (3.17.11) $V_{\max}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ e $V_{\max}(B) = 1$;
- (3.17.12) $V_{\min}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ e $V_{\min}(B) = 1$;
- (3.17.13) $V(A \vee B) = 1$ sss $V(A) = 1$ ou $V(B) = 1$;
- (3.17.14) $V_{\max}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ ou $V_{\max}(B) = 1$;
- (3.17.15) $V_{\min}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ ou $V_{\min}(B) = 1$.

Definição 3.18: Dizemos que V é uma valoração para CI_4 se forem cumpridas todas as condições da definição anterior, com V , V_{\max} e V_{\min} definidas em L' , mais as seguintes condições adicionais:

- (3.18.1) $V(\sim A) = 1$ sss $V(A) = 0$;
- (3.18.2) $V_{\max}(\sim A) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$;
- (3.18.3) $V_{\min}(\sim A) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$.

Observe que, segundo as duas últimas definições, temos sempre que $V_{\min}(A) \leq V(A) \leq V_{\max}(A)$.

A linguagem de CI_3 é L . Os postulados de CI_3 são dados abaixo:

- (ci) $A \rightarrow B \rightarrow A$;
 (cii) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
 (ciii) $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$;
 (civ) $A \wedge B \rightarrow A$;
 (cv) $A \wedge B \rightarrow B$;
 (cvi) $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$;
 (cvii) $A \rightarrow A \vee B$;
 (cviii) $B \rightarrow A \vee B$;
 (cix) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;
 (cx) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
 (cxi) $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$;
 (cxii) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
 (cxiii) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
 (cxiv) $A \rightarrow \neg\neg A$;
 (cxv) $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$;
 (cxvi) $\neg\neg p \rightarrow p$;
 (cxvii) $\neg\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg\neg B$;
 (cxviii) $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg\neg B$;
 (cxix) $\neg\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg\neg A \vee \neg\neg B$;
 (cxx) $A \vee \neg A$.

Note que os postulados de CI_3 diferem dos postulados de CI_4 quanto ao tratamento de negações de fórmulas compostas e da dupla negação. Enquanto que no cálculo CI_4 é postulado $\neg\neg A \rightarrow A$, no cálculo CI_3 é postulado $A \rightarrow \neg\neg A$. A razão semântica disto é que $V(A) \leq V_{\max}(A)$ e $V(\neg\neg A) = V_{\max}(A)$.

A linguagem de CI_4 é L' , e os postulados de CI_4 são todos os postulados de CI_3 , expressos em L' , menos o postulado (x), o qual em CI_4 é um teorema, mais os seguintes esquemas:

- (cxxi) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A$;
 (cxxii) $\sim\sim A \rightarrow A$;
 (cxxiii) $\neg\sim A \leftrightarrow \neg\neg A$.

4 - Os Cálculos Paracompletos PC_1 e PC_2

Os cálculos paracompletos da família PC (esta sigla é uma abreviatura da palavra "paracompleto") foram construídos para corresponder à alternativa semântica que qualificamos como cética. Num quadro de verdades relativas divergentes para um mesmo fato, o aceitamos como verdadeiro se ele o for para todos os pontos de vista. O cálculo PC_2 difere do cálculo PC_1 de forma a refletir uma variação quanto a um aspecto na definição de sua semântica, a ser precisado quando da apresentação das semânticas. Um outro contexto onde tais lógicas se aplicam diz respeito a questões de percepção, conhecimento ou crença. Definimos mais adiante uma semântica de matrizes finitas que reflete mais fielmente esta última aplicação. Para outros detalhes quanto às motivações da lógica paracompleta, veja [15].

Os seguintes princípios foram adotados na confecção desses cálculos:

- 1ª) o princípio do terceiro excluído não vigora;
- 2ª) todos os teoremas são justificáveis à luz da intuição semântica que lhes corresponde;
- 3ª) esses cálculos devem buscar ser uma aproximação maximal da lógica clássica, respeitando os princípios acima.

O cálculo P_1 de da Costa (vide [15]) foi um ponto de partida para o projeto dos cálculos paracompletos apresentados neste capítulo. Estes cálculos cumprem melhor o terceiro princípio citado acima que o cálculo P_1 . Por exemplo, o cálculo PC_1 possui também como teoremas a lei da dupla negação (a qual só vale parcialmente em P_1), as leis de De Morgan (as quais não valem em P_1) e a lei para decompor a negação da implicação em uma conjunção (a qual também não vale em P_1).

Uma outra propriedade a distinguir os cálculos PC do cálculo P_1 é a existência de semânticas recursivas para os primeiros. Embora P_1 possua uma semântica de valorações, esta não é recursiva.

A linguagem de PC_1 é L . Os postulados de PC_1 são dados abaixo:

- (i) $A \rightarrow B \rightarrow A$;
 (ii) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
 (iii) $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$
 (iv) $A \wedge B \rightarrow A$;
 (v) $A \wedge B \rightarrow B$;
 (vi) $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$;
 (vii) $A \rightarrow A \vee B$;
 (viii) $B \rightarrow A \vee B$;
 (ix) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;
 (x) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
 (xi) $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$;
 (xii) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
 (xiii) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
 (xiv) $\neg\neg A \leftrightarrow A$;
 (xv) $A \rightarrow \neg A \rightarrow B$.

Note que os postulados (i) a (xiv) de PC_1 e CI_1 são idênticos. PC_1 e CI_1 diferem apenas com respeito ao esquema (xv).

Teorema 4.1: Em PC_1 valem todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos \rightarrow , \wedge e \vee .

Adotaremos, neste capítulo, para qualquer fórmula A de L , a abreviatura $\sim A \equiv A \rightarrow \neg A$.

Teorema 4.2: O sinal definido \sim funciona como a negação clássica em PC_1 .

Teorema 4.3: Entre outros, os seguintes esquemas são teoremas de PC₁:

$$\begin{array}{ll}
 \neg A \rightarrow \sim A; & A \wedge \neg A \rightarrow B; \\
 \neg \sim A \leftrightarrow A; & (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B); \\
 \sim (A \wedge \neg A); & A^* \leftrightarrow (\neg A)^*; \\
 (\sim A)^*; & B^* \rightarrow (A \rightarrow B)^*; \\
 A^* \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A; & A^* \wedge B^* \rightarrow (A \wedge B)^*; \\
 (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \sim A; & (A \wedge B)^* \rightarrow A^* \vee B^*; \\
 \sim A \leftrightarrow \neg A \vee \sim A^*; & A^* \wedge B^* \rightarrow (A \vee B)^*; \\
 \neg A \leftrightarrow \sim A \wedge A^*; & (A \vee B)^* \rightarrow A^* \vee B^*.
 \end{array}$$

Teorema 4.4: Entre outros, os seguintes esquemas não são teoremas de PC₁:

$$\begin{array}{ll}
 (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A; & \neg (A \wedge \neg A); \\
 (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A); & A^* \rightarrow (A \rightarrow B)^*; \\
 (A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B); & (A \rightarrow B)^* \rightarrow A^* \vee B^*; \\
 (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B; & (A \wedge B)^* \rightarrow A^* \wedge B^*; \\
 A \vee \neg A; & (A \vee B)^* \rightarrow A^* \wedge B^*.
 \end{array}$$

O teorema seguinte estabelece que a equivalência forte é preservada pela composição de fórmulas.

Teorema 4.5: Se A' é uma fórmula obtida de A substituindo algumas ocorrências de B (não necessariamente todas) por B', então $\Gamma \frac{}{PC_1} B \leftrightarrow B'$ implica em $\Gamma \frac{}{PC_1} A \leftrightarrow A'$.

Definição 4.6: Dizemos que A é um literal de PC₁ se A é de uma das formas p, $\sim p$, $\neg p$ ou $\sim \neg p$.

Teorema 4.7: Toda fórmula de PC₁ pode ser colocada em forma conjuntiva normal.

O teorema 4.7, juntamente com os teoremas 4.1 e 4.2, indica a existência de um método de resolução clausal para o cálculo PC₁.

Teorema 4.8: Toda fórmula de PC₁ pode ser colocada em forma disjuntiva normal.

O teorema 4.8, juntamente com os teoremas 4.1 e 4.2, indica a existência de um sistema de tableaux para o cálculo PC_1 , no qual as fórmulas excluídas são precisamente os literais de PC_1 , e onde o critério de fechamento só depende das fórmulas excluídas.

O teorema seguinte esclarece a relação entre os cálculos P_1 e PC_1 .

Teorema 4.9: Se f é a função definida no enunciado do teorema 3.8, então, para qualquer fórmula A de L , $\vdash_{P_1} A$ implica em $\vdash_{PC_1} f(A)$.

Teorema 4.10: PC_1 é decidível pelas seguintes matrizes de três valores, onde 2 é o único valor distinguido:

	B	A \rightarrow B		
A		0	1	2
0		2	2	2
1		2	2	2
2		0	1	2

	B	A \wedge B		
A		0	1	2
0		0	0	0
1		0	1	1
2		0	1	2

	B	A \vee B		
A		0	1	2
0		0	1	2
1		1	1	2
2		2	2	2

A	\neg A
0	2
1	1
2	0

Na confecção das tabelas acima, usamos uma heurística análoga à utilizada para CI_2 . No caso presente, adotamos a seguinte associação:

A	fórmula associada
0	\neg A
1	$\sim A \wedge \sim \neg A$
2	A

Assim, por exemplo, se A tiver o valor 2 e B tiver o valor 1, então $A \rightarrow B$ deverá ter o valor 1, já que

$$\vdash_{PC_1} A \wedge (\sim B \wedge \sim \neg B) \rightarrow \sim (A \rightarrow B) \wedge \sim \neg (A \rightarrow B)$$

A semântica de matrizes para PC_1 também conecta este cálculo a um outro tipo de aplicação, relacionado a questões de percepção, conhecimento ou crença. Por exemplo, considere o enunciado "Deus existe", com respeito a um sujeito que

contempla o universo. Se este sujeito crê em Deus, poderíamos atribuir ao enunciado dado o valor de verdade 2; se o sujeito não tem nenhuma opinião acerca de Deus, o enunciado teria o valor de verdade 1; finalmente, se o sujeito é ateu, então o enunciado teria o valor de verdade 0.

Definição 4.11: Dizemos que V é uma valoração para PC_1 se há uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações clássicas e duas funções V_{\min} e V_{\max} de L em $(0,1)$, onde $V = V_{\min}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (4.11.1) $V_{\min}(p) = 1$ sss para todo $v \in \mathcal{E}$, $v(p) = 1$;
- (4.11.2) $V_{\max}(p) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v(p) = 1$;
- (4.11.3) $V_{\min}(\neg A) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$;
- (4.11.4) $V_{\max}(\neg A) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$;
- (4.11.5) $V_{\min}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (4.11.6) $V_{\max}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$ ou $V_{\max}(B) = 1$;
- (4.11.7) $V_{\min}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ e $V_{\min}(B) = 1$;
- (4.11.8) $V_{\max}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ e $V_{\max}(B) = 1$;
- (4.11.9) $V_{\min}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (4.11.10) $V_{\max}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ ou $V_{\max}(B) = 1$.

Observe que, segundo a definição acima, $V_{\min}(A) \leq V_{\max}(A)$.

Note que, na definição acima, como $V = V_{\min}$, temos que V_{\min} é uma função que deve ser bem comportada, o que nem sempre coincide com a busca da minimização. Tal coincidência se dá de fato com conjunções e disjunções, mas não com implicações. Por exemplo, se quiséssemos realmente minimizar a fórmula $A \rightarrow B$, então deveríamos substituir a cláusula (4.11.5) da definição por

$$V_{\min}(A \rightarrow B) = 1 \text{ sss } V_{\max}(A) = 0 \text{ ou } V_{\min}(B) = 1.$$

Porém, se fizéssemos isto, a implicação não seria mais clássica, contrariando o compromisso que assumimos neste trabalho.

A função V_{\max} , conforme a definição 4.11, de fato maximiza em todas as situações, e é tal diferença que gera a assimetria entre as cláusulas (4.11.5) e (4.11.6).

Teorema 4.12: $\Gamma \vdash_{PC_1} A$ sss $\Gamma \Vdash_{PC_1} A$.

Mostramos a seguir que o cálculo PC_1 admite uma interpretação na lógica clássica de primeira ordem.

Para cada letra sentencial p associamos um sinal predicativo P de aridade 1. Seja LC um cálculo para a lógica de predicados clássica cuja linguagem possui os sinais predicativos citados.

Teorema 4.13: Sejam h , h_{\min} e h_{\max} funções com argumentos na coleção das fórmulas de PC_1 , e com valores na coleção das fórmulas de LC , onde $h = h_{\min}$, definidas pelas seguintes condições:

$$h_{\min}(p) = \forall x Px;$$

$$h_{\max}(p) = \exists x Px;$$

$$h_{\min}(\neg A) = \neg h_{\max}(A);$$

$$h_{\max}(\neg A) = \neg h_{\min}(A);$$

$$h_{\min}(A \# B) = h_{\min}(A) \# h_{\min}(B), \text{ onde } \# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\};$$

$$h_{\max}(A \rightarrow B) = h_{\min}(A) \rightarrow h_{\max}(B);$$

$$h_{\max}(A \wedge B) = h_{\max}(A) \wedge h_{\max}(B);$$

$$h_{\max}(A \vee B) = h_{\max}(A) \vee h_{\max}(B).$$

Então, para qualquer fórmula A de PC_1 ,

$$\frac{}{PC_1} A \text{ sss } \frac{}{LC} h(A).$$

Devido à assimetria entre as cláusulas (4.11.5) e (4.11.6), e pelo fato da função V_{\min} da definição 4.11 não minimizar realmente em todos os casos, imaginamos uma semântica alternativa que possua internamente uma função minimizadora V_{\min} , e externamente, em sua definição formal, uma função V que seja bem comportada. Chamamos tal semântica de *semântica de minimização com interface*.

Definição 4.14: Dizemos que V é uma valoração para PC_2 se há uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações clássicas e duas funções V_{\min} e V_{\max} tal que V , V_{\min} e V_{\max} são funções de L em $\langle 0,1 \rangle$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (4.14.1) $V(p) = V_{\min}(p)$;
- (4.14.2) $V_{\min}(p) = 1$ sss para todo $v \in \mathcal{E}$, $v(p) = 1$;
- (4.14.3) $V_{\max}(p) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v(p) = 1$;
- (4.14.4) $V(\neg A) = V_{\min}(\neg A)$;
- (4.14.5) $V_{\min}(\neg A) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$;
- (4.14.6) $V_{\max}(\neg A) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$;
- (4.14.7) $V(A \rightarrow B) = 1$ sss $V(A) = 0$ ou $V(B) = 1$;
- (4.14.8) $V_{\min}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (4.14.9) $V_{\max}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$ ou $V_{\max}(B) = 1$;
- (4.14.10) $V(A \wedge B) = 1$ sss $V(A) = 1$ e $V(B) = 1$;
- (4.14.11) $V_{\min}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ e $V_{\min}(B) = 1$;
- (4.14.12) $V_{\max}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ e $V_{\max}(B) = 1$;
- (4.14.13) $V(A \vee B) = 1$ sss $V(A) = 1$ ou $V(B) = 1$;
- (4.14.14) $V_{\min}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (4.14.15) $V_{\max}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ ou $V_{\max}(B) = 1$.

Observe que, segundo a definição acima, temos sempre que $V_{\min}(A) \leq V(A) \leq V_{\max}(A)$.

A linguagem de PC₂ é L. Os postulados de PC₂ são dados abaixo:

- (ci) $A \rightarrow B \rightarrow A$;
- (cii) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
- (ciii) $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$;
- (civ) $A \wedge B \rightarrow A$;
- (cv) $A \wedge B \rightarrow B$;
- (cvi) $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$;
- (cvii) $A \rightarrow A \vee B$;
- (cviii) $B \rightarrow A \vee B$;
- (cix) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;
- (cx) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
- (cxii) $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$;
- (cxiii) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
- (cxiiii) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
- (cxv) $\neg\neg A \rightarrow A$;
- (cxvi) $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$;
- (cxvii) $p \rightarrow \neg\neg p$;
- (cxviii) $\neg\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg\neg B$;
- (cxix) $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg\neg B$;
- (cxi) $\neg\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg\neg A \vee \neg\neg B$;
- (cxii) $A \rightarrow \neg A \rightarrow B$.

Note que os postulados de PC₂ diferem dos postulados de PC₁ quanto ao tratamento de negações de fórmulas compostas e da dupla negação. Enquanto que no cálculo P₁ é postulado $A \rightarrow \neg\neg A$, no cálculo PC₂ é postulado $\neg\neg A \rightarrow A$. A razão semântica disto é que $V_{\min}(A) \leq V(A)$ e $V(\neg\neg A) = V_{\min}(A)$.

5 - Os Cálculos Não Aléticos NAL₁, NAL₂, NAL₃ e NAL₄

Os cálculos não aléticos da família NAL (esta sigla é uma abreviatura da expressão "não alético") correspondem a uma combinação das duas alternativas semânticas que qualificamos como crédula e como cética. Num quadro de verdades relativas $v_{i,j}$, onde i varia ao longo de uma determinada dimensão e j varia ao longo de outra dimensão, podemos combinar as duas alternativas acima de duas maneiras distintas (estamos aqui contando o número de alternativas segundo a ordem em que usamos os metaquantificadores universal e existencial, não importando nesta classificação a troca de i por j e vice-versa):

1ª) um fato é verdadeiro se, e somente se, para todo i da primeira dimensão, existe um j da segunda dimensão tal que o fato é verdadeiro na situação $v_{i,j}$;

2ª) um fato é verdadeiro se, e somente se, existe um i da primeira dimensão tal que, para todo j da segunda dimensão, o fato é verdadeiro na situação $v_{i,j}$.

Exemplificamos a seguir um *ambiente não alético*, tal como este poderia ocorrer na vida real. Consideremos a história de um objeto multifacetado e multicolorido tal que, a partir de cada lugar e em um instante dado, só é possível observar no máximo uma cor. Podemos considerar que, para cada instante i e para cada lugar l , há uma valoração clássica $v_{i,l}$ que descreve o meio ambiente no instante i e a partir do lugar l . Conforme a primeira alternativa descrita acima, dizemos que o objeto considerado é azul se, e somente se, para todo instante i , existe um lugar l tal que $v_{i,l}$ (o objeto é azul) = 1, ou seja, em qualquer instante há um ponto de vista a partir do qual a cor observada do objeto é azul.

Um outro tipo de ambiente não alético é aquele que combina questões de relatividade dos pontos de referência com problemas de percepção, conhecimento ou crença. Por exemplo, imagine um observador em movimento com uma percepção imperfeita. Se em certos intervalos de tempo a sua percepção fosse perfeita, então ele poderia observar, em instantes

distintos, qualidades contraditórias nos mesmos objetos e, se em certos intervalos de tempo este observador estivesse em repouso, então, se a sua percepção fosse falha, ele poderia não conseguir observações conclusivas com respeito a certos objetos. Uma semântica refletindo tal ambiente pode ser construída compondo-se uma semântica de maximização paraconsistente com uma semântica matricial para-completa.

Os seguintes princípios foram adotados na confecção destes cálculos:

- 1ª) não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula a partir de duas fórmulas contraditórias A e $\neg A$;
- 2ª) o princípio da não contradição não vigora, isto é, duas fórmulas contraditórias A e $\neg A$ podem ser ambas verdadeiras;
- 3ª) o princípio do terceiro excluído não vale;
- 4ª) todos os teoremas são justificáveis à luz da intuição semântica que lhes corresponde (todos os cálculos vistos neste capítulo são contrapartes sintáticas de suas alternativas semânticas correspondentes);
- 5ª) esses cálculos devem buscar ser uma aproximação maximal da lógica clássica, respeitando os princípios acima.

O cálculo N_1 de da Costa (vide [14]) foi um ponto de partida para o projeto dos cálculos não aléticos apresentados neste capítulo. Estes cálculos cumprem melhor o quinto princípio citado acima que o cálculo N_1 . Os cálculos NAL_1 e NAL_2 , por exemplo, possuem como teoremas a lei da dupla negação, as leis de De Morgan e a lei para decompor a negação da implicação em uma conjunção, e nenhuma dessas leis é teorema em N_1 .

Uma outra propriedade a distinguir os cálculos NAL do cálculo N_1 é a existência de semânticas recursivas para os primeiros. O cálculo N_1 possui uma semântica de valorações, mas esta não é recursiva.

A linguagem de NAL_1 é L . Os postulados de NAL_1 são dados abaixo:

- (i) $A \rightarrow B \rightarrow A$;
- (ii) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
- (iii) $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$;
- (iv) $A \wedge B \rightarrow A$;
- (v) $A \wedge B \rightarrow B$;
- (vi) $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$;
- (vii) $A \rightarrow A \vee B$;
- (viii) $B \rightarrow A \vee B$;
- (ix) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;
- (x) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
- (xi) $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$;
- (xii) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
- (xiii) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
- (xiv) $\neg\neg A \leftrightarrow A$.

Observe que os postulados de NAL_1 são os postulados (i) a (xiv) de CI_1 (ou de PC_1).

A linguagem de NAL_2 é L' , e os postulados de NAL_2 são todos os postulados de NAL_1 , expressos em L' , menos o postulado (x), o qual em NAL_2 é um teorema, mais os seguintes esquemas:

- (xv) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A$;
- (xvi) $\sim\sim A \rightarrow A$;
- (xvii) $\neg\sim A \leftrightarrow A$.

Teorema 5.1: Em NAL_1 e NAL_2 valem todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos \rightarrow , \wedge e \vee .

Teorema 5.2: O sinal \sim funciona como a negação clássica em NAL_2 .

Teorema 5.3: NAL_2 é uma extensão conservativa de NAL_1 .

Teorema 5.4: Entre outros, os seguintes esquemas são teoremas de NALz:

$$\begin{array}{ll}
 A^* \rightarrow \sim A \rightarrow \neg A; & (A \rightarrow B)^\circ \rightarrow A^\circ \vee B^\circ; \\
 A^\circ \rightarrow \neg A \rightarrow \sim A; & A^\circ \wedge B^\circ \rightarrow (A \wedge B)^\circ; \\
 A^\circ \leftrightarrow \sim (A \wedge \neg A); & A^* \wedge B^* \rightarrow (A \wedge B)^*; \\
 A^\circ \wedge B^* \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A; & (A \wedge B)^\circ \rightarrow A^\circ \vee B^\circ; \\
 A^{\circ\circ}; & (A \wedge B)^* \rightarrow A^* \vee B^*; \\
 (A \sim A)^\circ; & A^\circ \wedge B^\circ \rightarrow (A \vee B)^\circ; \\
 (A \sim A)^*; & A^* \wedge B^* \rightarrow (A \vee B)^*; \\
 A^\circ \vee A^*; & (A \vee B)^\circ \rightarrow A^\circ \vee B^\circ; \\
 B^\circ \rightarrow (A \rightarrow B)^\circ; & (A \vee B)^* \rightarrow A^* \vee B^*. \\
 B^* \rightarrow (A \rightarrow B)^*; &
 \end{array}$$

Teorema 5.5: Entre outros, os seguintes esquemas não são teoremas de NALz:

$$\begin{array}{ll}
 (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A; & A^\circ; \\
 (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A; & A^*; \\
 A \rightarrow \neg A \rightarrow B; & A^\circ \rightarrow (A \rightarrow B)^\circ; \\
 A \wedge \neg A \rightarrow B; & A^* \rightarrow (A \rightarrow B)^*; \\
 (A \leftrightarrow \neg A) \rightarrow B; & (A \rightarrow B)^* \rightarrow A^* \vee B^*; \\
 A \vee \neg A; & (A \rightarrow B)^\circ \rightarrow A^\circ \wedge B^\circ; \\
 (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B; & (A \wedge B)^\circ \rightarrow A^\circ \wedge B^\circ; \\
 \neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B); & (A \wedge B)^* \rightarrow A^* \wedge B^*; \\
 (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \leftrightarrow \neg B); & (A \vee B)^\circ \rightarrow A^\circ \wedge B^\circ; \\
 \neg A \rightarrow \sim A; & (A \vee B)^* \rightarrow A^* \wedge B^*. \\
 \sim A \rightarrow \neg A; &
 \end{array}$$

O teorema seguinte assevera que a composição de fórmulas preserva a equivalência forte.

Teorema 5.6: Se A' é uma fórmula obtida de A substituindo algumas ocorrências de B (não necessariamente todas) por B' , então $\Gamma \vdash_{NALz} B \leftrightarrow B'$ implica em $\Gamma \vdash_{NALz} A \leftrightarrow A'$.

Definição 5.7: Dizemos que A é um literal de NALz se A é de uma das formas p , $\sim p$, $\neg p$ ou $\sim \neg p$.

Teorema 5.8: Toda fórmula de NALz pode ser colocada em forma conjuntiva normal.

O teorema 5.8, juntamente com os teoremas 5.1 e 5.2, indica a existência de um método de resolução clausal para o cálculo NAL₂.

Teorema 5.9: Toda fórmula de NAL₂ pode ser colocada em forma disjuntiva normal.

O teorema 5.9, juntamente com os teoremas 5.1 e 5.2, indica a existência de um sistema de tableaux para o cálculo NAL₂, no qual as fórmulas excluídas são precisamente os literais de NAL₂, e onde o critério de fechamento só depende de tais fórmulas.

O teorema seguinte esclarece a relação entre os cálculos N₁ e NAL₂.

Teorema 5.10: Se f é a função definida no enunciado do teorema 3.8, então, para qualquer fórmula A de L , $\frac{\vdash}{N_1} A$ implica em $\frac{\vdash}{NAL_2} f(A)$.

Teorema 5.11: NAL₂ é decidível pelas seguintes matrizes com quatro valores, onde 2 e 3 são os valores distinguidos:

A \ B	A → B			
	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	0	1	2	3
3	0	1	2	3

A \ B	A ∧ B			
	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

A \ B	A ∨ B			
	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

A	¬ A
0	3
1	1
2	2
3	0

A	~ A
0	3
1	3
2	0
3	0

Como NAL₂ é uma extensão conservativa de NAL₁, temos que NAL₁ também é decidível por estas matrizes. Utilizamos a mesma heurística adotada anteriormente, com a seguinte correspondência:

A	fórmula associada
0	$\sim A \wedge \neg A$
1	$\sim A \wedge \sim \neg A$
2	$A \wedge \neg A$
3	$A \wedge \sim \neg A$

Assim, por exemplo, se A tiver o valor 2 e B tiver o valor 3, então $A \vee B$ deverá ter o valor 3, já que

$$\overline{\text{NAL}_2} (A \wedge \neg A) \wedge (B \wedge \sim \neg B) \rightarrow (A \vee B) \wedge \sim \neg (A \vee B).$$

Definição 5.12: Dizemos que V é uma valoração para NAL_1 se há uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações para CI_1 e duas funções V_{\min} e V_{\max} de L em $\langle 0,1 \rangle$, onde $V = V_{\min}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (5.12.1) $V_{\min}(p) = 1$ sss para todo $v \in \mathcal{E}$, $v_{\max}(p) = 1$;
- (5.12.2) $V_{\max}(p) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v_{\min}(p) = 1$;
- (5.12.3) $V_{\min}(\neg A) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$;
- (5.12.4) $V_{\max}(\neg A) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$;
- (5.12.5) $V_{\min}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (5.12.6) $V_{\max}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$ ou $V_{\max}(B) = 1$;
- (5.12.7) $V_{\min}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ e $V_{\min}(B) = 1$;
- (5.12.8) $V_{\max}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ e $V_{\max}(B) = 1$;
- (5.12.9) $V_{\min}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (5.12.10) $V_{\max}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ ou $V_{\max}(B) = 1$.

Na definição acima, nem sempre $V_{\min}(A) \leq V_{\max}(A)$, dada uma fórmula A de L. Por exemplo, sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 valorações clássicas tais que $v_1(p) = v_2(p) = v_4(p) = 0$ e $v_3(p) = v_5(p) = v_6(p) = 1$, $\mathcal{E}_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\mathcal{E}_2 = \langle v_4, v_5, v_6 \rangle$, V_1 a valoração para CI_1 determinada por \mathcal{E}_1 , V_2 a valoração para CI_1 determinada por \mathcal{E}_2 , e finalmente V a valoração para NAL_1 determinada por $\langle V_1, V_2 \rangle$. Então $V_{\max}(p) = 0$ e $V_{\min}(p) = 1$, logo $V_{\max}(p) < V_{\min}(p)$.

O teorema abaixo diz que uma valoração para NAL_1 também pode ser determinada maximizando-se sobre coleções de valorações para PC_1 .

Teorema 5.13: V é uma valoração para NAL_1 se, e somente se, há uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações para PC_1 e duas funções V_{\max} e V_{\min} de L em $\{0,1\}$, onde $V = V_{\max}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$(5.13.1) \quad V_{\max}(p) = 1 \text{ sss existe } v \in \mathcal{E} \text{ tal que } v_{\min}(p) = 1;$$

$$(5.13.2) \quad V_{\min}(p) = 1 \text{ sss para todo } v \in \mathcal{E}, v_{\max}(p) = 1;$$

$$(5.13.3) \quad V_{\max}(\neg A) = 1 \text{ sss } V_{\min}(A) = 0;$$

$$(5.13.4) \quad V_{\min}(\neg A) = 1 \text{ sss } V_{\max}(A) = 0;$$

$$(5.13.5) \quad V_{\max}(A \rightarrow B) = 1 \text{ sss } V_{\max}(A) = 0 \text{ ou } V_{\max}(B) = 1;$$

$$(5.13.6) \quad V_{\min}(A \rightarrow B) = 1 \text{ sss } V_{\max}(A) = 0 \text{ ou } V_{\min}(B) = 1;$$

$$(5.13.7) \quad V_{\max}(A \wedge B) = 1 \text{ sss } V_{\max}(A) = 1 \text{ e } V_{\max}(B) = 1;$$

$$(5.13.8) \quad V_{\min}(A \wedge B) = 1 \text{ sss } V_{\min}(A) = 1 \text{ e } V_{\min}(B) = 1;$$

$$(5.13.9) \quad V_{\max}(A \vee B) = 1 \text{ sss } V_{\max}(A) = 1 \text{ ou } V_{\max}(B) = 1;$$

$$(5.13.10) \quad V_{\min}(A \vee B) = 1 \text{ sss } V_{\min}(A) = 1 \text{ ou } V_{\min}(B) = 1.$$

Teorema 5.14: $\Gamma \vdash_{NAL_1} A \text{ sss } \Gamma \Vdash_{NAL_1} A.$

Definição 5.15: Dizemos que V é uma valoração para NAL_2 se forem cumpridas todas as condições da definição anterior, com V_{\min} e V_{\max} definidas em L' , mais as seguintes condições adicionais:

$$(5.15.1) \quad V_{\min}(\sim A) = 1 \text{ sss } V_{\min}(A) = 0;$$

$$(5.15.2) \quad V_{\max}(\sim A) = 1 \text{ sss } V_{\min}(A) = 0.$$

Teorema 5.16: $\Gamma \vdash_{NAL_2} A \text{ sss } \Gamma \Vdash_{NAL_2} A.$

O teorema seguinte afirma que o cálculo NAL_2 (e portanto o cálculo NAL_1) admite uma interpretação na lógica clássica de primeira ordem. Associamos a cada letra sentencial p um sinal predicativo P de aridade 2. Seja LC um cálculo para a lógica de predicados clássica cuja linguagem possui os sinais predicativos citados.

Teorema 5.17: Sejam j , j_{\min} e j_{\max} funções com argumentos na coleção das fórmulas de NAL₂, e com valores na coleção das fórmulas de LC, onde $j = j_{\min}$, definidas pelas seguintes condições:

$$j_{\min}(p) = \forall x \exists y Pxy;$$

$$j_{\max}(p) = \exists x \forall y Pxy;$$

$$j_{\min}(\neg A) = \neg j_{\max}(A);$$

$$j_{\max}(\neg A) = \neg j_{\min}(A);$$

$$j_{\min}(\sim A) = \neg j_{\min}(A);$$

$$j_{\max}(\sim A) = \neg j_{\min}(A);$$

$$j_{\min}(A \# B) = j_{\min}(A) \# j_{\min}(B), \text{ onde } \# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\};$$

$$j_{\max}(A \rightarrow B) = j_{\min}(A) \rightarrow j_{\max}(B);$$

$$j_{\max}(A \wedge B) = j_{\max}(A) \wedge j_{\max}(B);$$

$$j_{\max}(A \vee B) = j_{\max}(A) \vee j_{\max}(B).$$

Então, para qualquer fórmula A de NAL₂,

$$\frac{}{\text{NAL}_2} A \text{ sss } \frac{}{\text{LC}} j(A).$$

O teorema 5.18 diz que o cálculo NAL₂ (e portanto o cálculo NAL₁) admite ainda uma outra interpretação alternativa na lógica clássica de primeira ordem.

Teorema 5.18: Sejam k , k_{\max} e k_{\min} funções com argumentos na coleção das fórmulas de NAL₂, e com valores na coleção das fórmulas de LC, onde $k = k_{\max}$, definidas pelas seguintes condições:

$$k_{\max}(p) = \exists x \forall y Pxy;$$

$$k_{\min}(p) = \forall x \exists y Pxy;$$

$$k_{\max}(\neg A) = \neg k_{\min}(A);$$

$$k_{\min}(\neg A) = \neg k_{\max}(A);$$

$$k_{\max}(\sim A) = \neg k_{\max}(A);$$

$$k_{\min}(\sim A) = \neg k_{\max}(A);$$

$$k_{\max}(A \# B) = k_{\max}(A) \# k_{\max}(B), \text{ onde } \# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\};$$

$$k_{\min}(A \rightarrow B) = k_{\max}(A) \rightarrow k_{\min}(B);$$

$$k_{\min}(A \wedge B) = k_{\min}(A) \wedge k_{\min}(B);$$

$$k_{\min}(A \vee B) = k_{\min}(A) \vee k_{\min}(B).$$

Então, para qualquer fórmula A de NAL₂,

$$\frac{}{\text{NAL}_2} A \text{ sss } \frac{}{\text{LC}} k(A).$$

Definimos a seguir uma semântica com interface para a lógica não alética, tendo uma motivação análoga à adotada na construção das semânticas para os cálculos CI₃, CI₄ e PC₂.

Definição 5.19: Dizemos que V é uma valoração para NAL₃ se há uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações para CI₄ e duas funções V_{\min} e V_{\max} tal que V, V_{\min} e V_{\max} são funções de L em $\langle 0,1 \rangle$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (5.19.1) $V(p) = V_{\min}(p)$;
- (5.19.2) $V_{\min}(p) = 1$ sss para todo $v \in \mathcal{E}$, $v_{\max}(p) = 1$;
- (5.19.3) $V_{\max}(p) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v_{\min}(p) = 1$;
- (5.19.4) $V(\neg A) = V_{\min}(\neg A)$;
- (5.19.5) $V_{\min}(\neg A) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$;
- (5.19.6) $V_{\max}(\neg A) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$;
- (5.19.7) $V(A \rightarrow B) = 1$ sss $V(A) = 0$ ou $V(B) = 1$;
- (5.19.8) $V_{\min}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (5.19.9) $V_{\max}(A \rightarrow B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$ ou $V_{\max}(B) = 1$;
- (5.19.10) $V(A \wedge B) = 1$ sss $V(A) = 1$ e $V(B) = 1$;
- (5.19.11) $V_{\min}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ e $V_{\min}(B) = 1$;
- (5.19.12) $V_{\max}(A \wedge B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ e $V_{\max}(B) = 1$;
- (5.19.13) $V(A \vee B) = 1$ sss $V(A) = 1$ ou $V(B) = 1$;
- (5.19.14) $V_{\min}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 1$ ou $V_{\min}(B) = 1$;
- (5.19.15) $V_{\max}(A \vee B) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 1$ ou $V_{\max}(B) = 1$.

Definição 5.20: Dizemos que V é uma valoração para NAL₄ se forem cumpridas todas as condições da definição anterior, com V, V_{\min} e V_{\max} definidas em L', mais as seguintes condições adicionais:

- (5.20.1) $V(\sim A) = 1$ sss $V(A) = 0$;
- (5.20.2) $V_{\min}(\sim A) = 1$ sss $V_{\max}(A) = 0$;
- (5.20.3) $V_{\max}(\sim A) = 1$ sss $V_{\min}(A) = 0$.

A linguagem de NAL₃ é L. Os postulados de NAL₃ são dados abaixo:

- (ci) $A \rightarrow B \rightarrow A$;
 (cii) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
 (ciii) $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$;
 (civ) $A \wedge B \rightarrow A$;
 (cv) $A \wedge B \rightarrow B$;
 (cvi) $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$;
 (cvii) $A \rightarrow A \vee B$;
 (cviii) $B \rightarrow A \vee B$;
 (cix) $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;
 (cx) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$;
 (cxi) $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$;
 (cxii) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
 (cxiii) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
 (cxiv) $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$;
 (cxiv) $\neg\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg\neg B$;
 (cxv) $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg\neg B$;
 (cxvi) $\neg\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg\neg A \vee \neg\neg B$.

A linguagem de NAL₄ é L', e os postulados de NAL₄ são todos os postulados de NAL₃, expressos em L', menos o postulado (x), o qual em NAL₄ é um teorema, mais os seguintes esquemas:

- (cxvii) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A$;
 (cxviii) $\sim\sim A \rightarrow A$;
 (cxix) $\neg\sim A \leftrightarrow \neg\neg A$.

Note que os postulados de NAL₃ e NAL₄ divergem dos postulados de NAL₁ e NAL₂ quanto ao tratamento de negações de fórmulas compostas e da dupla negação.

6 - O Cálculo CIE

O cálculo CIE (esta sigla abrevia a expressão "cálculo para a inconsistência epistêmica") foi obtido por um refinamento da base monotônica da lógica IDL, apresentada em [20]. Ele é paraconsistente e se destina a dar suporte a formas de raciocínio combinando certeza e plausibilidade. O conhecimento supostamente seguro e irrevogável, representando a certeza, possui dados não contestáveis, obtidos em geral a partir de teorias científicas consagradas, de percepções incontestáveis ou do conhecimento tradicional aceito universalmente. O conhecimento plausível provém de informações apresentando em geral um forte grau de evidência, mas que podem estar sujeitas a falhas e até a serem explicitamente contestadas.

A questão que abordamos no presente capítulo é a seguinte: dada uma base de conhecimento contendo tanto dados seguros como dados apenas plausíveis, como devemos fazer para derivar de forma simples mais conhecimento, tanto seguro como plausível?

Um obstáculo que parece surgir no tratamento desta questão é que o conhecimento apenas plausível mas não seguro está aberto a contradições. Tal fato é freqüente na própria evolução do conhecimento científico. A partir de dados obtidos de observações rigorosas os cientistas imaginam diversos tipos de explicações, as quais, depois de passarem por muitas elaborações, acabam se transformando em um corpo de doutrinas ou teorias científicas. Muitas vezes tais teorias se contradizem entre si ou com uma parte do conhecimento empírico. Em raciocínios refletindo o senso comum a ocorrência de contradições também é muito freqüente, conforme já vimos no primeiro capítulo.

Uma solução para evitar tais contradições consiste em trabalhar com um número freqüentemente indefinido de extensões consistentes, obtidas a partir da parte segura da base, aplicando as regras de defaults de um modo restrito (veja [23] e [24]).

Em [20] Pequeno sugere rotular o conhecimento apenas plausível com uma nova modalidade, separando-o assim operacionalmente do conhecimento seguro. Tal prática permite uma abordagem unificada de todo o conhecimento, tanto seguro quanto plausível. Com a nova notação, expressamos, por exemplo, que "B é plausível" escrevendo-se $B?$, e as regras de defaults surgem, por exemplo, pela forma $\frac{A : B}{B?}$. As possíveis contradições obtidas ficam assim restritas à forma $B? \wedge \neg (B?)$, ficando assim encapsuladas e não podendo se propagar, conforme veremos adiante.

Não abordaremos neste trabalho a parte não monotônica do raciocínio. Tratamos aqui da questão de como obter a maior quantidade possível de informação usando apenas formas de raciocínio monotônico, partindo tanto de dados irrevogáveis como de dados plausíveis. Também não abordaremos aqui o tratamento dos quantificadores, já que este não apresenta nenhuma dificuldade adicional, pois as extensões para a lógica de primeira ordem de todos os cálculos apresentados neste trabalho são naturais.

O alfabeto da linguagem de CIE é obtido juntando-se o sinal "?" ao alfabeto de L. Uma fórmula de CIE é de uma das seguintes formas:

- (i) p , onde p é uma letra sentencial;
- (ii) $(\alpha?)$, onde α é uma fórmula de CIE;
- (iii) $(\neg \alpha)$, onde α é uma fórmula de CIE;
- (iv) $(\alpha \# \beta)$, onde α e β são fórmulas de CIE e $\# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.

Em todo este capítulo, a menos que seja dito explicitamente o contrário, as letras gregas α , β , e γ representam fórmulas arbitrárias (com ou sem "?") de CIE, e as letras maiúsculas latinas representam fórmulas de CIE não contendo "?". Lembramos que todas as convenções, já estabelecidas no segundo capítulo deste trabalho, continuam valendo.

Sendo α uma fórmula arbitrária e p uma letra sentencial escolhida arbitrariamente, abreviaremos, no resto deste capítulo, $\alpha \rightarrow p \wedge \neg p$ por $\sim \alpha$.

Abaixo damos os postulados de CIE:

- (i) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$;
- (ii) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$;
- (iii) $\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$;
- (iv) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$;
- (v) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$;
- (vi) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$;
- (vii) $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$;
- (viii) $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$;
- (ix) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$;
- (x) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$;
- (xi) $(\alpha \rightarrow B) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg \alpha$;
- (xii) $\neg (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \neg \beta$;
- (xiii) $\neg (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg \alpha \vee \neg \beta$;
- (xiv) $\neg (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg \alpha \wedge \neg \beta$;
- (xv) $\neg \neg \alpha \leftrightarrow \alpha$;
- (xvi) $(\alpha? \rightarrow \beta?)? \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)$;
- (xvii) $(\alpha \vee \beta)? \rightarrow \alpha? \vee \beta?$;
- (xviii) $(\neg \alpha)? \leftrightarrow \neg (\alpha?)$;
- (xix) $\alpha \rightarrow \alpha?$;
- (xx) $\alpha?? \rightarrow \alpha?$;
- (xxi) $\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha? \rightarrow \beta?}$;
- (xxii) $\frac{\alpha}{\sim ((\sim \alpha)?)}$.

Temos que os postulados (iii), (xxi) e (xxii) de CIE são regras de inferência. A diferença entre a regra (iii) e as outras duas é que esta também vale em forma de implicação, isto é, $\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ é teorema de CIE. Conforme veremos abaixo, não podemos reescrever as duas últimas regras do mesmo modo. Para enfatizar este fato, o qual foi muito importante no processo de definição do cálculo, colocamos apenas uma barra para separar a hipótese da conclusão na regra (iii), e duas barras nas demais. Usaremos também esta notação sempre que enunciarmos regras derivadas de CIE. Esta distinção é de importância fundamental para indicar se o uso

de certas regras, derivadas ou não, afeta eventuais aplicações do teorema da dedução, o qual será enunciado adiante.

Construímos o cálculo CIE a partir do cálculo IDL, procurando associá-lo a uma semântica recursiva que refletisse a nossa intuição acerca do conhecimento plausível, bem como evitando diversos paradoxos que encontramos em versões iniciais deste cálculo. Consideramos indesejável a derivação de algum dos esquemas ou regras dadas abaixo (citamos estes porque foram os que mais encontramos):

$$\alpha? \rightarrow \alpha; \quad \alpha? \rightarrow (\sim \alpha)? \rightarrow \beta? ;$$

$$\frac{\alpha?}{\alpha} ; \quad \frac{\alpha? , (\sim \alpha)?}{\beta?}$$

Uma regra da forma α / β é mais fraca que um esquema do tipo $\alpha \rightarrow \beta$. Do ponto de vista do cálculo, tal regra não garante que haja um teorema da dedução que permita usá-la de modo irrestrito no escopo de alguma dedução. Do ponto de vista de uma semântica de valorações, esta regra significa que toda valoração que satisfaz α também satisfaz β ; enquanto que o esquema citado significa que toda valoração satisfaz $\alpha \rightarrow \beta$. Conforme a semântica que definimos para CIE, o segundo significado acarreta o primeiro significado, mas não vale a recíproca.

A axiomática de CIE referente à negação foi feita levando em conta as axiomáticas dos cálculos CI_1 e C_1 . Os esquemas (xii) a (xv) de CIE são análogos aos esquemas (xi) a (xiv) de CI_1 , e o esquema (xi) de CIE foi inspirado no esquema " $B^o \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \neg A$ " do cálculo C_1 .

Faremos a seguir uma análise da axiomática de CIE.

O teorema abaixo diz por que o conectivo "?" não pode ser distributivo em relação à implicação.

Teorema 6.1: Em CIE, a regra $\alpha?, (\alpha \rightarrow \beta)? / \beta?$ acarreta a regra $\alpha? , (\sim \alpha)? / \beta?$ (em particular, a regra $A?, (A \rightarrow B)? / B?$ acarreta a regra $A?, (\neg A)? / B?$), isto é, se juntarmos a CIE a primeira regra, então a segunda regra é derivada no novo cálculo obtido.

O teorema abaixo afirma que o conectivo "?" não pode fatorar com respeito à conjunção.

Teorema 6.2: Em CIE, a regra $\alpha?, \beta? / (\alpha \wedge \beta)?$ acarreta a regra $\alpha?, (\sim \alpha)? / \beta?$ (em particular, a regra $A?, B? / (A \wedge B)?$ acarreta a regra $A?, (\neg A)? / B?$).

Teorema 6.3: Em CIE, as regras $\alpha?, (\alpha \rightarrow \beta)? / \beta?$ e $\alpha?, \beta? / (\alpha \wedge \beta)?$ são equivalentes, isto é, se acrescentarmos uma delas a CIE, então a outra regra pode ser derivada no novo cálculo obtido. Da mesma forma, os esquemas $(\alpha \rightarrow \beta)? \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)$ e $\alpha? \wedge \beta? \rightarrow (\alpha \wedge \beta)?$ são equivalentes em CIE.

O esquema (xvi) é um caso particular de um teorema mais geral sobre CIE que será formulado mais adiante: o conectivo "?" pode ser descartado em fórmulas nas quais todos os componentes estão sob o escopo de "?".

O esquema (xvii) diz que o conectivo "?" é distributivo com respeito à disjunção.

O esquema (xviii) diz que o conectivo "?" fatora e distribui com respeito à negação.

O esquema (xix) diz basicamente que todo conhecimento irrefutável é em particular plausível.

O esquema (xx) destina-se a evitar o acúmulo de sinais de "?", identificando, junto com o esquema (xix), fórmulas das formas $\alpha?$ e $\alpha??$.

A regra (xxi) diz que, se tivermos uma implicação da forma $\alpha \rightarrow \beta$, então a plausibilidade de α acarreta a plausibilidade de β . Este tipo de raciocínio é uma das principais formas de propagação do conectivo "?" em uma inferência.

O teorema seguinte diz por que a regra (xxi) não pode ser uma implicação.

Teorema 6.4: Em CIE, o esquema $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)$ acarreta o esquema $\alpha? \rightarrow \alpha$.

A regra (xxii) diz que não podemos simultaneamente estar seguros de uma informação α e considerar que a sua negação clássica é plausível, ou seja, toda teoria baseada em CIE que tiver como teoremas tanto α como $(\sim \alpha)?$ é trivial. Em particular, levando-se em conta também os outros esquemas de CIE, toda teoria que tiver como teoremas tanto A como $(\neg A)?$ é trivial. Esta regra diz, em outras palavras, que devemos descartar todo o conhecimento plausível já adquirido na presença de novas informações comprovadas, se estas contradizerem tal conhecimento.

O teorema seguinte diz por que a regra (xxii) não pode ser uma implicação.

Teorema 6.5: Em CIE, o esquema $\alpha \Rightarrow \sim((\sim \alpha)?)$ acarreta o esquema $\alpha? \Rightarrow \alpha$ (em particular, o esquema $A \Rightarrow \sim((\neg A)?)$ acarreta o esquema $A? \Rightarrow A$).

Teorema 6.6: Todos os teoremas clássicos valem para fórmulas que não possuem "?" e, em particular, os seguintes esquemas são teoremas de CIE:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A;$$

$$\neg \neg A \Rightarrow A.$$

Teorema 6.7: O sinal definido \sim funciona em CIE como a negação clássica, isto é, os seguintes esquemas são teoremas de CIE:

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \sim \beta) \Rightarrow \sim \alpha;$$

$$\sim \sim \alpha \Rightarrow \alpha.$$

Teorema 6.8: Em CIE valem todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos \wedge e \vee .

Teorema 6.9: Entre outros, os seguintes esquemas e regras valem em CIE:

$\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta;$	$\neg A \leftrightarrow \sim A;$
$\alpha, \beta / \alpha \wedge \beta;$	$(\neg A)? \leftrightarrow (\sim A)?;$
$\alpha \wedge \beta / \alpha;$	$(\alpha \vee \beta)? \leftrightarrow \alpha? \vee \beta?;$
$\alpha \wedge \beta / \beta;$	$(\neg \alpha)? \leftrightarrow \neg (\alpha?);$
$\alpha / \alpha \vee \beta;$	$(\alpha? \rightarrow \beta?) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta?);$
$\beta / \alpha \vee \beta;$	$(\alpha \rightarrow \beta?) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta?);$
$\alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma / \gamma;$	$\alpha // (\alpha \rightarrow \beta)? \rightarrow \beta?;$
$\alpha \vee \neg \alpha;$	$(\alpha \wedge \beta)? \rightarrow \alpha? \wedge \beta?;$
$\neg (\alpha \wedge \neg \alpha);$	$\alpha // \beta? \rightarrow (\alpha \wedge \beta)?.$

Teorema 6.10: Entre outros, os seguintes esquemas e regras não valem em CIE:

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha;$	$\alpha?, (\alpha \rightarrow \beta)? / \beta?;$
$\alpha?, (\sim \alpha)? / \beta?;$	$(\alpha \rightarrow \beta)? / \alpha \rightarrow \beta?;$
$A?, (\neg A)? / B?;$	$\alpha?, \beta? / (\alpha \wedge \beta)?;$
$\alpha? / \alpha;$	$\beta? / \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)?.$

O teorema abaixo estabelece que a equivalência forte é preservada na composição de fórmulas.

Teorema 6.11: Seja α' uma fórmula obtida de α substituindo algumas ocorrências de β por β' . Temos então que $\Gamma \frac{}{\text{CIE}} \beta \Leftrightarrow \beta'$ implica em $\Gamma \frac{}{\text{CIE}} \alpha \Leftrightarrow \alpha'$.

Definição 6.12: Dizemos que uma fórmula de CIE é fechada se esta for de uma das formas $\alpha?, \neg \beta, \sim \beta, \beta \# \gamma$, onde β e γ são fechadas e $\# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.

O teorema seguinte generaliza o que está estabelecido nos esquemas (xvi) e (xx).

Teorema 6.13: Se α é uma fórmula fechada de CIE, então $\frac{}{\text{CIE}} \alpha \Leftrightarrow \alpha?.$

A proposição seguinte estabelece um teorema da dedução restrito, levando em conta a existência de regras de inferência fracas, tais como as regras (xxi) e (xxii).

Teorema 6.14: Se existe uma dedução de β em CIE a partir de Γ e α , então $\Gamma \frac{}{\text{CIE}} \alpha \rightarrow \beta$, a menos que α não seja fórmula fechada e as regras (xxi) ou (xxii) sejam usadas depois da primeira ocorrência em que α seja justificada como sendo uma premissa.

O teorema seguinte assevera que todas as fórmulas de CI₂ (e portanto de CI₁) são tratadas em CIE como fórmulas apenas plausíveis.

Teorema 6.15: Seja f uma função com argumentos na coleção das fórmulas de CI₂ e com valores na coleção das fórmulas de CIE, definida pelas seguintes condições:

$$f(p) = p?$$

$$f(\neg A) = \neg f(A);$$

$$f(\sim A) = \sim f(A);$$

$$f(A \# B) = f(A) \# f(B), \text{ onde } \# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}.$$

Então, para qualquer fórmula A de CI₂, $\Gamma \frac{}{\text{CI}_2} A$ sss $f(\Gamma) \frac{}{\text{CIE}} f(A)$, onde $f(\Gamma) = \{f(B) / B \in \Gamma\}$.

A semântica que propomos para CIE foi inspirada no significado que intuimos para fórmulas de uma das formas $A?$ ou $A?$. Todas as demais fórmulas de CIE podem ser obtidas por construção a partir destes dois tipos básicos. Conforme vimos acima, as fórmulas que não contém $?$ devem ser tratadas de modo clássico, e aquelas que estão sob o escopo deste sinal devem ser tratadas de um modo paraconsistente. Existem infinitas combinações destes dois tipos, como por exemplo fórmulas da forma $A? \wedge B? \rightarrow D$; neste caso a fórmula toda não está sob o escopo de uma mesma ocorrência de " $?$ ", e apenas as subfórmulas A e B estão sob o escopo de ocorrências distintas de " $?$ ". Uma explicação recursiva das fórmulas da linguagem de CIE pode cobrir todos estes casos sem maiores problemas. Uma valoração para CIE é definida a partir de uma coleção não vazia de valorações clássicas. Fórmulas que não contém " $?$ " são verdadeiras sob esta valoração se elas o forem para todas as valorações clássicas da coleção dada. Fórmulas da forma $A?$ são verdadeiras sob esta valoração se A o for para alguma valoração da coleção dada. Note que é dado um tratamento

valoração da coleção dada. Note que é dado um tratamento global para cada ocorrência de "?", pois com um tratamento local diversos postulados correntes de CIE não se verificariam, e o conectivo "?" iria fatorar e distribuir com respeito a todos os conectivos da linguagem, o que já vimos que é bastante inconveniente. Chamamos de tratamento local uma explicação tal como a seguinte (onde V é uma valoração para CIE definida a partir de uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações clássicas):

$V((p \wedge q)?) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v(p) = 1$ e existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v(q) = 1$.

Segundo tal explicação, teríamos $p? \wedge q? \rightarrow (p \wedge q)?$ sendo uma fórmula válida, o que não é desejável, pelas razões que já vimos anteriormente. Em contrapartida, o tratamento global dá a seguinte interpretação para a mesma fórmula:

$V((p \wedge q)?) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v(p \wedge q) = 1$.

Verificamos que uma semântica que dá um tratamento global para as fórmulas que estão sob o escopo de "?" satisfaz todos os postulados de CIE, bem como evita todas as relações inconvenientes que já vimos acima. Em suma, a semântica que adotamos para CIE é uma semântica de maximização, com um tratamento global para fórmulas que estão sob o escopo de "?".

Definição 6.16: Dizemos que V é uma valoração para CIE se V é uma função definida na linguagem de CIE tomando como valores 0 ou 1 e há uma coleção \mathcal{E} não vazia de valorações clássicas e uma função que associa a cada $v \in \mathcal{E}$ um par $\langle v_{\max}, v_{\min} \rangle$, onde v_{\max} e v_{\min} são também duas funções definidas na linguagem de CIE tomando como valores 0 ou 1, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (6.16.1) $V(\alpha) = 1$ sss para todo $v \in \mathcal{E}$, $v_{\max}(\alpha) = 1$;
(6.16.2) $v_{\max}(p) = v_{\min}(p) = v(p)$;
(6.16.3) $v_{\max}(\neg \alpha) = 1$ sss $v_{\min}(\alpha) = 0$;
(6.16.4) $v_{\min}(\neg \alpha) = 1$ sss $v_{\max}(\alpha) = 0$;
(6.16.5) $v_{\max}(\alpha?) = 1$ sss existe $v \in \mathcal{E}$ tal que $v_{\max}(\alpha) = 1$;
(6.16.6) $v_{\min}(\alpha?) = 1$ sss para todo $v \in \mathcal{E}$, $v_{\min}(\alpha) = 1$;
(6.16.7) $v_{\max}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $v_{\max}(\alpha) = 0$ ou $v_{\max}(\beta) = 1$;
(6.16.8) $v_{\min}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $v_{\max}(\alpha) = 0$ ou $v_{\min}(\beta) = 1$;
(6.16.9) $v_{\max}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $v_{\max}(\alpha) = 1$ e $v_{\max}(\beta) = 1$;
(6.16.10) $v_{\min}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $v_{\min}(\alpha) = 1$ e $v_{\min}(\beta) = 1$;
(6.16.11) $v_{\max}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $v_{\max}(\alpha) = 1$ ou $v_{\max}(\beta) = 1$;
(6.16.12) $v_{\min}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $v_{\min}(\alpha) = 1$ ou $v_{\min}(\beta) = 1$.

Segundo a definição acima, temos que, para todo $v \in \mathcal{E}$ e para toda fórmula α de CIE, $v_{\min}(\alpha) \leq v_{\max}(\alpha)$.

Teorema 6.17: $\Gamma \frac{}{\text{CIE}} A$ sss $\Gamma \frac{}{\text{CIE}} A$.

Abaixo estabelecemos que, sob hipóteses razoáveis, não há mais consequências semânticas da parte irrefutável de uma coleção dada de fórmulas de CIE além das consequências semânticas clássicas. Chamamos uma coleção Γ de fórmulas de CIE *normal* se ela satisfaz certas hipóteses razoáveis. Consideremos p, q, r letras sentenciais distintas e L_0 a lógica proposicional clássica. Se $\Gamma = \langle p, (\neg p)? \rangle$, temos que não é verdade que $p \frac{}{L_0} q$, mas $\Gamma \frac{}{\text{CIE}} q$, por isso requeremos que uma coleção normal deve ser não trivial. Se $\Gamma = \langle p, q?, q? \rightarrow r \rangle$, temos que não é verdade que $p \frac{}{L_0} r$, mas $\Gamma \frac{}{\text{CIE}} r$, por isso não permitimos que, dentre outras fórmulas, aquelas que sejam do tipo $A? \rightarrow B$ pertençam a uma coleção normal.

Definição 6.18: Dizemos que uma coleção Γ de fórmulas de CIE é *normal* se Γ não é trivial e, para toda fórmula α de Γ , α é de uma das formas B ou B?

Teorema 6.19: Sejam L_0 a lógica proposicional clássica, Γ uma coleção normal de fórmulas de CIE e $\bar{\Gamma}$ a coleção de todas as fórmulas de Γ não possuindo "?". Então $\Gamma \Vdash_{\text{CIE}} A$ sss $\bar{\Gamma} \Vdash_{L_0} A$.

O cálculo CIE admite uma interpretação na lógica clássica de primeira ordem. Para cada letra sentencial p da linguagem de CIE associamos um sinal predicativo P de aridade 1. Seja LC um cálculo para a lógica clássica aberta de predicados (tal como em Shoenfield [26]), cuja linguagem possui os sinais predicativos citados.

Teorema 6.20: Sejam l , l_{\max} e l_{\min} funções com argumentos na linguagem de CIE e com valores na linguagem de LC, onde $l = l_{\max}$, definidas pelas seguintes condições:

$$l_{\max}(p) = l_{\min}(p) = Px;$$

$$l_{\max}(\neg \alpha) = \neg l_{\min}(\alpha);$$

$$l_{\min}(\neg \alpha) = \neg l_{\max}(\alpha);$$

$$l_{\max}(\alpha?) = \exists x l_{\max}(\alpha);$$

$$l_{\min}(\alpha?) = \forall x l_{\min}(\alpha);$$

$$l_{\max}(\alpha \# \beta) = l_{\max}(\alpha) \# l_{\max}(\beta), \text{ onde } \# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\};$$

$$l_{\min}(\alpha \rightarrow \beta) = l_{\max}(\alpha) \rightarrow l_{\min}(\beta);$$

$$l_{\min}(\alpha \wedge \beta) = l_{\min}(\alpha) \wedge l_{\min}(\beta);$$

$$l_{\min}(\alpha \vee \beta) = l_{\min}(\alpha) \vee l_{\min}(\beta).$$

Então, para qualquer fórmula A de CIE,
 $\Gamma \Vdash_{\text{CIE}} A$ sss $\mathcal{K}(\Gamma) \Vdash_{\text{LC}} \mathcal{K}(A)$, onde $\mathcal{K}(\Gamma) = \{\mathcal{K}(B) \mid B \in \Gamma\}$.

7 - Conclusões

Definimos uma classe de lógicas paraconsistentes e/ou para completas dotadas de semânticas recursivas. As explicações semânticas que adotamos para as lógicas aqui apresentadas são bastante naturais, bem como dão uma idéia razoável para alguns dos possíveis ambientes de aplicação.

Encontramos uma solução para certas críticas feitas aos sistemas paraconsistentes C_n de da Costa, nas quais é dito que a explicação dos conectivos é muito artificial e presa a particularidades lógico-formais, e que a semântica para estes sistemas não apresenta recursividade (a este respeito, veja [21], pp. 115-121, [22], pp. 162-168, e [13], pp. 18-19).

"The first objection is that condition (4)⁽¹⁾ of da Costa semantics is ill-motivated. (4) appears to follow from (3)⁽²⁾. (It does not, since otherwise it would be redundant.) The argument gets by reading ' $\forall(\neg\neg A) = 1$ ' as 'It is not the case that $\neg A$ ' and then supposing that the latter means $\forall(\neg A) = 0$. This is a fallacy of equivocation since the inference from $\forall(\neg\neg A) = 1$ to $\forall(\neg A) = 0$ is invalid even in da Costa's terms.

"Without this argument, the motivation for condition (4) is totally obscure on this approach. If the truth values of A , $\neg A$, and $\neg\neg A$ are independent enough to let all be true, why shouldn't they be independent enough to let the first be false and the last be true? Compare this with the next approach we deal with, where the connection in true-value between a sentence and its negation falls, quite naturally, out of the motivating considerations. Of course condition (4) could be dropped from da Costa's semantics. However in that case, negation would have virtually none of the properties traditionally associated with negation. (It has few enough

(1) A condição (4) diz que, se v é uma valoração para C_n , então $v(A) = 0$ implica em $v(\neg\neg A) = 0$.

(2) A condição (3) diz que, se v é uma valoração para C_n , então $v(A) = 0$ implica em $v(\neg A) = 1$.

anyway.) This would strengthen our subsequent argument that da Costa's negation is not really negation at all.

"The second objection to da Costa semantics is that they are non-recursive. Now whilst non-recursive semantics may be admirable for many technical purposes, there are good reasons for not being philosophically satisfied with them. The arguments are well known but the crucial point is something like this: since speakers of a language are able to understand sentences they have never heard before, the sense of meaning of a sentence must be determined by the senses of its components. In particular, then, an adequate semantics must specify recursively the meaning of a sentence in terms of the meaning of its components. Thus generally speaking the specification of semantic conditions must be recursive." ([21], pg. 116)

Os cálculos CI_1 e CI_2 vistos aqui são uma evolução do cálculo C_1 no sentido de que tratam a paraconsistência de um modo análogo, mas possuem uma semântica recursiva, bem como uma interpretação bem intuitiva com respeito ao significado paraconsistente dos conectivos lógicos, sem violarem os principais pressupostos filosóficos assumidos na sua elaboração. Na realidade, pode-se dizer que implementamos melhor a aproximação maximal com a lógica clássica advogada por da Costa [8]. Os cálculos CI_3 e CI_4 são variantes dos cálculos CI_1 e CI_2 , onde é mostrada uma possibilidade semântica alternativa.

Críticas análogas poderiam ser feitas aos cálculos P_1 e N_1 de da Costa. Os cálculos PC_1 , NAL_1 e NAL_2 também são evoluções dos cálculos P_1 e N_1 que superam os problemas já citados. Os cálculos PC_2 , NAL_3 e NAL_4 são formas alternativas para os cálculos PC_1 , NAL_1 e NAL_2 .

O cálculo CIE, também dotado de uma semântica recursiva, é uma evolução da parte monotônica da lógica IDL, e foi elaborado para representar formas de raciocínio que combinam certeza e plausibilidade.

Referências

- [1] Arruda, Ayda I., *A Survey of Paraconsistent Logic*, (em) Arruda, A. I. & da Costa, N. C. A. & Chuaqui, R. (eds.), *Mathematical Logic in Latin America*, North Holland, pgs. 1-41, 1980.
- [2] Arruda, Ayda I., *Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic*, (em) Priest, G. & Routley, R. & Norman, J. (eds.), *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent.*, Philosophia Verlag, 1989.
- [3] Bell, J. L. & Machover, M., *A Course in Mathematical Logic*, North Holland Publishing Company, 1977.
- [4] Borges, Jorge Luis, *El Jardín de Senderos que Se Bifurcam*, (em) *Obras Completas*, EMECE Editores, 1974.
- [5] Buchsbaum, Arthur, *Um Método Automático de Prova para a Lógica Paraconsistente*, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 1988.
- [6] Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *O Método dos Tableaux Generalizado e sua Aplicação ao Raciocínio Automático em Lógicas Não Clássicas*, Revista "O que nos faz pensar" - Cadernos do Departamento de Filosofia da PUC-Rio, nº 3, setembro de 1990.
- [7] Chang, Chin-Liang & Lee, Richard Char-Tung, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, New York, 1973.
- [8] da Costa, Newton C. A., *On the Theory of Inconsistent Formal Systems*, Notre Dame Journal of Formal Logic 15, pgs. 497-510, 1974.

- [9] da Costa, Newton C. A. & Alves, Elias H., *Une Semantique pour le Calcul C_1* , C. R. Acad. Sc. Paris 238-A, pgs. 729-731, 1977.
- [10] da Costa, Newton C. A., *A Semantical Analysis of the Calculi C_n* , Notre Dame Journal of Formal Logic nº 18, pgs. 621-630, 1977.
- [11] da Costa, Newton C. A., *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*, Editora Hucitec & Editora da Universidade de São Paulo, 1980.
- [12] da Costa, Newton C. A., *The Philosophical Import of Paraconsistent Logic*, The Journal of Non-Classical Logic, volume I, número 1, pgs. 1-19, 1982.
- [13] da Costa, Newton C. A., *An Overview of the Paraconsistent Logic in the 80's*, Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática nº 5, 39 pgs., 1987.
- [14] da Costa, Newton C. A., *Paraconsistent and Paracomplete Logic*, a aparecer em Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei.
- [15] da Costa, Newton C. A. & Marconi, Diego, *A Note on Paracomplete Logic*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, pgs. 504-509, 1986.
- [16] Hempel, Carl G., *Inductive Inconsistencies*, Synthese, vol.12, pgs. 439-469, 1960.
- [17] Loparic, Andréa & da Costa, Newton C. A., *Paraconsistency, Paracompleteness and Valuations*, Logique et Analyse 106, pgs. 119-131, 1984.
- [18] Loveland, Donald W., *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*, North Holland Publishing Company, 1978.

[19] Morris, P. H., *The Anomalous Extension Problem in Default Reasoning*, Artificial Intelligence, vol. 35, nº 3, pgs. 383-399, 1988.

[20] Pequeno, Tarcisio, *A Logic for Inconsistent Nonmonotonic Reasoning*, Technical Report 90/6, Department of Computing, Imperial College, London, 1990.

[21] Priest, G. & Routley, R., *On Paraconsistency*, Research Papers of the Logic Group, Research School Of Social Sciences, nº 13, Australian National University, 1983.

[22] Priest, G. & Routley, R. & Norman, J. (eds.), *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*. Philosophia Verlag, 1989.

[23] Reiter, Raymond, *A Logic for Default Reasoning*, Artificial Intelligence, vol. 13, nrs.1,2, pgs. 81-132, 1980.

[24] Reiter, Raymond, *Nonmonotonic Reasoning*, a aparecer em Annual Reviews of Computer Science.

[25] Rescher, N. & Brandom, R., *The Logic of Inconsistency*, Blackwell, Oxford.

[26] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley Publishing Company, 1967.