PUC

Monografias em Ciência da Computação
nº 20/92

Adjunções e a Extensão da Dedução Natural

Haydée Werneck Poubel

Departamento de Informática

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 - CEP 22453
RIO DE JANEIRO - BRASIL

PUC RIO - DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Monografias em Ciência da Computação, Nº 20/92
Editor: Carlos J. P. Lucena Junho, 1992

Adjunções e a Extensão da Dedução Natural

Haydée Werneck Poubel

* Este trabalho foi patrocinado pela Secretaria de Ciência e Tecnologia da Presidência da República Federativa do Brasil.

In charge of publications:

Rosane Teles Lins Castilho

Assessoria de Biblioteca, Documentação e Informação

PUC Rio — Departamento de Informática

Rua Marquês de São Vicente,225 — Gávea

22454970 — Rio de Janeiro, RJ

Brasil

Tel. +55-21-529 9386 Telex +55-21-31048 Fax +55-21-511 5645

E-mail: rosane@inf.puc-rio.br

techrep@inf.puc-rio.br (for publications only)

Adjunções e a Extensão da Dedução Natural[1]

Haydée Werneck Poubel[2]

Departamento de Informática, PUC-Rio

---

[1] Esta monografia foi sugerida e orientada pelo Prof. Luiz Carlos P. D. Pereira, do Departamento de Filosofia, PUC-Rio.

[2] Em licença do Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.

Resumo

A Extensão da Dedução Natural de Schröeder-Heister, onde não apenas fórmulas mas também regras podem ser descarregadas, apresenta um contexto para o tratamento de operadores sentenciais n-ários abstratos.

Este trabalho mostra que as regras abstratas da Dedução Natural de Schröeder-Heister definem adjunções entre categorias cartesianas fechadas com coprodutos finitos onde os objetos são regrás e os morfismos são deduções.

Mais precisamente, se ϕ for um operador com m regras de introdução, o adjunto à esquerda é definido pela soma dessas m regras de introdução e a comutatividade do diagrama da adjunção representa o Princípio da Inversão.

PALAVRAS CHAVE

dedução natural estendida, categorias cartesianas fechadas, funtores, adjunções

Abstract

Schröeder-Heister's Natural Extension of Natural Deduction, where not only formulas but also rules can be discharged, presents a framework for the treatment of arbitrary n-ary sentential operators.

This work shows that the abstract rules of Schröeder-Heister's Natural Deduction define adjunctions between cartesian closed categories with finite coproducts where the objects are rules and morfisms are deductions.

More precisely, if ϕ is an operator with m introduction rules, the left adjunct is defined by the sum of these introduction rules and the comutativity of the adjuntion diagram represent the Inversion Principle.

KEY WORDS

extended natural deduction, cartesian closed categories, functors, adjuntions.

AGRADECIMENTOS

Especiais agradecimentos são dirigidos aos Professores Paulo A. S. Veloso e Edward Hermann Haeusler, pelas horas de discussões que muito ajudaram na elaboração dessa monografia. Agradeço à Profa. Valéria Paiva, do Laboratório de Computação da Universidade de Cambridge, pelo incentivo e valiosas sugestões.

1 Introdução

Em [7], Schroeder-Heister define uma "Extensão Natural" da Dedução Natural assim denominada porque permite deduções onde não apenas fórmulas-hipótese são decarregadas, mas também regras- hipótese. Esse sistema estendido levou à definição de uma forma padrão para as regras de introdução e eliminação de operadores sentenciais n-ários arbitrários.

[7] mostra também que os conectivos intuicionistas $\{ \wedge, \vee, \supset, \perp \}$ são instâncias desses operadores arbitrários,e que todo operador que tem suas regras de introdução e eliminação na forma padrão pode ser expresso em termos dos conectivos intuicionistas $\{\wedge, \vee, \supset, \perp\}$, e nesse sentido o conjunto $\{\wedge, \vee, \supset, \perp\}$ é dito completo.

Devido à importância desse sistema estendido da Dedução Natural, especialmente pela caracterização dos conectivos intuicionistas, ele tem sido bastante estudado.

Em [1] é feita uma apresentação do sistema estendido no Cálculo de Sequentes de Gentzen.

Em [4] é definido um λ - Calculus com tipos que é Curry-Howard isomorfo à dedução natural de Schroeder-Heister, e também é apresentada uma semântica denotacional para ele.

Em [8] temos não só a definição de um λ - calculus Curry-Howard isomrofo à dedução natural de [7], como também um novo sistema abstrato com regras de introdução mais fracas que aquelas definidas em [7]. Os sistemas gerados através dos novos esquemas de eliminação não satisfazem completude, mas uma propriedade de conservatividade.

A partir dos trabalhos de [5], [6], [2] e outros são bem conhecidas as conexões entre a Teoria da Prova e a Teoria de Categorias. Assim nos parece bastante natural e desejável, estabelecer conexões entre a Dedução Natural Estendida e a Teoria de Categorias.

Nesse trabalho é mostrado como as regras abstratas de introdução e de eliminação de um operador n-ário ϕ podem ser usadas de forma sistemática, na definição de adjunções.

Mais precisamente, se o operador ϕ for introduzido por uma única regra, definimos uma adjunção entre categorias cartesians fechadas, cujo adjunto à direita é definido por essa regra de introdução e cuja co-unidade representa os vários desdobramentos da regra de eliminação (ϕ-eliminação). Se o operador ϕ tiver mais de uma regra de introdução, definimos uma adjunção entre categorias cartesianas fechadas com coproduto finito, cujo adjunto à esquerda é dado pela soma dessas regras de introdução, e a comutatividade do diagrama da adjunção representa o Princípio da Inversão. O isomorfismo natural que define a adjunção "captura" o comportamento da regra abstrata de eliminação.

Esse formalismo é apresentado na seção 3 para o caso particular em que apenas regras de nível 1 podem ser descarregadas nas deduções.

Na seção 4 apresentamos a generalização das idéias discutidas na seção 3, ou seja, consideramos o caso em que regras de nível arbitrário podem ser descarregadas nas deduções.

Na seção 2 apresentamos o sistema estendido de Schroeder-Heister, definimos a categoria que deve modelá-lo, bem como mostramos alguns resultados básicos para as seções posteriores.

2 O Sistema Dedutivo e a Categoria

Denominaremos $\mathcal{DNE}$ o sistema dedutivo definido em [7] que considera não apenas fórmulas como hipótese mas também regras de inferência, e é essa a idéia que leva à extensão da Dedução Natural.

Em $\mathcal{DNE}$ todos os tipos de regras de inferência podem ser usadas como hipótese e podem ser descarregadas pela aplicação de outras regras. A "complexidade" dessas regras é denominada *nível*. Fórmulas são regras de nível 0; se A e B são fórmulas então $\frac{A}{B}$ é uma regra de nível 1; regras que descarregam fórmulas são regras de nível 2; regras que descarregam regras de nível 1 são regras de nível 3; e assim por diante.

O conceito de derivabilidade em $\mathcal{DNE}$ estabelecido em [7] está baseado no seguinte :

Lema 3.2 [Schroeder-Heister] : Sejam $\Gamma, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ listas de regras, $\beta_1, \cdots, \beta_n$ e α fórmulas

$$\Gamma \vdash \frac{\begin{matrix} \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{matrix}}{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma, \frac{\Gamma_1^+}{\beta_1}, \cdots, \frac{\Gamma_n^+}{\beta_n} \vdash \alpha$$

O operador $+$ em Γ_i^+ introduzido por [4] e [8], significa que Γ_i^+ é obtido de Γ_i substituindo-se as deduções embutidas em Γ_i por regras e todas as regras pelas deduções correspondentes.

Pelo lema acima, a dedução de uma regra é equivalente à dedução da fórmula que é a conclusão da regra.

No contexto de $\mathcal{DNE}$, [7] descreve uma linguagem para a lógica sentencial onde são definidos operadores sentenciais n-ários ϕ por meio de suas regras abstratas de introdução e eliminação, conforme dadas a seguir:

$$\phi \text{ - Introdução } \frac{\begin{matrix} \vec{\theta}_1^i & \cdots & \vec{\theta}_{p_i}^i \\ \vdots & & \vdots \\ Y_1^i & \cdots & Y_{p_i}^i \end{matrix}}{\phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)}$$

$$\phi \text{ - Eliminação } \frac{\begin{matrix} & & & \dfrac{\vec{\theta}_1^i}{Y_1^i} \; \cdots \; \dfrac{\vec{\theta}_{p_i}^i}{Y_{p_i}^i} & & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) & C & \cdots & C & \cdots & C \end{matrix}}{C}$$

onde $\vec{\theta}_j^i$ é uma lista de regras de nível arbitrário para cada $j = 1, \cdots, p_i$ e $i = 1, \cdots, m$ sendo m o número de regras e p_i o número de premissas de cada regra.

Seja agora $\mathcal{C}$ uma categoria cartesiana fechada com coproduto finito cujos objetos (Obj $\mathcal{C}$) são as regras de $\mathcal{DNE}$ e cujos morfismos (Morf $\mathcal{C}$) são as deduções de $\mathcal{DNE}$.

Notação: Se $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 & \cdots & \Gamma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n\end{matrix}}{\alpha}$ for uma regra em $\mathcal{DNE}$ então $(\Gamma_1 \rightarrow \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \rightarrow \beta_n)/\alpha$ é um objeto de $\mathcal{C}$.

Observe que estamos definindo na categoria, objetos com os símbolos $\rightarrow$ e $/$, para distinguir as deduções embutidas nas regras e as próprias regras(ver [4]).

Como consequência do Lema 3.2 de [7] apresentado acima podemos demonstrar os seguintes lemas:

Lema 2.1 *Sejam A e B fórmulas.*
Então $A \supset B \dashv\vdash \dfrac{A}{B} \dashv\vdash A \rightarrow B$

Demonstração: Por definição $A \rightarrow B \dashv\vdash \dfrac{A}{B}$.

Da dedução $\dfrac{\frac{A}{B}}{A \supset B}$ temos $\dfrac{A}{B} \vdash A \supset B$

De $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$ temos $A, A \supset B \vdash B$ e pelo Lema 3.2[Schroeder-Heister] $A \supset B \vdash \dfrac{A}{B}$ □

Tomando o lema acima como base, seja * o operador que transforma todas as regras em implicações.

Lema 2.2 *Seja Γ uma lista de regras e β uma regra.*
Então $\Gamma \rightarrow \beta \dashv\vdash \dfrac{\Gamma^+}{\beta} \dashv\vdash \Gamma^* \supset \beta$.

Demonstração: Por indução sobre o nível das regras.

<u>base</u>: Lema 2.1

<u>passo de indução</u>: Suponha que para $\dfrac{\Delta^+}{\sigma}$ uma regra de nível n vale o resultado.

<u>primeiro caso</u>: $\Gamma \rightarrow \beta \dashv\vdash \dfrac{\Gamma^+}{\beta}$

Seja $\dfrac{\Gamma^+}{\beta}$ uma regra de nível n+1. Então Γ é uma lista de regras de nível no máximo n. Suponha $\Gamma = \dfrac{R_1}{\alpha_1}, \cdots, \dfrac{R_n}{\alpha_n}$

Considere as hipóteses $R_i = \left\{ \begin{array}{c} T_i \\ | \\ \gamma_i \end{array} \right.$ e $R = \dfrac{\begin{array}{ccc} \frac{T_1^+}{\gamma_1} & \cdots & \frac{T_n^+}{\gamma_n} \\ | & & | \\ \alpha_1 & & \alpha_n \end{array}}{\beta}$

Pela hipótese de indução temos $\begin{array}{c} T_i \\ | \\ \frac{\gamma_i}{\alpha_i} \end{array} \dashv\vdash \begin{array}{c} \frac{T_i^+}{\gamma_i} \\ | \\ \alpha_i \end{array}$ e portanto

$$\begin{array}{c} T_i \\ | \\ \dfrac{\gamma_i}{\alpha_i} \end{array}, \dfrac{T_i^+}{\gamma_i} \vdash \alpha_i.$$

Assim, pela dedução

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} T_1 \\ | \\ \dfrac{T_1^+}{\gamma_1},\ \dfrac{\gamma_1}{\alpha_1} \end{array}}{\alpha_1} \quad \cdots \quad \dfrac{\begin{array}{c} T_n \\ | \\ \dfrac{T_n^+}{\gamma_n},\ \dfrac{\gamma_n}{\alpha_n} \end{array}}{\alpha_n}}{\beta}
$$

concluimos que $\dfrac{\Gamma^+}{\beta} \vdash \Gamma \rightarrow \beta$

O outro lado é consequência imediata do Lema 3.2[Schroeder-Heister].

<u>segundo caso:</u> $\dfrac{\Gamma^+}{\beta} \dashv\vdash \Gamma^* \supset \beta$

Pela hipótese de indução sabemos que $\dfrac{T_i^+}{\gamma_i} \dashv\vdash T_i^* \supset \gamma_i$.

Observe a dedução abaixo cuja hipótese é a regra $R = \dfrac{\begin{array}{ccc} \dfrac{T_1^+}{\gamma_1} & \cdots & \dfrac{T_n^+}{\gamma_n} \\ | & & | \\ \alpha_1 & & \alpha_n \end{array}}{\beta}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T_1^+}{\gamma_1}}{T_1^* \supset \gamma_1} \quad \dfrac{(T_1^* \supset \gamma_1) \supset \alpha_1 \wedge \cdots \wedge (T_n^* \supset \gamma_n) \supset \alpha_n}{(T_1^* \supset \gamma_1) \supset \alpha_1}}{\alpha_1} \quad \cdots \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{T_n^+}{\gamma_n}}{T_n^* \supset \gamma_n} \quad \dfrac{(T_1^* \supset \gamma_1) \supset \alpha_1 \wedge \cdots \wedge (T_n^* \supset \gamma_n) \supset \alpha_n}{(T_n^* \supset \gamma_n) \supset \alpha_n}}{\alpha_n}}{\beta}}{((T_1^* \supset \gamma_1) \supset \alpha_1 \wedge \cdots \wedge (T_n^* \supset \gamma_n) \supset \alpha_n) \supset \beta}
$$

Por outro lado, pela hipótese de indução $T_i^* \supset \gamma_i \vdash \dfrac{T^+}{\gamma_i}$ e pelo Lema 3.2 [Schroeder-Heister] $T_i, T_i^* \supset \gamma_i \vdash \gamma_i$

Suponha $((T_1^* \supset \gamma_1) \supset \alpha_1 \wedge \cdots \wedge (T_n^* \supset \gamma_n) \supset \alpha_n) \supset \beta$ e considere a dedução

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{T_1 \quad (T_1^* \supset \gamma_1)}{\cfrac{\gamma_1}{\alpha_1}}}{(T_1^* \supset \gamma_1) \supset \alpha_1} \quad \cdots \quad \cfrac{\cfrac{T_n \quad (T_n^* \supset \gamma_n)}{\cfrac{\gamma_n}{\alpha_n}}}{(T_n^* \supset \gamma_n) \supset \alpha_n}}{(T_1^* \supset \gamma_1) \supset \alpha_1 \wedge \cdots \wedge (T_n^* \supset \gamma_n) \supset \alpha_n}}{\beta}$$

Portanto $\Gamma^* \supset \beta \vdash \dfrac{\Gamma^+}{\beta}$ $\square$

Assim, os "novos" objetos categóricos introduzidos com os símbolos $\rightharpoonup$ e $/$ são "equivalentes" ao objeto exponencial.

A palavra "equivalentes" usada aqui e no que segue, é definida pelas equivalências demonstradas no lema anterior. Nesse sentido, denominaremos morfismos equivalentes àqueles em que um pode ser obtido do outro por composição, usando-se o lema acima. Mais precisamente, $A \longrightarrow B$ é equivalente a $A' \longrightarrow B'$ se e somente se $A \dashv\vdash A'$ e $B \dashv\vdash B'$. Os morfismos correspondentes à essas deduções são $A \longleftrightarrow A'$ e $B \longleftrightarrow B'$ respectivamente, e serão considerados isomorfismos em nossa categoria $\mathcal{C}$.

3 Operadores Arbitrários e Adjunções: Caso Particular

Com a finalidade de introduzir a notação e colocar as idéias mais claramente, vamos considerar o caso particular em que somente regras de no máximo nível 1 podem ser descarregadas nas deduções.

Como objeto da categoria $\mathcal{C}$, uma fórmula poderá ser vista como uma regra sem premissas que denotaremos $/A$ ou simplesmente A, e uma regra de nível 1 será o objeto denotado por $A_1 \times \cdots \times A_n/A$.

Seja um operador n-ário ϕ com suas regras ϕ - Introdução e ϕ - Eliminação nas formas dadas na seção anterior. Aqui, as listas de regras $\overline{\theta}_j^i$ são listas de fórmulas.

3.1 Operadores com uma única regra de introdução

Consideremos inicialmente o caso particular em que o operador ϕ tenha uma só regra de introdução. Portanto a Categoria $\mathcal{C}$ não precisa ter coproduto.

Defina $\mathcal{C} \xrightarrow{F_\phi^i} \mathcal{C}^{p_i}$ da seguinte forma:

$F_\phi^i(A_1 \times \cdots \times A_n/A) = (A_1 \times \cdots \times A_n/A, \cdots, A_1 \times \cdots \times A_n/A)$

$$F_\phi^i \begin{pmatrix} A_1 \times \cdots \times A_n/A \\ \downarrow f \\ C_1 \times \cdots \times C_k/C \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_\phi^i(A_1 \times \cdots \times A_n/A) \\ \downarrow (f, \cdots, f) \\ F_\phi^i(C_1 \times \cdots \times C_k/C) \end{matrix}$$

É imediato que F_ϕ^i éum funtor.

Defina $\mathcal{C}^{p_i} \xrightarrow{G_\phi^i} \mathcal{C}$ da seguinte forma:

$G_\phi^i(\overline{\theta}_1^i/Y_1^i, \cdots, \overline{\theta}_{p_i}^i/Y_{p_i}^i) = {Y_1^i}^{\overline{\theta}_1^i} \times \cdots \times {Y_{p_i}^i}^{\overline{\theta}_{p_i}^i}$

A definição de G_ϕ^i sobre os morfismos segue do do Lema 2.1, ou seja, dada um tupla de morfismos em $\mathcal{C}^{p_i}$ onde cada componente é da forma

$$\begin{array}{c}\overrightarrow{\theta}^i_j/Y^i_j\\ \downarrow f^i_j\\ \overrightarrow{\beta}^i_j/Z^i_j\end{array}$$

sabemos que esses morfismos são equivalentes aos morfismos

$$\begin{array}{c}Y_j^{i\overrightarrow{\theta}^i_j}\\ \downarrow f'^i_j\\ Z_j^{i\overrightarrow{\beta}^i_j}\end{array}$$

Desde que $\mathcal{C}$ tem produto, existe um único morfismo $p = (\pi_1 \circ f'^i_1, \cdots, \pi_{p_i} \circ f'^i_{p_i})$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1^{i\overrightarrow{\theta}^i_1} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\overrightarrow{\theta}^i_{p_i}} \arrow[dl, "\pi_j \circ f'^i_j"'] \arrow[d, "p"] \\
Z_j^{i\overrightarrow{\beta}^i_j} & Z_1^{i\overrightarrow{\beta}^i_1} \times \cdots \times Z_{p_i}^{i\overrightarrow{\beta}^i_{p_i}} \arrow[l, "\pi_j"]
\end{tikzcd}$$

Seja então

$$G^i_\phi\left(\begin{array}{ccc}\overrightarrow{\theta}^i_1/Y^i_1 & & \overrightarrow{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i}\\ \downarrow f^i_1 & ,\cdots, & \downarrow f^i_{p_i}\\ \overrightarrow{\beta}^i_1/Z^i_1 & & \overrightarrow{\beta}^i_{p_i}/Z^i_{p_i}\end{array}\right) = \begin{array}{c}Y_1^{i\overrightarrow{\theta}^i_1} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\overrightarrow{\theta}^i_{p_i}}\\ \downarrow p\\ Z_1^{i\overrightarrow{\beta}^i_1} \times \cdots \times Z_{p_i}^{i\overrightarrow{\beta}^i_{p_i}}\end{array}$$

É fácil demonstrar que G^i_ϕ é um funtor.

Proposição 3.1 *O par (F^i_ϕ, G^i_ϕ) define uma adjunção, onde F^i_ϕ é adjunto à esquerda de G^i_ϕ.*

Demonstração Defina a transformação natural

$$\mathcal{C}_{p_i} \ \underset{\xrightarrow{1_{\mathcal{C}^{p_i}}}}{\overset{\xrightarrow{G^i_\phi \circ F^i_\phi}}{\downarrow \varepsilon}} \ \mathcal{C}_{p_i}$$

da seguinte forma:

Para cada tupla $(\overrightarrow{\theta}^i_1/Y^i_1, \cdots, \overrightarrow{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i}) \in \mathrm{Obj}\ \mathcal{C}^{p_i}$ tome

$$\begin{array}{c} ({Y^i_1}^{\overrightarrow{\theta}^i_1} \times \cdots \times {Y^i_{p_i}}^{\overrightarrow{\theta}^i_{p_i}}, \cdots, {Y^i_1}^{\overrightarrow{\theta}^i_1} \times \cdots \times {Y^i_{p_i}}^{\overrightarrow{\theta}^i_{p_i}}) \\ \downarrow \varepsilon \\ (\overrightarrow{\theta}^i_1/Y^i_1, \cdots, \overrightarrow{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i}) \end{array}$$

Seja $\varepsilon = (\varepsilon^i_1, \cdots, \varepsilon^i_{p_i})$ onde para cada $j = 1, \cdots, p_i$

$$\begin{array}{ccc} {Y^i_1}^{\overrightarrow{\theta}^i_1} \times \cdots \times {Y^i_{p_i}}^{\overrightarrow{\theta}^i_{p_i}} & & {Y^i_1}^{\overrightarrow{\theta}^i_1} \times \cdots \times {Y^i_{p_i}}^{\overrightarrow{\theta}^i_{p_i}} \\ \downarrow \varepsilon^i_j & \Leftrightarrow & \downarrow \varepsilon'^i_j \\ \overrightarrow{\theta}^i_j/Y^i_j & & {Y^i_j}^{\overrightarrow{\theta}^i_j} \end{array}$$

Portanto ε^i_j é equivalente à projeção π_j.

Precisamos mostrar que para cada morfismo

$$(\overrightarrow{\theta}^i_1/Y^i_1, \cdots, \overrightarrow{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i}) \xrightarrow{(f^i_1, \cdots, f^i_{p_i})} (\overrightarrow{\beta}^i_1/Z^i_1, \cdots, \overrightarrow{\beta}^i_{p_i}/Z^i_{p_i})$$

o diagrama

$$\begin{array}{ccc} {Y^i_1}^{\overrightarrow{\theta}^i_1} \times \cdots \times {Y^i_{p_i}}^{\overrightarrow{\theta}^i_{p_i}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\theta}^i_j/Y^i_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ {Z^i_1}^{\overrightarrow{\beta}^i_1} \times \cdots \times {Z^i_{p_i}}^{\overrightarrow{\beta}^i_{p_i}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\beta}^i_j/Z^i_j \end{array}$$

é comutativo para cada $j = 1, \cdots, p_i$. Mas isso segue imediato da definição dos morfismos envolvidos.

Dado $s^* = (s_1^*, \cdots, s_{p_i}^*)$ onde para cada $j = 1, \cdots, p_i$ s_j^* é o morfismo

$$A_1 \times \cdots \times A_n/A \xrightarrow{s_j^*} \overrightarrow{\theta}^i_j/Y_j^i$$

Desde que C tem produto, existe um único morfismo $s = (s_1^*, \cdots, s_{p_i}^*)$ que faz comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \times \cdots \times A_n/A \arrow[dl, "s_j^*"'] \arrow[d, "(s_1^*, \cdots, s_{p_i}^*)"] \\
\overrightarrow{\theta}^i_j/Y_j^i & Y_1^{i\,\overrightarrow{\theta}^i_1} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\,\overrightarrow{\theta}^i_{p_i}} \arrow[l, "\varepsilon_j"]
\end{tikzcd}$$

Portanto $s^* = F_\phi^i(s) \circ \varepsilon \square$

Considerando que o operador ϕ é cada um dos conectivos intuicionistas $\wedge$ e $\supset$ com suas regras de introdução e eliminação conforme dadas em [3], por aplicação da proposição anterior obtemos:

1. Se $\phi = \wedge$, que corresponde ao produto na categoria $\mathcal{C}$, para cada morfismo $(A_1 \times \cdots \times A_n/A, A_1 \times \cdots \times A_n/A) \longrightarrow (Y_1, Y_2)$ existe um único morfismo $A_1 \times \cdots \times A_n/A \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ tal que o seguinte triângulo comuta

$$\begin{tikzcd}
 & (A_1 \times \cdots \times A_n/A, A_1 \times \cdots \times A_n/A) \arrow[dl] \arrow[d] \\
(Y_1, Y_2) & (Y_1 \times Y_2, Y_1 \times Y_2) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Tomando n=0 no objeto regra obtemos a conhecida adjunção definida pelo produto.

2. Se $\phi = \supset$, que corresponde à exponenciação na categoria C, para cada morfismo $A_1 \times \cdots \times A_n/A \longrightarrow \theta/Y$ existe um único morfismo $A_1 \times \cdots \times A_n/A \longrightarrow Y^\theta$ que faz comutar o triângulo

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \times \cdots \times A_n/A \arrow[dl] \arrow[d] \\
\theta/Y & Y^\theta \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Tomando n=0 no objeto regra e lembrando que os morfismos $A \longrightarrow Y^\theta$ e $A \times \theta \longrightarrow Y$, $Y^\theta \longrightarrow \theta/Y$ e $Y^\theta \times \theta \longrightarrow Y$ são equivalentes obtemos a adjunção usual dada pela exponenciação.

3.2 Operadores com m regras de introdução

Consideremos que C tenha coprodutos finitos. Desde que temos os isomorfismos $\overline{\theta}_j^i/Y_j^i \xleftrightarrow{h_j^i} Y_j^{i\overline{\theta}_j^i}$ e a categoria C tem produto, também temos os isomorfismos

$h_i = \langle \pi_1 \circ h^i_1, \cdots, \pi_{p_i} \circ h^i_{p_i} \rangle$ com $\overline{\theta}^i_1/Y^i_1 \times \cdots \times \overline{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i} \xleftrightarrow{h_i} {Y^i_1}^{\overline{\theta}^i_1} \times \cdots \times {Y^i_{p_i}}^{\overline{\theta}^i_{p_i}}$

tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
\overline{\theta}^i_1/Y^i_1 \times \cdots \times \overline{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\theta}^i_j/Y^i_j \arrow[d] \\
{Y^i_1}^{\overline{\theta}^i_1} \times \cdots \times {Y^i_{p_i}}^{\overline{\theta}^i_{p_i}} \arrow[r] & {Y^i_j}^{\overline{\theta}^i_j}
\end{tikzcd}$$

comutam para $j = 1, \cdots, p_i$ e $i = 1, \cdots, m$.

Defina $\mathcal{C}^m \xrightarrow{F_\phi} \mathcal{C}$ da seguinte forma:

$F_\phi((\overline{\theta}^1_1/Y^1_1 \times \cdots \times \overline{\theta}^1_{p_1}/Y^1_{p_1}), \cdots, (\overline{\theta}^m_1/Y^m_1 \times \cdots \times \overline{\theta}^m_{p_m}/Y^m_{p_m})) = \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} {Y^i_j}^{\overline{\theta}^i_j}$

$$F_\phi \begin{pmatrix} \overline{\theta}^1_1/Y^1_1 \times \cdots \times \overline{\theta}^1_{p_1}/Y^1_{p_1} & & \overline{\theta}^m_1/Y^m_1 \times \cdots \times \overline{\theta}^m_{p_m}/Y^m_{p_m} \\ \downarrow f_1 & , \cdots, & \downarrow f_m \\ \overline{\beta}^1_1/Z^1_1 \times \cdots \times \overline{\beta}^m_{p_1}/Z^m_{p_1} & & \overline{\beta}^m_1/Z^m_1 \times \cdots \times \overline{\beta}^m_{p_m}/Z^m_{p_m} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} {Y^i_j}^{\overline{\theta}^i_j} \\ \downarrow F\phi(f_1, \cdots, f_m) \\ \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} {Z^i_j}^{\overline{\beta}^i_j} \end{array}$$

onde $F_\phi(f_1, \cdots, f_m)$ é dado pelo coproduto segundo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j=1}^{p_i} \overrightarrow{\theta}_j^i / Y_j^i \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\overrightarrow{\theta}_j^i} \arrow[r, "in_i"] \arrow[d, "f_i'"] & \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\overrightarrow{\theta}_j^i} \arrow[d, "F_\phi(f_1,\cdots,f_m)"] \\
\prod_{j=1}^{p_i} \overrightarrow{\beta}_j^i / Z_j^i \arrow[r, "h_i'"] & \prod_{j=1}^{p_i} Z_j^{i\overrightarrow{\beta}_j^i} \arrow[r] & \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Z_j^{i\overrightarrow{\beta}_j^i}
\end{tikzcd}$$

usualmente denotada por $F_\phi(f_1, \cdots, f_m) = [f_1' \circ in_1, \cdots, f_m' \circ in_m]$

É fácil demosntrar que F_ϕ é um funtor.

Defina $\mathcal{C} \xrightarrow{G_\phi} \mathcal{C}^m$ da seguinte forma:

$G_\phi(A_1 \times \cdots \times A_n/A) = (A_1 \times \cdots \times A_n/A, \cdots, A_1 \times \cdots \times A_n/A)$

$$G_\phi \begin{pmatrix} A_1 \times \cdots \times A_n/A \\ \downarrow f \\ C_1 \times \cdots \times C_k/C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \times \cdots \times A_n/A & & A_1 \times \cdots \times A_n/A \\ \downarrow f & , \cdots , & \downarrow f \\ C_1 \times \cdots \times C_k/C & & C_1 \times \cdots \times C_k/C \end{pmatrix}$$

É imediato que G_ϕ é um funtor.

Proposição 3.2 *O par (F_ϕ, G_ϕ) define uma adjunção, onde F_ϕ é adjunto à esquerda de G_ϕ.*

Demonstração Defina a transformação natural

$$\mathcal{C}^m \quad \overset{\xrightarrow{1_{\mathcal{C}^m}}}{\underset{\xrightarrow[F_\phi \circ G_\phi]{}}{\downarrow \eta}} \quad \mathcal{C}^m$$

da seguinte forma:

Para cada $i = 1, \cdots, m$ seja $\eta_i = h_i \circ in_i$ e portanto

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{\theta}^i_1/Y^i_1 \times \cdots \times \overrightarrow{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i} \\ \downarrow \eta_i \\ \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} {Y^i_j}^{\overrightarrow{\theta}^i_j} \end{array}$$

Tome $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m)$

Pelo diagrama da definição de F_ϕ temos que:

- $f_i \circ \eta = f_i \circ h'_i \circ in_i$ e
- $\eta_i \circ [f'_1 \circ in_i, \cdots, f'_m \circ in_m] = h_i \circ in_i \circ [f'_1 \circ in_i, \cdots, f'_m \circ in_m] = h_i \circ f'_i \circ in_i = f_i \circ h'_i \circ in_i$

Concluimos portanto que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \overrightarrow{\theta}^i_1/Y^i_1 \times \cdots \times \overrightarrow{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i} \arrow[r] \arrow[d] & \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} {Y^i_j}^{\overrightarrow{\theta}^i_j} \arrow[d] \\ \overrightarrow{\beta}^i_1/Z^i_1 \times \cdots \times \overrightarrow{\beta}^i_{p_i}/Z^i_{p_i} \arrow[r] & \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} {Z^i_j}^{\overrightarrow{\beta}^i_j} \end{tikzcd}$$

é comutativo, e que η é uma transformação natural.

Precisamos mostrar que para cada tupla de morfismos em C^m

$$\begin{array}{ccc} (\overline{\theta}_1^1/Y_1^1 \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_1}^1/Y_{p_1}^1) & & (\overline{\theta}_1^m/Y_1^m \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_m}^m/Y_{p_m}^m) \\ \downarrow t_1 & ,\cdots, & \downarrow t_m \\ (A_1 \times \cdots \times A_n/A & & A_1 \times \cdots \times A_n/A) \end{array}$$

existe um único morfismo em $\mathcal{C}$ da forma

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\overline{\theta}_j^i} \\ \downarrow t^* \\ A_1 \times \cdots \times A_n/A \end{array}$$

tal que o seguinte diagrama comuta :

(A)

$$\begin{tikzcd} & ((\overline{\theta}_1^1/Y_1^1 \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_1}^1/Y_{p_1}^1), \cdots, (\overline{\theta}_1^m/Y_1^m \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_m}^m/Y_{p_m}^m)) \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[d, "t"] \\ (\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\overline{\theta}_j^i}, \cdots, \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\overline{\theta}_j^i}) \arrow[r, "G_\phi(t^*)"] & (A_1 \times \cdots \times A_n/A, \cdots, A_1 \times \cdots \times A_n/A) \end{tikzcd}$$

Desde que $\mathcal{C}$ tem coproduto, existe um único t^* tal que o diagrama abaixo comuta

$$
\begin{tikzcd}
 & & & A_1 \times \cdots \times A_n/A \\
\prod_{j=1}^{p_i} \overline{\theta}^i_j/Y^i_j \arrow[urrr, "t_i"] \arrow[r, shift right, "h_i"'] & \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\overline{\theta}^i_j} \arrow[l, shift right, "\overline{h}_i"'] \arrow[r, "in_i"'] & & \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\overline{\theta}^i_j} \arrow[u, "t^*"']
\end{tikzcd}
$$

Então $t^* = [\overline{h}_1 o t_1, \cdots, \overline{h}_m o t_m]$. Logo, $\eta_i o t^* = h_i o in_i o t^* = h_i o \overline{h}_i o t_i = t_i$ para cada $i = 1, \cdots, m$, como queriamos. $\square$

Por uma aplicação direta da proposição anterior podemos verificar facilmente que se $\phi = \vee$, que corresponde ao coproduto na categoria $\mathcal{C}$, para cada morfismo $(/Y_1^1, /Y_1^2) \longrightarrow (A_1 \times \cdots \times A_n/A, A_1 \times \cdots \times A_n/A)$ existe um único morfismo $Y_1^1 + Y_1^2 \longrightarrow A_1 \times \cdots \times A_n/A$ que faz comutar o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & (/Y_1^1, /Y_1^2) \arrow[dl] \arrow[d] \\
(Y_1^1 + Y_1^2, Y_1^1 + Y_1^2) \arrow[r] & (A_1 \times \cdots \times A_n/A, A_1 \times \cdots \times A_n/A)
\end{tikzcd}
$$

Mais uma vez fazendo n=0 obtemos a forma conhecida do diagrama da adjunção definida pelo coproduto.

Quando tomamos $\phi = \wedge$ ou $\phi = \supset$ na Proposição 3.2 não obtemos as adjunções definidas pelo produto e exponencia ção respectivamente, porque a adjunmção construida naquela proposição é "inspirada" na única regra de eliminação dos operadores. A introdução é feita pela unidade da adjunção. O que obtemos da comutatividade do diagrama (A) é o Princípio da Inversão dado em [3], ou seja:

Para cada $i = 1, \cdots, m$

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\theta}^i_1/Y^i_1 \times \cdots \times \overrightarrow{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i} & & \\ \downarrow \eta & & \overrightarrow{\theta}^i_1/Y^i_1 \times \cdots \times \overrightarrow{\theta}^i_{p_i}/Y^i_{p_i} \\ \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\overrightarrow{\theta}^i_j} & \equiv & \downarrow t_i \\ \downarrow t^* & & A_1 \times \cdots \times A_n/A \\ A_1 \times \cdots \times A_n/A & & \end{array}$$

4 Operadores Arbitrários e Adjunções: Caso Geral

Implicações são representadas na categoria $\mathcal{C}$ pelo objeto exponencial, e a partir do Lemaa 2.2 vimos que regras podem ser transformadas em sucessivas implicações representadas por $\Gamma^* \supset \beta$. Sendo assim, usaremos no que segue o mesmo operador * na representação do objeto categórico correspondente, ou seja, β^{Γ^*}.

Considerando que regras de nível arbitrário podem ser descarregadas nas deduções, seja um operador ϕ com suas regras de ϕ - Introdução e ϕ - Eliminação. Agora $\overrightarrow{\theta}^i_j$ são listas de regras.

4.1 Operadores com uma única regra de introdução

Consideremos novamente o caso particular em que o operador ϕ tenha uma só regra de introdução. Portanto a Categoria $\mathcal{C}$ não precisa ter coproduto.

Defina $\mathcal{C} \xrightarrow{F^i_\phi} \mathcal{C}^{p_i}$ da seguinte forma:

$F^i_\phi(\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha) = (\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha, \cdots, \Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha)$

$$F^i_\phi \begin{pmatrix} \Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha \\ \downarrow f \\ \Delta_1 \to \delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \to \delta_n/\beta \end{pmatrix} = \underbrace{(f, \cdots, f)}_{p_i - vezes}$$

É imediato que F^i_ϕ é um funtor.

Defina $\mathcal{C}^{p_i} \xrightarrow{G^i_\phi} \mathcal{C}$ da seguinte forma:

$$G^i_\phi((\overline{\theta}^{i\,+}_1/Y^i_1), \cdots, (\overline{\theta}^{i\,+}_{p_i}/Y^i_{p_i})) = Y_1^{i\,\overline{\theta}^{i\,*}_1} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\,\overline{\theta}^{i\,*}_{p_i}}$$

$$G^i_\phi \begin{pmatrix} (\overline{\theta}^{i\,+}_1/Y^i_1) & & (\overline{\theta}^{i\,+}_{p_i}/Y^i_{p_i}) \\ \downarrow f^i_1 & ,\cdots, & \downarrow f^i_{p_i} \\ (\overline{\beta}^{i\,+}_1/Z^i_1) & & (\overline{\beta}^{i\,+}_{p_i}/Z^i_{p_i}) \end{pmatrix} = \begin{matrix} Y_1^{i\,\overline{\theta}^{i\,*}_1} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\,\overline{\theta}^{i\,*}_{p_i}} \\ \downarrow p \\ Z_1^{i\,\overline{\beta}^{i\,*}_1} \times \cdots \times Z_{p_i}^{i\,\overline{\beta}^{i\,*}_{p_i}} \end{matrix}$$

Onde G^i_ϕ é dado por:

Cada morfismo

$$\begin{matrix} (\overline{\theta}^{i\,+}_j/Y^i_j) \\ \downarrow f^i_j \\ (\overline{\beta}^{i\,+}_j/Z^i_j) \end{matrix}$$

é equivalente ao morfismo

$$\begin{array}{c} {Y_j^i}^{\overline{\theta}_j^{i\,*}} \\ \downarrow f'^i_j \\ {Z_j^i}^{\overline{\beta}_j^{i\,*}} \end{array}$$

Desde que $\mathcal{C}$ tem produto, existe um único morfismo
$p = \langle \pi_1 \circ f'^i_1, \cdots, \pi_{p_i} \circ f'^i_{p_i} \rangle$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
 & {Y_1^i}^{\overline{\theta}_1^{i\,*}} \times \cdots \times {Y_{p_i}^i}^{\overline{\theta}_{p_i}^{i\,*}} \arrow[dl, "\pi_j \circ f'^i_j"'] \arrow[d, "p"] \\
{Z_j^i}^{\overline{\beta}_j^{i\,*}} & {Z_1^i}^{\overline{\beta}_1^{i\,*}} \times \cdots \times {Z_{p_i}^i}^{\overline{\beta}_{p_i}^{i\,*}} \arrow[l, "\pi_j"]
\end{tikzcd}$$

Seja então $G^i_\phi(f^i_1, \cdots, f^i_{p_i}) = p$.

É fácil demonstrar que G^i_ϕ é um funtor.

Proposição 4.1 *O par (F^i_ϕ, G^i_ϕ) define uma adjunção, onde F^i_ϕ é adjunto à esquerda de G^i_ϕ.*

Demonstração Defina a transformação natural

$$\mathcal{C}_{p_i} \ \begin{array}{c} \xrightarrow{G^i_\phi \circ F^i_\phi} \\ \downarrow \varepsilon \\ \xrightarrow{1_{\mathcal{C}^{p_i}}} \end{array} \ \mathcal{C}_{p_i}$$

com $\varepsilon = (\varepsilon^i_1, \cdots, \varepsilon^i_{p_i})$ onde para cada $j = 1, \cdots, p_i$, ε^i_j é dado por

$$
\begin{array}{c}
Y_1^{i\,\overline{\theta}_1^{i\,*}} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\,\overline{\theta}_{p_i}^{i\,*}} \\
\downarrow \varepsilon_j^i \\
Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}}
\end{array}
$$

Portanto ε_j^i é equivalente à projeção π_j. Segue imediato que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y_1^{i\,\overline{\theta}_1^{i\,*}} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\,\overline{\theta}_{p_i}^{i\,*}} \arrow[r] \arrow[d] & Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \arrow[d] \\
Z_1^{i\,\overline{\beta}_1^{i\,*}} \times \cdots \times Z_{p_i}^{i\,\overline{\beta}_{p_i}^{i\,*}} \arrow[r] & Z_j^{i\,\overline{\beta}_j^{i\,*}}
\end{tikzcd}
$$

comuta para cada morfismo $(\overline{\theta}_j^{i+}/Y_j^i) \xrightarrow{f_j^i} (\overline{\beta}_j^{i+}/Z_j^i)$ equivalente a
$Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \xrightarrow{f_j'^i} Z_j^{i\,\overline{\beta}_j^{i\,*}}$, $j = 1, \cdots, p_i$

Portanto ε é de fato uma transformação natural.

Seja $s^* = (s_1^*, \cdots, s_{p_i}^*)$ onde para cada $j = 1, \cdots, p_i$ s_j^* é o morfismo

$\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha \xrightarrow{s_j^*} (\overline{\theta}_j^{i+}/Y_j^i)$ equivalente ao morfismo

$\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha \xrightarrow{s_j'^*} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}}$

Desde que $\mathcal{C}$ tem produto, existe um único morfismo $s = \langle s_1^*, \cdots, s_{p_i}^* \rangle$ que faz comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n / \alpha \arrow[dll, "s_j^*"'] \arrow[d, "\langle s_1^*, \cdots, s_{p_i}^* \rangle"] \\
(\overline{\theta}_j^{i\,+} / Y_j^i) & & Y_1^{i\,\overline{\theta}_1^{i\,*}} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\,\overline{\theta}_{p_i}^{i\,*}} \arrow[ll, "\varepsilon_j"]
\end{tikzcd}$$

Portanto $s^* = F_\phi^i(s) \circ \varepsilon \Box$

4.2 Operadores com m regras de introdução

Suponhamos agora que além de produto e exponenciação $\mathcal{C}$ também tenha coprodutos finitos. Desde que temos os isomorfismos

$$(\overline{\theta}_j^{i\,+} / Y_j^i) \xrightarrow{h_j^i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}}$$

para $j = 1, \cdots, p_i$, também temos os isomorfismos

$u_i = \langle \pi_1 \circ h_1^i, \cdots, \pi_{p_i} \circ h_{p_i}^i \rangle$ tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\overline{\theta}_1^{i\,+} / Y_1^i) \times \cdots \times (\overline{\theta}_{p_i}^{i\,+} / Y_{p_i}^i) \arrow[r] \arrow[d] & (\overline{\theta}_j^{i\,+} / Y_j^i) \arrow[d] \\
Y_1^{i\,\overline{\theta}_1^{i\,*}} \times \cdots \times Y_{p_i}^{i\,\overline{\theta}_{p_i}^{i\,*}} \arrow[r] & Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}}
\end{tikzcd}$$

comutam para $j = 1, \cdots, p_i$ e $i = 1, \cdots, m$.

Defina $\mathcal{C}^m \xrightarrow{F_\phi} \mathcal{C}$ da seguinte forma:

$$F_\phi((\overline{\theta}_1^{1+}/Y_1^1 \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_1}^{1\,+}/Y_{p_1}^1), \cdots, (\overline{\theta}_1^{m+}/Y_1^m \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_m}^{m\,+}/Y_{p_m}^m)) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}}$$

$$F_\phi \begin{pmatrix} \overline{\theta}_1^{1+}/Y_1^1 \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_1}^{1\,+}/Y_{p_1}^1 & & \overline{\theta}_1^{m+}/Y_1^m \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_m}^{m\,+}/Y_{p_m}^m \\ \downarrow f_1 & ,\cdots, & \downarrow f_m \\ \overline{\beta}_1^1 \to Z_1^1 \times \cdots \times \overline{\beta}_{p_1}^m \to Z_{p_1}^m & & \overline{\beta}_1^m \to Z_1^m \times \cdots \times \overline{\beta}_{p_m}^m \to Z_{p_m}^m \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{rl} & \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \\ = & \downarrow F\phi(f_1, \cdots, f_m) \\ & \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Z_j^{i\,\overline{\beta}_j^{i\,*}} \end{array}$$

onde $F_\phi(f_1, \cdots, f_m)$ é dado pelo coproduto segundo o diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{j=1}^{p_i} \overline{\theta}_j^{i\,+}/Y_j^i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \arrow[r] \arrow[d, "f_i'"] & \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \arrow[d, "F_\phi(f_1, \cdots, f_m)"] \\ \prod_{j=1}^{p_i} \overline{\beta}_j^{i\,+}/Z_j^i \arrow[r, "u_i'"] & \prod_{j=1}^{p_i} Z_j^{i\,\overline{\beta}_j^{i\,*}} \arrow[r, "in_i'"] & \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p_i} Z_j^{i\,\overline{\beta}_j^{i\,*}} \end{tikzcd}$$

usualmente denotada por $F_\phi(f_1, \cdots, f_m) = [f_1' \circ in_1', \cdots, f_m' \circ in_m']$

É fácil demosntrar que F_ϕ é um funtor.

Defina $\mathcal{C} \xrightarrow{G_\phi} \mathcal{C}^m$ da seguinte forma:

$G_\phi(\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha) = (\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha, \cdots, \Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha)$

$$G_\phi \begin{pmatrix} \Gamma_1 \rightarrow \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \rightarrow \beta_n/\alpha \\ \downarrow f \\ \Delta_1 \rightarrow \delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \rightarrow \delta_n/\beta \end{pmatrix} = \underbrace{(f,\cdots,f)}_{m-vezes}$$

É imediato que G_ϕ é um funtor.

Proposição 4.2 *O par (F_ϕ, G_ϕ) define uma adjunção, onde F_ϕ é adjunto à esquerda de G_ϕ.*

Demonstração Defina a transformação natural

$$\mathcal{C}^m \quad \begin{matrix} \xrightarrow{1_{\mathcal{C}^m}} \\ \downarrow \eta \\ \xrightarrow{F_\phi \circ G_\phi} \end{matrix} \quad \mathcal{C}^m$$

da seguinte forma:

Para cada $i = 1, \cdots, m$ seja $\eta_i = u_i \circ in_i$ e portanto

$$\begin{matrix} (\overline{\theta}_1^{i\,+}/Y_1^i) \times \cdots \times (\overline{\theta}_{p_i}^{i\,+}/Y_{p_i}^i) \\ \downarrow \eta_i \\ \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \end{matrix}$$

Tome $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m)$

Pelo diagrama da definição de F_ϕ temos que:

- $f_i \circ \eta = f_i \circ u_i' \circ in_i$ e
- $\eta_i \circ [f_1' \circ in_i, \cdots, f_m' \circ in_m] = u_i \circ in_i \circ [f_1' \circ in_i, \cdots, f_m' \circ in_m] = u_i \circ f_i' \circ in_i = f_i \circ u_i' \circ in_i$

Concluimos portanto que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\overline{\theta}_1^{i\,+}/Y_1^i)\times\cdots\times(\overline{\theta}_{p_i}^{i\,+}/Y_{p_i}^i) & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
(\overline{\beta}_1^{i\,+}/Z_1^i)\times\cdots\times(\overline{\beta}_{p_i}^{i\,+}/Z_{p_i}^i) & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{p_i} Z_j^{i\,\overline{\beta}_j^{i\,*}}
\end{array}$$

é comutativo, e que η é uma transformação natural.

Precisamos mostrar que para cada tupla de morfismos em $\mathcal{C}^m$

$$\begin{array}{ccc}
(\overline{\theta}_1^{1+}/Y_1^1\times\cdots\times\overline{\theta}_{p_1}^{1\,+}/Y_{p_1}^1) & & (\overline{\theta}_1^{m+}/Y_1^m\times\cdots\times\overline{\theta}_{p_m}^{m\,+}/Y_{p_m}^m) \\
\downarrow t_1 & ,\cdots, & \downarrow t_m \\
(\Gamma_1\to\beta_1\times\cdots\times\Gamma_n\to\beta_n/\alpha & & \Gamma_1\to\beta_1\times\cdots\times\Gamma_n\to\beta_n/\alpha)
\end{array}$$

existe um único morfismo em $\mathcal{C}$ da forma

$$\begin{array}{c}
\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \\
\downarrow t^* \\
\Gamma_1\to\beta_1\times\cdots\times\Gamma_n\to\beta_n/\alpha
\end{array}$$

tal que o seguinte diagrama comuta :

(A)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& ((\overline{\theta}_1^{1+}/Y_1^1 \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_1}^{1\,+}/Y_{p_1}^1), \cdots, (\overline{\theta}_1^{m+}/Y_1^m \times \cdots \times \overline{\theta}_{p_m}^{m\,+}/Y_{p_m}^m)) \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[d, "t"] \\
(\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}}, \cdots, \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}}) \arrow[r, "G_\phi(t^*)"] & \begin{array}{l}(\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha, \cdots \\ \cdots, \Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha)\end{array}
\end{tikzcd}$$

Desde que $\mathcal{C}$ tem coproduto, existe um único t^* tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
& & \Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha \\
\prod_{j=1}^{p_i} \overline{\theta}_j^{i\,+}/Y_j^i \arrow[urr, "t_i"] \arrow[r, shift right, "u_i"'] & \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \arrow[l, shift right, "\overline{u}_i"'] \arrow[r, "in_i"'] & \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} Y_j^{i\,\overline{\theta}_j^{i\,*}} \arrow[u, "t^*"']
\end{tikzcd}$$

Então $t^* = [\overline{u}_1 \circ t_1, \cdots, \overline{u}_m \circ t_m]$. Logo, $\eta_i \circ t^* = u_i \circ in_i \circ t^* = u_i \circ \overline{u}_i \circ t_i = t_i$ para cada $i = 1, \cdots, m$, como queriamos. □

O que obtemos da comutatividade do diagrama (A) é o Princípio da Inversão dado em [3], ou seja:

Para cada $i = 1, \cdots, m$

$$
\begin{array}{c}
({\overline{\theta}_1^i}^+/Y_1^i) \times \cdots \times ({\overline{\theta}_{p_i}^i}^+/Y_{p_i}^i) \\
\downarrow \eta \\
\sum_{i=1}^{n_i} \prod_{j=1}^{p_i} {Y_j^i}^{{\overline{\theta}_j^i}^*} \\
\downarrow t^* \\
\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha
\end{array}
\quad \equiv \quad
\begin{array}{c}
({\overline{\theta}_1^i}^+/Y_1^i) \times \cdots \times ({\overline{\theta}_{p_i}^i}^+/Y_{p_i}^i) \\
\downarrow t_i \\
\Gamma_1 \to \beta_1 \times \cdots \times \Gamma_n \to \beta_n/\alpha
\end{array}
$$

5 Conclusões

Para cada operador n-ário abstrato ϕ caracterizado por suas m-regras de introdução e sua regra de eliminaçào podemos sistematicamente associar um funtor F_ϕ. É importante observar que a definição de F_ϕ é inspirada na expressão de ϕ como um coproduto de produtos de exponenciais.

Tal definição nos fornece portanto, uma versão categórica para o resultado de completude obtido por [7] com relação ao conjunto de operadores sentenciais intuicionistas $\{\wedge, \vee, \supset, \perp\}$.

Bibliografia

[1] A. Avron. Gentzenizing Schoerder-Heister's Natural extention of natural dedution. ECS-LFCS-87-20 Dep. of Computer Science- University of Edinburgh. 1987.

[2] C. R. Mann. The Connections Between Equivalence of Proofs and Cartesian Closed Categories. Proc. London Math.Soc.(3) 32 (1975) 289-310

[3] D. Prawitz. Natural Deduction. A Proof-theoretical study. Almqvist - Wiksell, Stockholm. 1965.

[4] E. H. Haeusler and L. C. P. D. Pereira. A Denotational Semantics for Arbitrary Level Typed λ-Calculus. (to appear)

[5] J. Lambeck. Lecture Notes in Math.(86) (1969) 76-122

[6] M. E. Szabo. Algebra of Proofs. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. vol.88, North-Holland Publishing Co., Amsterdam. 1978.

[7] P. Schröeder-Heister. A Natural Extension of Natural Deduction. The Journal of Symbolic Logic. Vol 49. Dec 1984.

[8] Wong H. Chi. Esquemas Abstratos para Dedução Natural, Cálculo de Sequentes e Lambda Cálculo Tipificado. Dissertação de Mestrado.Nov 1991. Dep. Informática - PUC. Rio de Janeiro.