PUC

ISSN 0103-9741

Monografias em Ciência da Computação
nº 05/93

Construcción Formal de Programas a partir de Especificaciones en un Cálculo de Relaciones Binarias Extendido

Juan E. Durán
Gabriel A. Baum

Departamento de Informática

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO
RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225 - CEP 22453-900
RIO DE JANEIRO - BRASIL

PUC RIO - DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA ISSN 0103-9741

Monografias em Ciência da Computação, Nº 05/93
Editor: Carlos J. P. Lucena Junho, 1993

Construcción Formal de Programas a partir de Especificaciones en un Cálculo de Relaciones Binarias Extendido*

Juan E. Durán

Gabriel A. Baum**

* Este trabalho foi patrocinado pela Secretaria de Ciência e Tecnologia da Presidência da República Federativa do Brasil.

** Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Exatas, Departamento de Informática, 1 y 50, La Plata, Buenos Aires, Argentina

In charge of publications:
Rosane Teles Lins Castilho
Assessoria de Biblioteca, Documentação e Informação
PUC Rio — Departamento de Informática
Rua Marquês de São Vicente, 225 — Gávea
22453-900 — Rio de Janeiro, RJ
Brasil
Tel. +55-21-529 9386 Telex +55-21-31048 Fax +55-21-511 5645
E-mail: rosane@inf.puc-rio.br
techrep@inf.puc-rio.br (for publications only)

CONSTRUCCIÓN FORMAL DE PROGRAMAS A PARTIR DE ESPECIFICACIONES EN UN CÁLCULO DE RELACIONES BINARIAS EXTENDIDO

Juan E. Durán[1]
PUC-Rio, Depto. de Informática
E-mail: juan@inf.puc-rio.br

Gabriel A. Baum
UNLP, Depto. de Informática. La Plata

ABSTRACT:

We study the formal program construction from specifications in a calculus that extends Tarski's calculus of binary relations. This paper relies on a threefold base, i.e., the languaje of Structured Relational Algebras of Haeberer and Veloso, some properties of these algebras and the Calculus of Binary Relations of Tarski. Some new constructions for specifying problems and program derivations are defined. By extending Tarski's calculus with an aditional set of axioms, here presented, we obtain an abstract representable algebra [BHV 92]. After doing a number of derivations we find new properties valid within the Structured Algebras. The most relevant of them are choosed and proved using the axioms. Finally we undertake the problem of proving properties for relations. The proof of invariants is analized and a proof strategy is given.

RESUMO:

Estuda-se a construção formal de programas a partir de especificações em um cálculo de relações binárias que estenda ao de A. Tarski. Este trabalho se baseia na linguagem das álgebras relacionais estruturadas de Haeberer e Veloso, em algumas propriedades destas álgebras e no cálculo de relações binárias de Tarski. São definidas algumas construções novas para especificar problemas, derivar programas e mostrar sua utilidade. Se apresenta um conjunto de axiomas adicionais aos de Tarski e destes se deduzem os do teorema da representação de [BHV 92]. Logo de várias derivações se encontram propriedades novas válidas nas álgebras estruturadas. Se escolhem as mais importantes e se provam usando os axiomas. Finalmente se começa o estudo de provar propriedades para relações. Se analisa a prova de invariantes e é dada uma estratégia.

Keywords: construction of programs, specifications, calculus of binary relations, relational algebras, invariants.

Palavras-chave: construção de programas, especificações, cálculo de relações binarias, álgebras relacionais, invariantes.

[1]Este trabajo es el informe final de la beca de iniciación que me otorgó el Consejo de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la Provincia de Córdoba.

INTRODUCCION

El objeto de este trabajo es el estudio de la especificación de problemas y la construcción formal de programas a partir de la teoría de relaciones.

Para hacer este sueño realidad se necesitan tres cosas: Una teoría para especificaciones formales, un lenguaje donde se puedan escribir programas y un procedimiento de prueba que permita razonar con programas y hacer pruebas de correctitud.

Se eligió la teoría de especificaciones algebraicas como formalismo para especificaciones formales. Una especificación algebraica en su forma más simple es una lista de símbolos de tipo, operación y relación (firma) junto con un conjunto de axiomas.

Este enfoque surgió con los trabajos de [LZ 74], [Gut 75] y [GTWW 75]. La semántica de una especificación algebraica consiste en caracterizar un subconjunto de todos las álgebras que respetan la firma y las propiedades. Hay distintos enfoques para esto entre ellos el *inicial* [GTWW 75], [GTWW 77], *terminal* [Wand 81] y el *loose* [GGM 76], [BDPPW 79].

Dentro de las especificaciones algebraicas se trabaja con las *especificaciones relacionales*. Estas tienen una firma que contiene una lista de constantes relacionales, un conjunto de operaciones relacionales y un conjunto de símbolos de predicado que permiten vincular los términos relacionales. Los primeros trabajos en esta dirección los realizó A. Tarski con su Teoría Elemental de Relaciones Binarias y el Cálculo de Relaciones Binarias [Tar 41] [CT 51]. La idea de caracterizar tipos de datos mediante axiomas relacionales no es nueva. El paper [BR 73] parece ser el primero en contener especificaciones relacionales de tipos de datos. Ejemplos posteriores se encuentran en los trabajos de [Roe 74], [Zier 83], [Sch 84], [BZ 86], [Des 89] y [DM 90]. Sin embargo todos ellos tienen en común que solo presentan ejemplos específicos de especificaciones relacionales pero no tratan este tópico en general.

En 1990 R. Berghammer y G. Schmidt [BS 90] definieron el concepto de especificación relacional transfiriendo los conceptos fundamentales de las especificaciones algebraicas al caso relacional. Además en 1991 A. Haeberer y P. Veloso [HV 91] y [VHB 92] presentaron un cálculo relacional que extiende al de A. Tarski. Además en 1992 G. Hutton [HB 92] propuso trabajar con *relaciones de equivalencia parciales* para los *tipos de datos* y con relaciones binarias para los programas. Otro enfoque proviene de trabajar con las relaciones n-arias y tiene como antecedente al álgebra relacional de Codd [Codd 70], [Codd 79]. En 1991 B. Möller definió un lenguaje de relaciones n-arias de alto orden para especificaciones y construcción formal de programas [Möl 91].

Se adoptó el enfoque de Haeberer y Veloso, porque engloba en poder expresivo al cálculo de predicados, al cálculo de relaciones binarias de Tarski y al álgebra relacional de Codd.

Existen por lo menos tres enfoques para la construcción formal de programas:

(a) *Construcción y prueba de programas basada en lógica de Hoare*: Formalizando las ideas de Floyd [Flo 67] y Naur [Naur 66] Hoare introdujo en [Hoa 69] un método axiomático para probar que un programa es parcialmente correcto con respecto a una especificación. Se tiene una *definición formal* de un *lenguaje de programación*. Se presenta una *definición axiomática* de *ejecución de programas*. *Fórmulas de Correctitud* son ternas: {P} C {Q} donde C es un programa, P (precondición) y Q (postcondición) son fórmulas de primer orden. {P} C {Q} significa que si la ejecución de C comienza en un estado de memoria que satisface P, entonces si la ejecución termina lo hace en un estado que satisface Q. Además se dispone de un *procedimiento de prueba* de fórmulas de correctitud.

(b) *Desarrollo de programas a partir de especificaciones algebraicas*: Se parte de un lenguaje de especificaciones algebraicas estructuradas (por ej. CLEAR [BG 80], ASL [Wir 82], [Wir 86], LOOK [ETLZ 82], etc.) y una noción adecuada de *paso de refinamiento* e *implementación*. Hay varias propuestas diferentes, entre ellas [GTW 76], [GB 80], [Ehr 81], [EKMP 82], [SW 82], [GM 82], [Sch 82], [Gan 83] y [Lip 83]. Aquí, la construcción formal de un programa consiste en partir de una especificación y luego de una sucesión de pasos de refinamiento e implementación para llegar a otra especificación mucho más cercana a un programa.

(c) *Programación transformacional o calculacional*: Este enfoque es descripto en [Pep 84]. Se hace un breve resúmen. Se tiene un formalismo que permite construir *esquemas de programas* y *reglas de transformación* . Los esquemas de programas son términos bien formados de un *tipo algebraico* que define un lenguaje de programación sobre algún conjunto de *tipos primitivos*. La *semántica* de los esquemas de programas viene dada por un mapeo de términos a valores en el *tipo algebraico*. Además se tienen *predicados semánticos* entre esquemas de programas que permiten comparar programas (p.e: equivalente a, refinamiento de, etc.) y establecer propiedades de un esquema de programas (p.e.: determinístico, definido, etc.). Vinculando esquemas de programas con predicados semánticos se tienen *fórmulas atómicas*. Fórmulas atómicas se vinculan a través de *cláusulas de Horn*. Una *regla de transformación* es un par <C,*rel*(I,O)> donde C es una lista de cláusulas de Horn llamada *condiciones de aplicabilidad* e I y O son esquemas de programas y *rel* es un predicado semántico. Entonces toda construcción formal comienza con un *término descriptivo* y termina con un término *operacional* luego de una sucesión de aplicaciones de *reglas de transformación*. Esta metodología fue desarrollada dentro del Proyecto CIP [BW 82], [BBBD 85], [BEHM 87] que produjo los lenguajes CIP-L y CIP-S.

Se adopta el enfoque *calculacional*. Además el objetivo inicial fue basarse en la teoría de relaciones por su gran riqueza. Existen algunas propuestas recientes en la literatura: [BS 90], [HV 91], [HV 92], [Möl 91]. En este trabajo se parte del *cálculo de relaciones binarias* de A.Tarski (ver sección 1). Además se considera la *extensión* al mismo hecha por Haeberer y Veloso en [HV 91], [VHB 92] y [BHV 92](ver sección 2). La firma contiene una operación binaria adicional llamada *fork* (∇); que puede ser definida informalmente en términos de una álgebra relacional propia como: dadas relaciones r y s, si xry y xsz entonces $x\ r\nabla s\ [y,z]$ donde el par $[y,z]$ pertenece a un *grupoide libre* $\langle V,[,]\rangle$. A estos modelos se los llama *algebras relacionales estructuradas*. Se eligió este enfoque porque se probó que su poder expresivo engloba al del cálculo de predicados (ver [HV 91]).

En [BHV 92] G. Baum, Haeberer y Veloso dieron una axiomatización para el ∇ de modo que toda álgebra que la respete sea isomorfa a una *álgebra relacional propia* (teorema de representación). Hay dos problemas todavía abiertos:

(a) Axiomatizar las clases de isomorfismo de las *álgebras relacionales estructuradas*.

(b) Que dicha axiomatización sea completa con respecto al procedimiento de prueba de A. Tarski.

Mientras se realizaban ejemplos de derivación de programas a partir de especificaciones para problemas clásicos, se descubrieron nuevas construcciones (mediante términos) útiles para especificación y derivación de programas (ver sección 3). Estas se clasifican en:

(a) Términos para especificar: términos equivalentes a fórmulas del tipo $\forall x\ p(y,x) \Rightarrow q(y,x)$ (condiciones universales); términos para *definiciones por comprensión*: $\{x: \varphi(x)\}$ y totalización de relaciones.

(b) Construcciones que permiten refinar términos relacionales a otros menos no determinísticos. Estas son *suma secuencial* y *sustitución*.

(c) Términos relacionales equivalentes a varias construcciones del CIP-L (p.e: *some*, *that*, comandos guardados, selección, ∇, Δ, etc.).

Durante las derivaciones se encontraron varias propiedades nuevas válidas en las *álgebras relacionales estructuradas*. Se intentó probarlas usando los axiomas del teorema de representación. Durante esta etapa se encontró una nueva axiomatización para el ∇. Esta consiste en dos propiedades del teorema de representación, una propiedad de las álgebras estructuradas (Teorema 5.3 (b) de [VHB 92]) y una propiedad nueva.

Se enuncian varias propiedades halladas durante las derivaciones y se prueban usando los axiomas y el procedimiento de Tarski. Para hacer estas pruebas más fáciles se usan y prueban varios resultados preliminares (ver sección 4).

Durante cualquier derivación de programas se tienen cuatro tipos de pasos:

(a) Utilización de propiedades de los tipos que intervienen.

(b) Uso de propiedades elementales de simplificación de términos, distributividades, etc.

(c) Aplicación de fórmulas básicas para estrategias de derivación (p.e. introducción de casos, generalización de dominios, recomposición de términos, etc.)

(d) Prueba de propiedades para relaciones.

Con respecto al problema (d) casi no hay resultados en el enfoque adoptado. En este trabajo se comienza el estudio sistemático de cómo probar identidades del tipo:

$$r;\ C = \dot{r} \qquad (1)$$

Donde r es término y C es término asociado a una fórmula de primer orden. Se pone especial énfasis en el caso en que C es una condición universal. (ver sección 5). El objetivo es transformar la condición (1) en una lista de condiciones (más simples) equivalentes que involucran a r y a subtérminos de C (eliminándose cuantificadores).

Se aborda el problema de probar *condiciones* que involucran *invariantes* (sección 6). Se prueba que bajo ciertas hipótesis se reduce a un caso especial del problema (1). Aquí el término $\imath$ es un invariante para el término r si es deducible la identidad:

$$\imath;\ r = \imath;\ r;\ \imath \qquad (2)$$

Se estudia cómo encarar una prueba de este tipo y se presenta una estrategia.

Finalmente se presenta como ejemplo de derivación el "Hamming's Problem" (sección 7) donde se ilustran los resultados alcanzados.

1. TEORÍAS DE TARSKI DE RELACIONES BINARIAS

Estas fueron presentadas por Tarski en: [Tar 41], [CT 51].

1.1 TEORÍA ELEMENTAL DE RELACIONES

Alfabeto:

(i) Se tienen dos conjuntos de variables:

(1) *Individuos*: letras x, y, z, ...
(2) *relaciones*: letras r, s, t, ...

(ii) Símbolos funcionales:

Son símbolos de operación entre relaciones:

(1) *Constantes*: ∞ relación universal, 0 relación nula, 1 relación identidad, $\mathcal{P}$ relación diversidad.

(2) *Operadores*: $\bar{\ }$ complemento, $\breve{\ }$ conversa, $+$ suma, $\cdot$ intersección, $\oplus$ suma relativa, $;$ producto relativo

Términos: Es el menor conjunto de cadenas con las siguientes propiedades:

(i) Toda variable de individuo es un término.
(ii) *Términos de relación*:
(1) Toda variable de relación es un término
(2) 1, 0, ∞, $\mathcal{P}$, son términos
(3) Si t_1 y t_2 términos entonces $t1 * t2$ término, $* \in \{ +, \cdot, \oplus, ; \}$
(4) Si t término, entonces $\bar{t}$ y $\breve{t}$ son términos

Fórmulas bien formadas: Es el menor conjunto de cadenas que contiene:

(i) *Fórmulas atómicas*:
(1) si x, y variables de individuos, t término de relación: $t(x,y)$ es fórmula atómica.

(2) si t_1 y t_2 términos de relación, entonces $t_1 = t_2$ es fórmula atómica.

(ii) El resto de las fórmulas se construye como en los lenguajes de primer orden.

Finalmente Tarski tomó como axiomas extralógicos las siguientes sentencias:

EA1 $\forall x\ \forall y\ (\infty(x,y))$

EA2 $\forall x\ \forall y\ (\neg 0(x,y))$

EA3 $\forall x\ (1(x,x))$

EA4 $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((r(x,y) \wedge 1(y,z) \Rightarrow r(x,z))$

EA5 $\forall x\ \forall y\ (\mathcal{P}(x,y) \Leftrightarrow \neg 1(x,y))$

EA6 $\forall x\ \forall y\ (\bar{r}(x,y) \Leftrightarrow \neg r(x,y))$

EA7 $\forall x\ \forall y\ (\tilde{r}(x,y) \Leftrightarrow r(y,x))$

EA8 $\forall x\ \forall y\ (r+s(x,y) \Leftrightarrow (r(x,y) \vee s(x,y)))$

EA9 $\forall x\ \forall y\ (r\cdot s(x,y) \Leftrightarrow (r(x,y) \wedge s(x,y)))$

EA10 $\forall x\ \forall y\ (r\oplus s(x,y) \Leftrightarrow (\forall z)(r(x,z) \vee s(z,y)))$

EA11 $\forall x\ \forall y\ (r;s(x,y) \Leftrightarrow (\exists z)(r(x,z) \wedge s(z,y)))$

EA12 $r=s \Leftrightarrow \forall x\ \forall y\ (r(x,y) \Leftrightarrow s(x,y))$

Un modelo para este lenguaje va a ser un álgebra heterogenea con un dominio de individuos y otro de relaciones. Los símbolos de operación del lenguaje se interpretan como funciones en el dominio de relaciones. Los términos de relación se interpretan como valores en el dominio de relaciones (fijada una valuación en las variables de relación). El significado de las fórmulas y el concepto de validez de una fórmula para un modelo se define como en los lenguajes de primer orden. Además en estos modelos son válidos todos los axiomas de arriba.

1.2 CÁLCULO DE RELACIONES BINARIAS

1.2.1 El lenguaje

Alfabeto:

(i) Un conjunto de variables relacionales: r, s, t, ...
En algunas ocasiones se usarán: r_1, r_2, r_3, ...
(ii) Símbolos funcionales:

(1) *Constantes*: ∞ relación universal, 0 relación nula, 1 relación identidad, $\mathcal{P}$ relación diversidad.

(2) *Operadores*: $\bar{}$ complemento, $\tilde{}$ conversa, + suma, $\cdot$ intersección, $\oplus$ suma relativa, ; producto relativo

Términos: Es el menor conjunto de cadenas con las siguientes propiedades:

(1) Toda variable es un término
(2) 1, 0, ∞, $\mathcal{P}$, son términos
(3) Si t_1 y t_2 términos entonces $t_1 * t_2$ es término, $* \in \{+, \circ, \oplus, ;\}$
(4) Si t término, entonces $\bar{t}$ y $\tilde{t}$ son términos

Fórmulas bien formadas: Es el menor conjunto de cadenas que contiene:

(i) *Fórmulas atómicas*: Si t_1 y t_2 términos entonces $t_1 = t_2$ es fórmula bien formada (atómica).

(ii) Si F_1 y F_2 fórmulas bien formada entonces $F_1 * F_2$ es fórmula bien formada, donde $* \in \{\wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee\}$

(iii) Si F es fórmula bien formada entonces $\neg F$ es fórmula bien formada.

1.2.2 Una axiomatización

Con el fin de desarrollar el cálculo de relaciones binarias Tarski derivó de los axiomas de su Teoría Elemental de Relaciones un conjunto apropiado de *teoremas* cuyas variables son exclusivamente relacionales. Luego tomó estos teoremas como axiomas extralógicos de su Cálculo de relaciones binarias. Sus axiomas pueden ser divididos en tres grupos:

(i) *Axiomas de los símbolos booleanos*: ($+$, $\cdot$, $\bar{\ }$, 0, ∞)

CA1 $r + s = s + r$

CA2 $r \cdot s = s \cdot r$

CA3 $(r + s) \cdot t = (r \cdot t) + (s \cdot t)$

CA4 $(r \cdot s) + t = (r + t) \cdot (s + t)$

CA5 $r + 0 = r$

CA6 $r \cdot \infty = r$

CA7 $r + \bar{r} = \infty$

CA8 $\bar{\infty} = 0$

(II) Axiomas de los símbolos relativos: ($;$, $\tilde{}$, $\oplus$, 1, $\mathcal{P}$)

CA9 $\tilde{\tilde{r}} = r$

CA10 $\widetilde{r\ ;\ s} = \tilde{s}\ ;\ \tilde{r}$

CA11 $r;(s;t) = (r;s);t$

CA12 $r;1 = r$

(III) Axiomas que vinculan símbolos relativos y booleanos:

CA13 $(r;s)\cdot\tilde{t} = 0 \Rightarrow (s;t)\cdot\tilde{r} = 0$

CA14 $\mathcal{P} = \bar{1}$

CA15 $r \oplus s = \overline{\bar{r}\ ;\ \bar{s}}$

CA16 $\neg(r = 0) \Rightarrow \infty;\ r;\ \infty = \infty$

1.2.3 Algebras Relacionales

Una *Algebra Relacional Abstracta* es una álgebra:

$\langle \mathcal{R},+,\cdot,;,\oplus,\tilde{},\bar{},0,\infty,1,\mathcal{P}\rangle$ que satisface los axiomas anteriores. A los elementos de $\mathcal{R}$ se los denomina *relaciones*.

Una *Algebra Relacional Propia* es una álgebra

$\langle\ \mathfrak{P}(U\times U),\ \cup,\ \cap,\ ;,\ \oplus,\ ^{-1},\ ',\ \emptyset,\ U\times U,\ \Delta,\ \Delta'\ \rangle$ donde:

U conjunto, $\mathfrak{P}$ operador partes.
Además $\cup$, $\cap$ y $'$ son unión, intersección y complemento de conjuntos.

Sea $r,\ s \in \mathfrak{P}(U\times U)$ se define:

$r^{-1} = \{\ \langle x,y\rangle :\ \langle y,x\rangle \in r\ \}$

$r\ ;\ s = \{\ \langle x,y\rangle :\ \exists z\ \ z\in U\ \langle x,z\rangle \in r\ \ \text{y}\ \ \langle z,y\rangle \in s\ \}$

$\Delta = \{\ \langle x,x\rangle :\ x \in U\ \}$

$r \oplus s = \{\ \langle x,y\rangle\ :\ \forall z\ \ z\in U\ \langle x,z\rangle \in r\ \ \text{o}\ \ \langle z,y\rangle \in s\ \}$

A los elementos de $\mathfrak{P}(U\times U)$ se los denomina *relaciones propias*.

Toda Algebra Relacional Propia es Relacional Abstracta.

1.2.4 Prueba de teoremas

A continuación se presenta el procedimiento de prueba presentado por Tarski.

Se considera el siguiente conjunto de axiomas y reglas:

(a) Un sistema de reglas y axiomas (completo) del Cálculo Proposicional.

(b) El siguiente sistema de axiomas y reglas para identidades:

Sean t, t_1, t_2 y t_3 términos, F fórmula y una sustitución de variables en términos $\sigma = \{ (r_1 | t_1), \ldots, (r_n | t_n) \}$.

(1) $t = t$

(2) $$\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}$$ Simetría.

(3) $$\frac{t_1 = t_2,\ t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$$ Transitividad.

(4) $$\frac{F,\ \sigma}{F\sigma}$$ Sustitución.

(5) $$\frac{t_1 = t_2,\ F}{F_1} \left[\ t_1 \text{ oc. } F \right.$$ Reemplazo.

donde F_1 resulta de reemplazar alguna ocurrencia de t_1 en F por t_2

Una *prueba* de una fórmula F a partir de una lista de fórmulas Σ (y se denota $\Sigma \vdash F$) es una sucesión finita de fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ donde $F_n = F$ y cada F_i $i \in 1\ldots n-1$ verifica:

(a) $F_i \in \Sigma$
(b) F_i es un axioma del cálculo de relaciones binarias
(c) F_i es un axioma del cálculo relacional
(d) F_i es $t = t$ para algún término t
(e) F_i se obtiene de aplicar alguna de las reglas del cálculo proposicional a fórmulas anteriores en la sucesión.
(f) F_i es el resultado de aplicar alguna de las reglas para identidades a fórmulas anteriores en la sucesión.

Una fórmula F es un *teorema* del Cálculo de Relaciones Binarias si y sólo si $\emptyset \vdash F$

1.2.5 Algunos teoremas

Algunos ejemplos de los teoremas del Cálculo de relaciones binarias derivados por Tarski son:

C1 $[(r;s)\cdot t = 0 \Leftrightarrow (s;\tilde{t})\cdot \tilde{r} = 0] \wedge [(r;s)\cdot t = 0 \Leftrightarrow (\tilde{t};r)\cdot \tilde{s} = 0]$

C2 $r\cdot \bar{s} = 0 \Rightarrow \overline{\tilde{r}}\cdot \tilde{s} = 0$

C3 $r = s \Rightarrow \tilde{r} = \tilde{s}$

C4 $\widetilde{r + s} = \tilde{r} + \tilde{s}$

C5 $\tilde{0} = 0 \wedge \tilde{1} = 1$

C6 $s\cdot \bar{t} = 0 \Rightarrow (r;s)\cdot \overline{r;t} = 0$

C7 $s = t \Rightarrow r;s = r;t$

C8 $r;(s+t) = (r;s)+(r;t)$

C9 $r;0 = 0$

C10 $r\cdot \bar{s} = 0 \Rightarrow (r;t)\cdot \overline{s;t} = 0$

C11 $r = s \Rightarrow r;t = s;t$

C12 $(r+s);t = (r;t)+(s;t)$

C13 $0;r = 0$

C14 $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$

1.2.6 Vectores y puntos

En [SS 85], [BS 91] se presentan relaciones que permiten "simular" los elementos y los conjuntos de elementos del universo de las álgebras relacionales propias. Además se caracterizan estas relaciones mediante fórmulas.

Se llaman *vectores* a las relaciones que verifican la propiedad: $r = r;\infty$

Las relaciones propias que verifican esta propiedad son las de la forma:

$\{\langle v,u\rangle : u \in U \wedge v \in S\}$ para algún conjuto $S \subseteq U$

Se llaman *puntos* a los vectores que son biyectivos: es decir que cumplen:

$pto(r) \Leftrightarrow (r = r;\infty \wedge r;\tilde{r} \leq 1 \wedge \tilde{r};\infty = \infty)$

Las relaciones propias que verifican la propiedad anterior son las de la forma:

$\{\langle v,u\rangle : u \in U\}$ para algún $v \in U$

1.2.7 Problema de Representación

En [Tar 41] se resalta el siguiente problema:

¿ Es toda Algebra Relacional Abstracta isomorfa a alguna Algebra Relacional Propia ?.

En [Lyn 50] Lyndon construye un ejemplo de álgebra relacional abstracta no representable.

En [Jón 50] se probó que una álgebra relacional abstracta es representable si y sólo si todos sus átomos son funcionales.

En [SS 85] Schmidt y Ströhlein presentan el problema de represenación utilizando los conceptos de vectores y puntos.

Consideran el axioma siguiente:

$r \neq 0 \Rightarrow \exists x\ \exists y\ x,y$ puntos $\wedge\ x;\tilde{y} \leq r$ y prueban:

Todo modelo del cálculo de relaciones binarias de Tarski que verifica el axioma anterior es isomorfo a un álgebra relacional propia.

2 CALCULO DE RELACIONES BINARIAS PARCIALES EXTENDIDO

2.1 El lenguaje

Se consideraron los trabajos: [HVE 90], [HV 91], [VHB 92] y [BHV 92].

Se tiene el siguiente alfabeto:

(i) Lista de constantes relacionales c_1, c_2, ...

(ii) Lista de variables relacionales r, s, t, ...

(iii) Las constantes del cálculo de relaciones binarias.

(iv) Los símbolos de operación del cálculo de relaciones binarias junto con un símbolo binario adicional ∇ (fork).

Términos y fórmulas se definen igual que en el Cálculo de Relaciones Binarias (considerándose los nuevos símbolos de operación y de constante).

2.2 Algebras Relacionales extendidas

Una *∇-Algebra Relacional Abstracta* es una Algebra relacional abstracta junto con una operación asociada a ∇.

Sea $(\mathfrak{U},*)$ un álgebra con una operación binaria, tal que $\mathfrak{U}$ se define como sigue:

(i) $X \subseteq \mathfrak{U}$, X conjunto.

(ii) Si $a,\ b \in \mathfrak{U}$ entonces $a*b \in \mathfrak{U}$

Además $(\mathfrak{U},*)$ verifica la propiedad:

$\forall a\ \forall b\ \forall c\ (a*b)*c \neq a*(b*c)$

Es decir, $\mathfrak{U}$ es el conjunto de todos los árboles con hojas en X.

Una *Algebra relacional estructurada* es una Algebra Relacional Propia donde:

(1) $U = \mathfrak{U}$

(2) $r\ \nabla^{R}\ s =_{def} \{\langle x, y*z\rangle : xry \wedge xsz\}$

Estas álgebras son los modelos intensionales del Cálculo Relacional Extendido.

2.3 Expresiones estructurales del Cálculo Relacional Extendido

Como los modelos propios tienen por dominio un conjunto de árboles; se pueden definir términos apropiados para manipularlos.

2.3.1 Proyecciones:

$$\Pi_1 = \widetilde{1\ \nabla\ \infty}$$

Esta expresión se interpreta en los modelos propios como:

$\{\ \langle x*y, x\rangle :\ x, y \in \mathfrak{U}\ \}$

$$\Pi_2 = \widetilde{\infty\ \nabla\ 1}$$

Se interpreta en las álgebras relacionales propias como:

$\{\ \langle x*y, y\rangle :\ x, y \in \mathfrak{U}\ \}$

Se seguirá para abreviar la composición de proyecciones la siguiente notación:

Acompañe a Π con una palabra de 1 y 2 para denotar la composición de las proyecciones con índices en el orden en que aparecen en la palabra:

Por ejemplo Π_{1212} denota la expresión:

$\Pi_1 ; \Pi_2 ; \Pi_1 ; \Pi_2$

2.3.2 Producto Directo

Se desea construir un término que se interprete en los modelos propios como la relación (producto directo):

$\{ \langle x_1 * x_2 , y_1 * y_2 \rangle : \langle x_1 , y_1 \rangle \in r \wedge \langle x_2 , y_2 \rangle \in s \}$
r y s son relaciones.

El término buscado es:

$r \otimes s = (\Pi_1 ; r) \nabla (\Pi_2 ; s)$

2.3.3 Copias

Se definen inductivamente:

$2 = 1 \nabla 1$
$n + 1 = n \nabla 1$

Se interpretan en los modelos propios como:

$\{ \langle x , x * x \rangle : x \in \mathfrak{U} \}$ para 2,
$\{ \langle x , (x * x) * x \rangle : x \in \mathfrak{U} \}$ para 3, ...

2.4 Poder expresivo del cálculo relacional extendido

El Cálculo extendido de relaciones binarias parciales tiene el poder expresivo de la lógica de primer orden, en el siguiente sentido (ver [HV 91]):

Teorema 2.1: Sea $\mathfrak{L}$ lenguaje de primer orden, $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ fórmula con variables libres $x_1,\dots,x_n$, entonces existe un término $\tau(\varphi)$ tal que si $\mathcal{A}$ modelo de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$ álgebra relacional extendida propia con dominio $\mathfrak{U}$ dado por los árboles con hojas en el universo de $\mathcal{A}$; entonces $\tau(\varphi)$ se interpreta en $\mathfrak{R}$ como:

$1\varphi = \{ \langle u , u \rangle : u \in \mathfrak{U} \wedge u = u_1 * (u_2 * (\dots (u_{n-1} * u_n) \dots)) \wedge \hat{\varphi}(u_1 , \dots , u_n) \}$

$\hat{\varphi}(u)$ valor de verdad de la fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ para toda valuación v tal que: $v(x_i) = u_i$, $i \in 1..n$.

Se pueden simular los conectivos proposicionales en términos de las operaciones booleanas. Supongamos que tenemos términos relacionales $\tau(\varphi)$ y $\tau(\theta)$ correspondientes a las fórmulas φ y θ, entonces:

(i) $\tau(\varphi \vee \theta) = \tau(\varphi) + \tau(\theta)$

(ii) $\tau(\varphi \wedge \theta) = \tau(\varphi) \cdot \tau(\theta)$

(iii) $\tau(\rceil\varphi) = \overline{\tau(\varphi)} \cdot 1$

(iv) $\tau(\exists y\ \varphi(x,y)) = \tilde{\Pi}_1;\tau(\varphi);\Pi_1$

Además se pueden construir expresiones relacionales que reflejen algunas de las construcciones de lenguajes de amplio espectro. Por ejemplo en el CIP-L se pueden hacer definiciones por comprensión del tipo:

$\{y\colon \varphi(x,y)\}$; esta se puede expresar mediante: $\tilde{\Pi}_1;\tau(\varphi);\Pi_2$

En la sección 3 se presentarán otros ejemplos.

2.5 Problema de Representación

En [BHV 92] se presentan algunos axiomas para el ∇ y se prueba que toda álgebra relacional extendida que los verifica es representable:

Teorema 2.2: Una ∇-álgebra relacional abstracta es representable si satisface las siguientes fórmulas:

(1) $(t \subset r\nabla s) \Rightarrow ((t;\Pi_1 \subset r) \wedge (t;\Pi_2 \subset s))$

(2) $(r\nabla s);\ \widetilde{(t\nabla q)} = (r;\tilde{t}) \cdot (s;\tilde{q})$

(3) $r;(s\nabla t) \subset (r;s)\nabla(r;t)$

(4) $(r\subset v) \wedge (s\subset w) \Rightarrow (r\nabla s) \subset (v\nabla w)$

(5) $(\neg(t=0) \wedge (t \subset r\nabla s)) \Rightarrow \exists v\ \exists w\ (\neg(v=0) \wedge \neg(w=0) \wedge (v\nabla w \subset t))$

3. ALGUNOS TERMINOS UTILES PARA ESPECIFICACION Y DERIVACION DE PROGRAMAS

Notación: Se usarán las siguientes abreviaturas de términos:

$dom(r) = (r;\infty) \cdot 1$
$cod(r) = (\infty;r) \cdot 1$

3.1 Términos para especificar problemas

En la sección 1 se mostró que el cálculo extendido de relaciones binarias permite construir términos para relaciones del tipo 1φ, donde φ fórmula de primer orden. A continuación se presentan algunos términos útiles para especificar problemas.

Sea una álgebra relacional propia $\mathfrak{R}$ con universo $\mathfrak{U}$:

Igualdad:

Se desea construir un término que se interprete como la relación: $\{ \langle u{*}v, u{*}v \rangle : u,v \in \mathfrak{U} \wedge u = v \}$.

Esto es posible mediante el término $2;2$, donde $2 = 1\nabla 1$.

Existe:

Haeberer y Veloso construyeron un término que se interpreta en las álgebras estructuradas como la relación:

$\{ \langle u,u \rangle : u \in \mathfrak{U} \wedge \exists v\ v \in \mathfrak{U}\ u{*}v\ r\ u{*}v \}$

Este término es: $\tilde{\Pi}_1;r;\Pi_1$

Comprensión:

Se desea construir un término relacional que se interprete como la relación: $\{ \langle u,v \rangle : u,v \in \mathfrak{U} \wedge u{*}v\ r\ u{*}v \}$

Este término es: $\tilde{\Pi}_1;r;\Pi_2$

Otra posibilidad es: $\tilde{\Pi}_2;r;\Pi_1$ y se interpreta como:

$\{ \langle u,v \rangle : u,v \in \mathfrak{U} \wedge v{*}u\ r\ v{*}u \}$

Estos términos se identifican con la construcciones *some* y *that* (si son funcionales) del CIP-L.

Condición Universal:

Se desea construir un término que se interprete como la relación: $\{ \langle u,u \rangle : u \in \mathfrak{U} \wedge \forall v\ v \in \mathfrak{U}\ u{*}v\ r\ u{*}v \Rightarrow u{*}v\ s\ u{*}v \}$

Este término es:

$$\overline{(\tilde{\Pi}_1;\ \overline{(\bar{r}\circ 1 + s)} \bullet 1;\ \Pi_1)} \circ 1$$

Se lo denotará con: $\forall(r|s)$ y llamará *condición universal*.

Este término es más general que el término asociado a una fórmula *cuantificada universalmente*:

A la fórmula $\forall x\, \varphi(x,y)$ se le asocia el término denotado por:

$$\forall(1|\tau(\varphi))$$

3.2 Totalización de relaciones

3.2.1 Totalización

Hasta ahora, gran parte de las especificaciones a través de fórmulas se interpretan en los modelos propios como relaciones contenidas en la diagonal y están indefinidas para aquellos valores que no verifican la fórmula. Se desea aprovechar la información de si una fórmula no vale en la construcción de términos. Para esto basta construir un término que totalice relaciones. Se consideran álgebras estructuradas con universos $\mathbb{U} = \mathfrak{U} \cup \{\perp\}$.

Se quiere definir una operación $^{\circ}$ tal que en las álgebras relacionales estructuradas se interprete como:

$$r^{\circ} = \{\langle u,v\rangle : u \in \mathfrak{U},\ v \in \mathbb{U} \wedge urv \vee (u \notin dom(r) \wedge v=\perp)\}$$

Se añade al alfabeto de las ∇-Algebras relacionales abstractas una constante *bot* que es la conversa de un punto.

Un término relacional que se interpreta como la relación de arriba es:

$$r^{\circ} = r + (\overline{(r;\infty \circ 1)} \circ 1);\ bot$$

3.2.2 Funciones características

Interesa encontrar términos para relaciones que se interpretan como funciones características $B\varphi$ asociadas a una fórmula φ; es decir, mediante la relación:

$$\{\langle u,b\rangle : u \in \mathfrak{U} \wedge b \in Bool \wedge b = T \Leftrightarrow u\ 1\varphi\ u\}$$

Se especifica el tipo Bool:

Se agregan al alfabeto las constantes *true*, *false* y *Bool*.

$Pto(true)$
$pto(false)$
$Bool = true + false$
$\neg(true = false)$
$1_{Bool} = \widetilde{Bool} \circ 1$
$1_{\langle T\rangle} = \widetilde{true};\ true$
$1_{\langle F\rangle} = \widetilde{false};\ false$

$dom(and) = dom(or) = 1_{Bool} \otimes 1_{Bool}$

(true ⊗ true); and = (1⊗1); true
(true ⊗ false); and = (1⊗1); false
(false ⊗ false); and = (1⊗1); false
(false ⊗ true); and = (1⊗1); false

(true ⊗ true); or = (1⊗1); true
(true ⊗ false); or = (1⊗1); true
(false ⊗ true); or = (1⊗1); true
(false ⊗ false); or = (1⊗1); false

Sea $\downarrow$ un término que se interpreta como:

$\{\langle u,b\rangle : u \in \mathfrak{U} \wedge b \in Bool \wedge b = T \Leftrightarrow u \neq \perp \}$

El término buscado es: $B\varphi = \tau(\varphi)^{\circ} ; \downarrow$

Un término relacional para $\downarrow$ es:

$\downarrow = \tilde{\tilde{\tilde{bot}}}\ ; false + 1; \overline{((\tilde{\tilde{\tilde{bot}}}; bot) \circ 1)}; true$

false se interpreta en las álgebras estructuradas como:

$\{\langle u,F\rangle : u \in \mathfrak{U} \wedge F \in \mathfrak{U} \}$

y true mediante:

$\{\langle u,T\rangle : u \in \mathfrak{U} \wedge T \in \mathfrak{U} \}$

Recíprocamente si se tiene una relación booleana r:

$dom(r) \subseteq 1_{Bool}$

y se desea obtener un término que se interprete como:

$\{\langle x,x\rangle : x \in dom(r) \wedge x\ r\ T\}$,

La expresión buscada es:

$(1 \nabla r; 1_{\langle T\rangle}); \Pi_1$

Si t término relacional, entonces $t^{\circ};\downarrow$ se interpreta en las álgebras estructuradas como la relación que testea si t está definida o no en un elemento de $\mathfrak{U}$.

3.3 Selección y comandos guardados

3.3.1 Selección

Se construirá un término que se interpreta como una relación que se comporta como la construcción *if_then_else*, es decir:

$$\{\langle u,v\rangle : u\ r\ v \Leftrightarrow u \subset T \wedge u\ s\ v \Leftrightarrow u \subset F\}$$

donde: $dom(r) \cup dom(s) = dom(c)$, $img(c) \subseteq Bool$.

Se usará la notación abreviada del lenguaje C: (_?_,_)

Entonces si $dom(r) + dom(s) = dom(c)$ y $cod(c) \subseteq 1_{Bool}$

Se tiene el término:

$$(c?r,s) = (1\nabla c);\ [\ ((1\otimes \widetilde{true};true);\Pi_1;r)\ +$$
$$((1\otimes \widetilde{false};false);\Pi_1;s)\ ]$$

Si $c \subseteq 1$, $dom(r) + dom(s) = 1$ entonces para poder construir el término de arriba es necesario totalizar c:

$$(c^{\circ};{\downarrow}?r,s)$$

3.3.2 Comandos guardados

Sean $c_1,\ldots,c_n \subseteq 1$ términos que se interpretan como diagonales asociadas a fórmulas; sean $r_1,\ldots,r_n$ términos tal que son válidas en los modelos propios:

$$dom(c_i) \subset dom(r_i) \quad i \in 1..n$$

El *comando guardado* asociado a las relaciones de arriba se define como el término:

$$(1\nabla c_1);\Pi_1;r_1\ +\ \ldots\ +\ (1\nabla c_n);\Pi_1;r_n$$

3.4 Construcciones para reducir el no determinismo

Por motivos de eficiencia muchas veces es necesario transformar una expresión no determinísticas en otra con igual dominio, pero con menor grado de no determinismo. Ejemplos de estas transformaciones pueden ser:

(i) Transformar un comando guardado en una selección
(ii) Transformar una suma de funciones en una función
(iii) Transformar un término existencial en uno que no lo es.

3.4.1 Suma secuencial

La operación de suma en general no es determinística. Por motivos de eficiencia a veces es necesaria otra operación parecida pero menos determinística. Se construye una expresión tal que si los sumandos son determinísticos entonces lo es la suma. Llamaremos a esta operación *suma secuencial*. Se interpretará como sigue:

$$\{\langle u,v\rangle : u,v \in \mathfrak{U} \wedge ((u\ r\ v) \vee (u \notin dom(r) \wedge u\ s\ v))\}$$

Se denota la suma secuencial de r con s con: $r \dashv\vdash s$ y se le asocia el término:

$$r \dashv\vdash s = r + (dom(s) - dom(r));\ s$$

$$(dom(s) - dom(r)) = dom(s) \circ \overline{dom(r)} \cdot 1$$

La disyunción secuencial del CIP-L se puede expresar relacionalmente mediante la suma secuencial:

$$c_1 \dashv\vdash c_2,\ c_1, c_2 \subseteq 1$$

También se puede construir la conjunción secuencial del CIP-L mediante:

$$c_1;\ c_2,\ c_1, c_2 \subset 1$$

3.4.2 Sustitución

G. Baum construyó un término relacional que se interpreta como la relación:

$$\{\langle u,v\rangle : u,v \in \mathfrak{U} \wedge (u \notin dom(s) \wedge u\ r\ v) \vee (u \in dom(r) \wedge u\ s\ v)\}$$

Se sustituye en $dom(r) \cap dom(s)$ a *r* por *s*. Se denota la sustitución de r por s con r[s].

Un término para r[s] es:

$$r[s] = (r\nabla s);\Pi_2 + (r\nabla(\overline{s;\infty}));\Pi_1$$

Esta operación provee un mecanismo de reusabilidad de expresiones relacionales. Pues basta encarar los cambios como sustituciones.

Se observa que la operación de sustitución generaliza a la de totalización:

$$r^{\circ} = bot[r]$$

3.5 Clausura transitiva

Otro mecanismo para construir expresiones no determinísticas es mediante operadores de clausura. Aquí se presenta el concepto de clausura transitiva de una relación y un axioma que permite caracterizarla.

Se define $r^{;n}$ inductivamente:

$r^{;0} = dom(r)$

$r^{;(n+1)} = r \; ; \; r^{;n}$ donde $n \in Nat$.

Se denotará a la clausura transitiva de r por ; con r

Busco una fórmula que exprese:

$((\forall n \in Nat \; r^{;n} \subset r^{;*}) \wedge (\forall n \in Nat \; r^{;n} \subset s)) \Rightarrow (r^{;*} \subset s)$

Esta es:

$r^{;*} = dom(r) + r ; r^{;*}$

3.6 Vectores, puntos y constantes

Se llamará a las relaciones cuya conversa es un punto *constantes*. Estas son las relaciones estructuradas que satisfacen:

$r = \infty \; ; \; r \wedge \tilde{r} ; r \leq 1 \wedge r ; \infty = \infty$

4. PROPIEDADES BASICAS PARA DERIVACIÓN DE PROGRAMAS EN EL CALCULO RELACIONAL EXTENDIDO

4.1 Axiomas para el cálculo extendido

Estos axiomas se usarán en las pruebas de propiedades de esta sección y se empleará el método de prueba de Tarski.

Se consideran fórmulas del teorema de representación más dos fórmulas adicionales:

(1) $(\Pi_1 \nabla \Pi_2) \subset 1$

(2) $(r \nabla s);\ \widetilde{(t \nabla q)} = (r;\tilde{t}) \circ (s;\tilde{q})$

(3) $(r \nabla s) = (r;\tilde{\Pi}_1) \circ (s;\tilde{\Pi}_2)$

Se va a probar en sección 4.5 que las fórmulas (3) y (4) del teorema de representación se deducen usando (3).

Un problema abierto es:

Será cierto que (1) no se puede probar a partir de (2,3)?

4.2 Clasificación de las propiedades

Las fórmulas que se presentan fueron seleccionadas porque se usaron en varios ejemplos de derivación de programas (ver [DB 92]).

Estas fórmulas pueden ser clasificadas en las siguientes clases:

(a) Propiedades de simplificación de términos.
(b) Fórmulas para reorganizar términos.
(c) Fórmulas para las operaciones y construcciones del lenguaje.
(d) Propiedades para el cálculo de dominios.
(e) Fórmulas para los tipos de datos (axiomatizaciones).

Para cada una de las clases, se dan algunos ejemplos. Estas fórmulas pueden ser consideradas como "ladrillos", a partir de los cuales se pueden probar otras fórmulas más complicadas (por ejemplo que reflejen estrategias de derivación).

Ahora se habla de las pruebas que se presentan para estas propiedades.

Se derivan a partir de los axiomas casi todos los resultados de esta sección.

En las pruebas se usará la sigla B.A.P. para indicar que el término que se muestra es el resultado de aplicarle al anterior propiedades elementales de las álgebras de boole.

4.3 Notación

Se abreviarán los siguientes términos:

(a) $\mathit{dom}(r) = (r;\infty) \circ 1$
(b) $\mathit{cod}(r) = (\infty;r) \circ 1$

En las fórmulas se van a usar las siguientes abreviaturas:

(a) $\mathit{tot}(r) \Leftrightarrow r;\infty = \infty$

(b) $\mathit{det}(r) \Leftrightarrow \tilde{r};r \subseteq 1$

(c) $\mathit{pto}(r) \Leftrightarrow (r = r;\infty \wedge r;\tilde{r} \subset 1 \wedge \tilde{r};\infty = \infty)$

(d) $\mathit{cte}(c) \Leftrightarrow (r = \infty;r \wedge \tilde{r};r \subset 1 \wedge r;\infty = \infty)$

4.4 Propiedades de la conversa

Se puede decir que la conversa de un término es casi el término de las conversas de las constantes y variables que intervienen.

Proposición 4.1: Se tienen las siguientes propiedades de la conversa:

(a) $\widetilde{r + s} = \tilde{r} + \tilde{s}$

(b) $\widetilde{r ; s} = \tilde{s} ; \tilde{r}$

(c) $\widetilde{r \circ s} = \tilde{r} \circ \tilde{s}$

(d) $\tilde{\tilde{r}} = r$

(e) $\widetilde{r \nabla s} = \tilde{r} \otimes \tilde{s} : \tilde{2}$

(f) $\widetilde{r \otimes s} = \tilde{r} \otimes \tilde{s}$

(g) $\widetilde{\overline{r}} = \overline{\tilde{r}}$

(h) $\tilde{\infty} = \infty$

Prueba:

(a) Por C4

(b) Por CA10

(c) Ver [SS 85]

(d) Por CA9

Prueba de (e):

$\widetilde{r \nabla s}$	$= \widetilde{r;\tilde{\Pi}_1 \cdot s;\tilde{\Pi}_2}$	Ax. (3)
	$= \widetilde{r;\tilde{\Pi}_1} \cdot \widetilde{s;\tilde{\Pi}_2}$	4.1 (c)
	$= \tilde{\tilde{\Pi}}_1;\tilde{r} \cdot \tilde{\tilde{\Pi}}_2;\tilde{s}$	4.1 (b)
	$= \Pi_1;\tilde{r} \cdot \Pi_2;\tilde{s}$	4.1 (d)
	$= \Pi_1;\tilde{r};1 \cdot \Pi_2;\tilde{s};1$	CA12
	$= \Pi_1;\tilde{r};\tilde{1} \cdot \Pi_2;\tilde{s};\tilde{1}$	C5
	$= (\Pi_1;\tilde{r} \nabla \Pi_2;\tilde{s});\ \widetilde{1 \nabla 1}$	Ax. (2)
	$= (\tilde{r} \otimes \tilde{s});\ \tilde{2}$	Def. $\otimes$

Prueba de (f):

$\widetilde{r \otimes s}$	$= \widetilde{(\Pi_1;r \nabla \Pi_2;s)}$	def. $\otimes$
	$= \widetilde{(\Pi_1;r;\tilde{\Pi}_1 \cdot \Pi_2;s;\tilde{\Pi}_2)}$	Ax. (3)
	$= (\widetilde{\Pi_1;r;\tilde{\Pi}_1} \cdot \widetilde{\Pi_2;s;\tilde{\Pi}_2})$	4.1 (c)
	$= (\tilde{\tilde{\Pi}}_1;\tilde{r};\tilde{\Pi}_1 \cdot \tilde{\tilde{\Pi}}_2;\tilde{s};\tilde{\Pi}_2)$	4.1 (b)
	$= (\Pi_1;\tilde{r};\tilde{\Pi}_1 \cdot \Pi_2;\tilde{s};\tilde{\Pi}_2)$	4.1 (d)
	$= (\Pi_1;\tilde{r} \nabla \Pi_2;\tilde{s})$	Ax. (3)
	$= \tilde{r} \otimes \tilde{s}$	def. $\otimes$

(g) Ver [SS 85]

Prueba de (h):

$\tilde{\infty}$	$= \widetilde{\overline{0}}$	B.A.P.
	$= \overline{\tilde{0}}$	4.1 (g)
	$= \overline{0}$	C5
	$= \infty$	B.A.P.

Q.E.D.

4.5 Algunos resultados preliminares

En esta sección se presentan algunas propiedades que junto con los axiomas de Tarski y del cálculo extendido son ladrillos para las pruebas de este capítulo. Se los divide en dos grupos:

(a) propiedades del cálculo de Tarski

(b) propiedades de las operaciones estructurales.

Se presentan propiedades que reflejan el hecho de que una relación contenida en la identidad se comporta como una diagonal: cabe preguntarse si son derivables a partir de los axiomas de Tarski. De no serlo se propone que sean consideradas como axiomas. Estas son:

4.2 (g) $r \subset 1 \Rightarrow r = r;r$

4.2 (k) $r \subset 1 \Rightarrow r = \tilde{r}$

Proposición 4.2: Se tienen las propiedades:

(a) $(r \subset s) \Rightarrow (q;r \subset q;s)$
    $(r \subset s) \Rightarrow (r;q \subset s;q)$

(b) $(q \cdot r;\infty);\ s = q;s \cdot r;\infty$

(c) $(q \cdot \widetilde{r;\infty});\ s = q;\ (s \cdot r;\infty)$

(d) $r;\ (s \cdot t) \subset (r;s) \cdot (r;t)$
    $(s \cdot t);\ r \subset (s;r) \cdot (t;r)$

(e) $dom(r);\ r = r$

(f) $r;\ cod(r) = r$

(h) $r, s \subset 1 \Rightarrow r;s = r \cdot s$

(i) $r \subset 1 \Leftrightarrow dom(r) = r \Leftrightarrow cod(r) = r$

(j) $r, s \subset 1 \wedge cod(t) \subset dom(r) \Rightarrow t;\ r \cdot s = t;\ s$

(l) $dom(\tilde{r}) = cod(r)$

(m) $dom(r;s) = dom(r;dom(s))$

(n) $det(r) \Rightarrow r;(s \cdot t) = (r;s \cdot r;t)$

(o) $\overline{r \cdot s} = r \cdot \overline{s} + \overline{r} \cdot s + \overline{r} \cdot \overline{s}$

(p) $r+s = r \cdot s + r \cdot \overline{s} + s \cdot \overline{r}$

Prueba:

Prueba de (a):

$s = s+r$	$r \subset s$
$q;s = q;(s+r) = q;s + q;r$	C8
$s;q = (s+r);q = s;q + r;q$	C12

(b) y (c) son resultados conocidos del cálculo de relaciones binarias de Tarski.

Prueba de (d):

$$
\begin{array}{ll}
r;(s \cdot t) \subset r;s & 4.2\ (a) \\
r;(s \cdot t) \subset r;t & 4.2\ (a) \\
r;(s \cdot t) \subset (r;s \cdot r;t) & B.A.P.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(s \cdot t);r \subset s;r & 4.2\ (a) \\
(s \cdot t);r \subset t;r & 4.2\ (a) \\
(s \cdot t);r \subset s;r \cdot t;r & B.A.P.
\end{array}
$$

Prueba de (e):

$$
\begin{array}{ll}
1 \subset \infty & CA6 \\
r;\ 1 \subset r;\ \infty & 4.2\ (a) \\
r \subset r;\ \infty & CA12
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
(1 \cdot (r;\infty));\ r & = & 1;r \cdot r;\infty & 4.2\ (b) \\
 & = & r \cdot r;\infty & CA12 \\
 & = & r &
\end{array}
$$

Prueba de (f):

$$
\begin{array}{rcll}
r;\ (\infty;r \cdot 1) & = & \widetilde{\widetilde{r;\ (\infty;r \cdot 1)}} & CA9 \\
 & = & \widetilde{\widetilde{(\infty;r \cdot 1)};\ \widetilde{r}} & 4.1\ (b) \\
 & = & \widetilde{(\widetilde{\infty;r} \cdot \widetilde{1});\ \widetilde{r}} & 4.1\ (c) \\
 & = & \widetilde{(\widetilde{r};\widetilde{\infty} \cdot \widetilde{1});\ \widetilde{r}} & 4.1\ (b) \\
 & = & \widetilde{(\widetilde{r};\widetilde{\infty} \cdot 1);\ \widetilde{r}} & C5 \\
 & = & \widetilde{(\widetilde{r};\infty \cdot 1);\ \widetilde{r}} & 4.1\ (h) \\
 & = & \widetilde{\widetilde{r}} & 4.2\ (e) \\
 & = & r & CA9
\end{array}
$$

Prueba de (h):

$r;s \subset r;1 = r$	$s\subset 1$ y 4.2 (a)
$r;s \subset 1;s = s$	$r\subset 1$ y 4.2 (a)
$r;s \subset r\cdot s$	B.A.P.

Para la otra inclusión se probará:

$t \subset r \wedge t \subset s \Rightarrow t \subset r;s$

$t \subset 1$	B.A.P.
$t = t;t$	4.2 (g)
$t;t \subset r;t$	$t\subset r$ y 4.2 (a)
$r;t \subset r;s$	$t\subset s$ y 4.2 (a)
$t \subset r;s$	B.A.P.

Prueba de (i):

$(r;\infty \cdot 1);r = (r;\infty \cdot 1) \cdot r$	4.2 (h)
$= r;\infty \cdot (1 \cdot r)$	B.A.P.
$= r;\infty \cdot r$	$r \subset 1$
$= r$	Ver 4.2 (e)

$r;(\infty;r \cdot 1) = r \cdot (\infty;r \cdot 1)$	4.2 (h)
$= (r \cdot 1) \cdot \infty;r$	B.A.P.
$= r \cdot \infty;r$	$r \subset 1$
$= r$	
$r = 1;r \subset \infty;r$	CA12 y 4.2 (a)

Prueba de (j):

$t;(r\cdot s) = t;cod(t);(r\cdot s)$	4.2 (f)
$= t;(cod(t)\cdot(r\cdot s))$	$r\cdot s \subset 1$ y 4.2 (h)
$= t;((cod(t)\cdot r)\cdot s)$	B.A.P.
$= t;((cod(t)\cdot dom(r))\cdot s)$	$r\subset 1$ y 4.2 (i)
$= t;(cod(t)\cdot s)$	hip.
$= t;(cod(t);s)$	$s\subset 1$ y 4.2 (h)
$= t;s$	4.2 (f)

Prueba de (l):

$dom(\tilde{r}) = \widetilde{dom(\tilde{r})}$	4.2 (k)
$= \widetilde{(\tilde{r};\infty)\cdot 1}$	Def. *dom*
$= \widetilde{(\tilde{r};\infty)} \cdot \tilde{1} = (\tilde{\infty};\tilde{\tilde{r}}) \cdot \tilde{1}$	4.1 (c) y (b)
$= (\infty;r) \cdot 1$	CA9 y 4.1 (h)
$= cod(r)$	Def. *cod*

Prueba de (m):

$$
\begin{array}{lll}
\mathit{dom}(r;s) & = (r;s);\infty \cdot 1 & \text{Def. } \mathit{dom} \\
& = (r;(s;\infty)) \cdot 1 & \text{CA11} \\
& = (r;(s;\infty \cdot \infty)) \cdot 1 & \text{CA6} \\
& = (r;(s;\infty \cdot 1;\infty)) \cdot 1 & \text{CA12} \\
& = (r;((s;\infty \cdot 1);\infty)) \cdot 1 & \text{4.2 (b)} \\
& = ((r;(s;\infty \cdot 1));\infty) \cdot 1 & \text{CA11} \\
& = \mathit{dom}(r;\mathit{dom}(s)) & \text{Def. } \mathit{dom}
\end{array}
$$

Prueba de (n):

$$
\begin{array}{lll}
(r;\tilde{r});\ ((r;s)\cdot(r;t)) & = r;\ (\tilde{r};((r;s)\cdot(r;t))) & \text{CA11} \\
& \subset r;\ ((\tilde{r};(r;s))\cdot(\tilde{r};(r;t))) & \text{4.2 (d)} \\
r;((\tilde{r};(r;s))\cdot(\tilde{r};(r;t))) & = r;(((\tilde{r};r);s)\cdot((\tilde{r};r);t)) & \text{CA11} \\
& \subset r;((1;s)\cdot(1;t)) & \text{B.A.P y } \mathit{det} \\
r;\ ((1;s)\cdot(1;t)) & = r;\ (s\cdot t) & \text{CA12} \\
(r;\tilde{r});\ ((r;s)\cdot(r;t)) & \subset r;\ (s\cdot t) & \text{Tran. } \subset
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
r;\tilde{r} & = \mathit{dom}(r;\tilde{r}) & \mathit{det}(r) \text{ y 4.2 (l)} & \\
& = \mathit{dom}(r;\mathit{dom}(\tilde{r})) & \text{4.2 (m)} & \\
& = \mathit{dom}(r;\mathit{cod}(r)) & \text{4.2 (l)} & \\
& = \mathit{dom}(r) & \text{4.2 (f)} & (*)
\end{array}
$$

$$\mathit{dom}((r;s)\cdot(r;t)) \subset \mathit{dom}((r;s)) \subset \mathit{dom}(r) \quad \text{B.A.P.} \quad (**)$$

$$
\begin{array}{ll}
(r;\tilde{r});\ ((r;s)\cdot(r;t)) = \mathit{dom}(r);\ ((r;s)\cdot(r;t)) & \text{por } (*) \\
= \mathit{dom}(r);\ (\mathit{dom}((r;s)\cdot(r;t));\ ((r;s)\cdot(r;t))) & \text{4.2 (e), CA11} \\
= (\mathit{dom}(r)\cdot\mathit{dom}((r;s)\cdot(r;t)));\ ((r;s)\cdot(r;t)) & \text{4.2 (h)} \\
= \mathit{dom}((r;s)\cdot(r;t));\ ((r;s)\cdot(r;t)) & \text{por } (**) \\
= ((r;s)\cdot(r;t)) & \text{4.2 (e)}
\end{array}
$$

Prueba de (o):

$$
\begin{array}{ll}
r\cdot s \cdot (r\cdot\overline{s} + \overline{r}\cdot s + \overline{r}\cdot\overline{s}) = (r\cdot s \cdot r\cdot\overline{s}) + (r\cdot s \cdot \overline{r}\cdot s) + & \\
\qquad (r\cdot s \cdot \overline{r}\cdot\overline{s}) & \text{CA3} \\
\qquad = 0 & \text{B.A.P. y CA5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
r\cdot s + r\cdot\overline{s} + \overline{r}\cdot s + \overline{r}\cdot\overline{s} = r\cdot(s+\overline{s}) + \overline{r}\cdot(s+\overline{s}) & \text{CA3} \\
\qquad = r\cdot\infty + \overline{r}\cdot\infty = (r+\overline{r})\cdot\infty = \infty\cdot\infty = \infty & \text{CA7 y CA3}
\end{array}
$$

Prueba de (p):

$\overline{r+s} = \overline{r}\cdot\overline{s}$ B.A.P.

$r\cdot s + r\cdot\overline{s} + s\cdot\overline{r} + \overline{r}\cdot\overline{s} = [r\cdot(s+\overline{s})] + [(s+\overline{s})\cdot\overline{r}]$ CA3 y CA4

$= (r\cdot\infty)+(\infty\cdot\overline{r}) = r+\overline{r} = \infty$ CA6 y CA7

$[r\cdot s + r\cdot\overline{s} + s\cdot\overline{r}] \cdot \overline{r}\cdot\overline{s} = 0$ B.A.P.

Q.E.D.

Las siguientes son propiedades preliminares para las operaciones estructurales del lenguaje.

Observar que las propiedades (a), (b) y (c) son del teorema de representación. Las propiedades (e), (f), (g), (h), (i) sirven para probar las propiedades distributivas que cumplen las operaciones estructurales.

Proposición 4.3:

(a) $r;(s\nabla t) \subset (r;s)\nabla(r;t)$
(b) $r\subset s \wedge t\subset q \Rightarrow r\nabla t \subset s\nabla q$
(c) $r\subset s \wedge t\subset q \Rightarrow r\otimes t \subset s\otimes q$
(d) $(r\nabla 0) = (0\nabla r) = 0$
(e) $det(r) \Rightarrow (r;(1\nabla 1) = (r\nabla r))$
(f) $((r\cdot t);\tilde{\Pi}_1) = (r;\tilde{\Pi}_1) \cdot (t;\tilde{\Pi}_1)$
(g) $((s\cdot q);\tilde{\Pi}_2) = (s;\tilde{\Pi}_2) \cdot (q;\tilde{\Pi}_2)$
(h) $\Pi_1;(s\cdot t) = (\Pi_1;s) \cdot (\Pi_1;t)$
(i) $\Pi_2;(s\cdot t) = (\Pi_2;s) \cdot (\Pi_2;t)$

Prueba:

Prueba de (a):

$r;(s\nabla t) = r;(s;\tilde{\Pi}_1 \cdot t;\tilde{\Pi}_2)$ Ax. (3)

$\subset (r;(s;\tilde{\Pi}_1)) \cdot (r;(t;\tilde{\Pi}_2))$ 4.2 (d)

Prueba de (b):

$r;\tilde{\Pi}_1 \subset s;\tilde{\Pi}_1$ 4.2 (a)

$t;\tilde{\Pi}_2 \subset q;\tilde{\Pi}_2$ 4.2 (a)

$(r;\tilde{\Pi}_1);(t;\tilde{\Pi}_2) \subset (s;\tilde{\Pi}_1);(t;\tilde{\Pi}_2)$ 4.2 (a)

$(s;\tilde{\Pi}_1);(t;\tilde{\Pi}_2) \subset (s;\tilde{\Pi}_1);(q;\tilde{\Pi}_2)$ 4.2 (a)

$(r;\tilde{\Pi}_1);(t;\tilde{\Pi}_2) \subset (s;\tilde{\Pi}_1);(q;\tilde{\Pi}_2)$ 4.2 (a)

$r\nabla t \subset s\nabla q$ Reemplazo según ax. (3)

Prueba de (c):

$\Pi_1 ; r \subset \Pi_1 ; s$	4.2 (a)
$\Pi_2 ; t \subset \Pi_2 ; q$	4.2 (a)
$r \otimes t = \Pi_1 ; r \nabla \Pi_2 ; t \subset \Pi_1 ; s \nabla \Pi_2 ; q = s \otimes q$	4.3 (b)

Prueba de (d)

$(r \nabla 0) = (r ; \tilde{\Pi}_1) \cdot (0 ; \tilde{\Pi}_2)$	Ax. (3)
$\quad = (r ; \tilde{\Pi}_1) \cdot 0$	C13
$\quad = 0$	B.A.P.

Prueba de (e):

$r ; (1 \nabla 1) = r ; (1 ; \tilde{\Pi}_1 \cdot 1 ; \tilde{\Pi}_2)$	Ax. (3)
$\quad = r ; 1 ; \tilde{\Pi}_1 \cdot r ; 1 ; \tilde{\Pi}_2$	*det*(r) y 4.2 (d)
$\quad = r ; \tilde{\Pi}_1 \cdot r ; \tilde{\Pi}_2$	CA12
$\quad = (r \nabla r)$	Ax. (3)

Prueba de (f):

$((r \cdot t) ; \tilde{\Pi}_1) = (r \nabla t) ; \widetilde{(1 \nabla 1)} ; \tilde{\Pi}_1$	ax. (2)
$\quad = (r \nabla t) ; \widetilde{\Pi_1 ; (1 \nabla 1)}$	4.1 (b)
$\quad = (r \nabla t) ; \widetilde{(\Pi_1 \nabla \Pi_1)}$	4.3 (e)
$\quad = (r ; \tilde{\Pi}_1) \cdot (t ; \tilde{\Pi}_1)$	ax. (2)

Prueba de (g): Similar a (f).

Prueba de (h):

$\Pi_1 ; (s \cdot t) = \widetilde{\widetilde{\Pi_1 ; (s \cdot t)}}$	CA9
$\quad = \widetilde{\widetilde{(s \cdot t)} ; \tilde{\Pi}_1}$	4.1 (b)
$\quad = \widetilde{(\tilde{s} \cdot \tilde{t}) ; \Pi_1}$	4.1 (d)
$\quad = \widetilde{(\tilde{s} ; \tilde{\Pi}_1) \cdot (\tilde{t} ; \tilde{\Pi}_1)}$	4.3 (f)
$\quad = \widetilde{(\tilde{s} ; \tilde{\Pi}_1)} \cdot \widetilde{(\tilde{t} ; \tilde{\Pi}_1)}$	4.1 (d)

$$= (\tilde{\tilde{\Pi}}_1 ; \tilde{\tilde{s}}) \cdot (\tilde{\tilde{\Pi}}_1 ; \tilde{\tilde{t}}) \qquad \text{4.1 (b)}$$

$$= (\Pi_1 ; s) \bullet (\Pi_1 ; t) \qquad \text{CA9}$$

Prueba de (i): Similar a (h).

Q.E.D.

4.6 Simplificación de términos

Eliminación de ∇ mediante proyecciones

Proposición 4.4: De los axiomas se derivan:

(a) $\mathit{dom}(r) \subseteq \mathit{dom}(s) \Rightarrow (r \nabla s) ; \Pi_1 = r$
(b) $\mathit{dom}(s) \subseteq \mathit{dom}(r) \Rightarrow (r \nabla s) ; \Pi_2 = s$
(c) $\mathit{cod}(t) \subseteq \mathit{dom}(s) \Rightarrow t ; (r \nabla s) ; \Pi_1 = t ; r$
(d) $\mathit{cod}(t) \subseteq \mathit{dom}(r) \Rightarrow t ; (r \nabla s) ; \Pi_2 = t ; s$

Prueba:

Prueba de (a):

$$(r \nabla s) ; \Pi_1 = r ; \tilde{1} \bullet s ; \tilde{\infty} \qquad \text{Ax. (2)}$$

$$= r ; 1 \bullet s ; \tilde{\infty} \qquad \text{C5}$$

$$= r \bullet s ; \tilde{\infty} \qquad \text{CA12}$$

$$= r \bullet s ; \infty \qquad \text{4.1 (h)}$$

$$r = (1 \bullet (r ; \infty)) ; r \qquad \text{4.2 (e)}$$
$$\subset (1 \bullet (s ; \infty)) ; r \qquad \text{hip y 4.2 (a)}$$
$$(1 \bullet (s ; \infty)) ; r = 1 ; r \bullet s ; \infty \qquad \text{4.2 (b)}$$
$$= r \bullet s ; \infty \qquad \text{CA12}$$
$$\subset r \qquad \text{B.A.P.}$$

Así: $r \bullet s ; \infty = r$

Prueba de (b): Similar a (a)

Prueba de (c):

$$t ; (r \nabla s) ; \Pi_1 = t ; (r ; \tilde{1} \bullet s ; \tilde{\infty}) \qquad \text{Ax. (2)}$$

$$= t ; (r ; 1 \bullet s ; \tilde{\infty}) \qquad \text{C5}$$

$$= t ; (r \bullet s ; \tilde{\infty}) \qquad \text{CA12}$$

$$= t ; (r \bullet s ; \infty) \qquad \text{4.1 (h)}$$

$$\subset t ; r \qquad \text{B.A.P.}$$

$$
\begin{array}{ll}
t = t;\ (\infty;t \bullet 1) & \text{4.2 (f)} \\
\quad \subset t;\ (s;\infty \bullet 1) & \text{hip. 4.2 (a)} \\
t;\ r \subset t;\ (s;\infty \bullet 1);\ r & \text{4.2 (a)} \\
 & \\
t;\ (s;\infty \bullet 1);\ r = t;\ (s;\infty \bullet r) & \text{4.2 (b)} \\
\qquad\qquad\qquad = t;\ (r \nabla s);\ \Pi_1 &
\end{array}
$$

Prueba de (d): Similar a (c).

Q.E.D.

Eliminación de $\otimes$ mediante proyecciones

En general eliminar $\otimes$ mediante proyecciones exige condiciones demasiado fuertes sobre las relaciones que intervienen tales como la totalidad de una de las relaciones afectadas por el $\otimes$; hecho que rara vez se da; salvo en algunos casos particulares (i. e. cuando se trabaja con puntos, vectores, 1, ∞, etc.). En muchos casos no se elimina el $\otimes$ sino que se simplifican las relaciones que afecta.

Proposición 4.5:

(a) $tot(s) \Rightarrow (r\otimes s);\ \Pi_1 = \Pi_1;\ r$

(b) $tot(r) \Rightarrow (r\otimes s);\ \Pi_2 = \Pi_2;\ s$

(c) $(r\otimes s);\ \Pi_1 = (1 \otimes dom(s));\ \Pi_1;\ r$

(d) $(r\otimes s);\ \Pi_2 = (dom(r) \otimes 1);\ \Pi_2;\ s$

(e) $\tilde{\Pi}_1;\ (r\otimes 1) = r;\ \tilde{\Pi}_1$

Prueba:

Prueba de (a):

$$
\begin{array}{ll}
(r\otimes s);\ \Pi_1 = (\Pi_1;r \ \nabla\ \Pi_2;s);\ \Pi_1 & \text{Def. } \otimes \\
\qquad = (\Pi_1;r;\tilde{1} \bullet \Pi_2;s;\tilde{\infty}) & \text{Ax. (2)} \\
\qquad = (\Pi_1;r;1 \bullet \Pi_2;s;\infty) & \text{4.1 (h) y C5} \\
\qquad = (\Pi_1;r;1 \bullet \Pi_2;\infty) & tot(s) \\
\qquad = (\Pi_1;r \bullet \Pi_2;\infty) & \text{CA12} \\
\qquad = (\Pi_1 \bullet \Pi_2;\infty);\ r & \text{4.2 (b)} \\
 & \\
\qquad = \widetilde{\widetilde{(\Pi_1 \bullet \Pi_2;\infty)}};\ r & \text{CA9}
\end{array}
$$

$= \widetilde{(\tilde{\Pi}_1 \bullet \widetilde{\Pi_2 ;\infty})}; \; r$	4.1 (c)
$= \widetilde{(\tilde{\Pi}_1 \bullet \tilde{\infty};\tilde{\Pi}_2)}; \; r$	4.1 (d)
$= \widetilde{(\tilde{\Pi}_1 \bullet \infty;\tilde{\Pi}_2)}; \; r$	4.1 (h)
$= \widetilde{(1;\tilde{\Pi}_1 \bullet \infty;\tilde{\Pi}_2)}; \; r$	CA12
$= \widetilde{(1\nabla\infty)}; \; r = \Pi_1 ; \; r$	Def. Π_1 y Ax. (3)

Prueba de (b): Similar a (a).

Prueba de (c):

$(1 \otimes dom(s)); \Pi_1; \; r$	$= (\Pi_1 ; 1 \nabla \Pi_2 ;dom(s)); \Pi_1 ; \; r$	Def $\otimes$
	$= (\Pi_1 ; 1 ; \tilde{1} \bullet \Pi_2 ;dom(s);\tilde{\infty}); \; r$	Ax. (2)
	$= (\Pi_1 ; 1 ; 1 \bullet \Pi_2 ;dom(s);\infty); \; r$	4.1 (h) y C5
	$= (\Pi_1 \bullet \Pi_2 ;dom(s);\infty); \; r$	CA12
	$= (\Pi_1 ; r \bullet \Pi_2 ;dom(s);\infty)$	4.2 (b)
	$= (\Pi_1 ; r \bullet \Pi_2 ;(s;\infty \bullet 1);\infty)$	Def *dom*
	$= (\Pi_1 ; r \bullet \Pi_2 ;(s;\infty \bullet \infty))$	4.2 (b)
	$= (\Pi_1 ; r \bullet \Pi_2 ; s;\infty)$	B.A.P.
	$= (\Pi_1 ; r \nabla \Pi_2 ; s); \; \widetilde{(1\nabla\infty)}$	Ax. (2)
	$= (r\otimes s); \; \Pi_1$	Def. $\otimes$

Prueba de (d): Similar a (a).

Prueba de (e):

$\tilde{\Pi}_1 ; \; (r\otimes 1) = \widetilde{\widetilde{\tilde{\Pi}_1 ; \; (r\otimes 1)}} = \widetilde{\widetilde{(r\otimes 1)}; \; \widetilde{\tilde{\Pi}_1}}$	CA9 y 4.1 (b)
$= \widetilde{(\tilde{r}\otimes\tilde{1}); \; \Pi_1} = \widetilde{(\tilde{r}\otimes 1); \; \Pi_1}$	CA9, C5 y 4.1 (f)
$= \widetilde{\Pi_1 ; \; \tilde{r}} = \tilde{\tilde{r}}; \; \tilde{\Pi}_1 = r ; \; \tilde{\Pi}_1$	4.5 (a), 4.1 (b) y CA9

Q.E.D.

Eliminación de conversas de proyecciones

Generalmente la imagen de la conversa de una proyección es demasiado grande para las necesidades de un problema particular. Además es conveniente eliminar la conversa de una proyección para acercarse a un programa (eliminando: cuantificación existencial, definiciones por comprensión, etc).

Proposición 4.6:

(a) $(\mathit{cod}(D \nabla r) = \mathit{dom}(t)) \wedge (s,t,D \subset 1) \Rightarrow ((D\nabla r);s \subset \tilde{\Pi}_1;t;s)$

(b) $(\mathit{cod}(r \nabla D) = \mathit{dom}(t)) \wedge (s,t,D \subset 1) \Rightarrow ((r\nabla D);s \subset \tilde{\Pi}_2;t;s)$

Prueba:

(a) $(D\nabla r);\ s = (D\nabla r);\ \mathit{cod}(D\nabla r);\ s$	4.2 (f)
$\qquad = (D\nabla r);\ \mathit{dom}(t);\ s$	hip.
$\qquad = (D\nabla r);\ t;\ s$	$t \subset 1$ y 4.2 (i)
$D \subset 1 \wedge r \subset \infty \Rightarrow (D\nabla r) \subset (1\nabla\infty)$	4.3 (b)
$(D\nabla r) \subset (1\nabla\infty)$	M.P. hip.
$(D\nabla r);\ t;\ s \subset (1\nabla\infty);\ t;\ s$	4.2 (a)

(b) Similar a (a).

Q.E.D.

Entonces el problema de eliminar la conversa de una proyección se reduce a encontrar un r ápropiado. (a veces esta relación es un término que involucra a la clausura transitiva de otra relación).

Eliminación de la intersección de relaciones

En [HVB 92] se habla de la conveniencia de reescribir la intersección de relaciones mediante otras expresiones más eficientes. Allí se prueba la fórmula:

$$((r = D;t;E) \wedge (D;s;E \leq D;t;E) \wedge (D,E \subset 1)) \Rightarrow (r \circ s = D;s;E)$$

El axioma (2) permite eliminar la $\circ$ mediante la introducción del ∇:

$$(r \nabla s);\ \tilde{2} = (r \nabla s);\ \widetilde{(1\nabla 1)} = (r;\tilde{1}) \circ (s;\tilde{1}) = r \circ s$$

Dos propiedades útiles cuando se tiene la intersección de dos identidades son (Ver 4.2 (g)):

$$r, s \subset 1 \Rightarrow r ; s = r \bullet s$$

$$r, s \subset 1 \wedge cod(t) \subset dom(r) \Rightarrow t ; r \bullet s = t ; s$$

4.7 Reorganización de Términos

Generalmente se trata de propiedades distributivas; las cuales son usualmente pasos previos a simplificaciones.

Proposición 4.7: Se tienen las siguientes propiedades distributivas:

(a) $(r + s) \bullet t = (r \bullet t) + (s \bullet t)$
(b) $(r \bullet s) + t = (r + t) \bullet (s + t)$
(c) $(r + s) ; t = (r ; t) + (s ; t)$
(d) $r ; (s + t) = (r ; s) + (r ; t)$
(e) $(r + s) \nabla t = (r \nabla t) + (s \nabla t)$
(f) $r \nabla (s + t) = (r \nabla s) + (r \nabla t)$
(g) $(r + s) \otimes t = (r \otimes t) + (s \otimes t)$
(h) $r \otimes (s + t) = (r \otimes s) + (r \otimes t)$
(i) $(p \nabla q) ; (r \otimes s) = (p ; r) \nabla (q ; s)$
(j) $Det(t) \Rightarrow t ; (p \nabla q) = (t ; p) \nabla (t ; q)$
(k) $(r \nabla s) \bullet (t \nabla q) = (r \bullet t) \nabla (s \bullet q)$
(l) $r \nabla (s \bullet t) = (r \nabla s) \bullet (r \nabla t)$
(m) $(r \otimes s) ; (t \otimes q) = (r ; t) \otimes (s ; q)$
(n) $r \otimes (s \bullet t) = (r \otimes s) \bullet (r \otimes t)$
(o) $(s \bullet t) \otimes r = (s \otimes r) \bullet (t \otimes r)$
(p) $\overline{(r \nabla s)} = \overline{(\infty \nabla \infty)} + (\overline{r} \nabla s) + (r \nabla \overline{s}) + (\overline{r} \nabla \overline{s})$
(q) $\overline{(r \otimes s)} = \overline{(\infty \otimes \infty)} + (\overline{r} \otimes s) + (r \otimes \overline{s}) + (\overline{r} \otimes \overline{s})$

Prueba:

(a) CA3
(b) CA4
(c) C8
(d) C12

Prueba de (e):

$(r + s) \nabla t$	$= ((r+s) ; \tilde{\Pi}_1) \bullet (t ; \tilde{\Pi}_2)$	ax. (3)
	$= (r ; \tilde{\Pi}_1 + s ; \tilde{\Pi}_1) \bullet (t ; \tilde{\Pi}_2)$	4.7 (c)
	$= (r ; \tilde{\Pi}_1 \bullet t ; \tilde{\Pi}_2) + (s ; \tilde{\Pi}_1 \bullet t ; \tilde{\Pi}_2)$	4.7 (a)
	$= (r \nabla t) + (s \nabla t)$	ax. (3)

Prueba de (f): similar a (e).

Prueba de (g):

$$\begin{aligned}
(r + s) \otimes t &= (\Pi_1;(r+s) \nabla \Pi_2;t) && \text{def. } \otimes \\
&= ((\Pi_1;r + \Pi_1;s) \nabla \Pi_2;t) && 4.7\ (c) \\
&= (\Pi_1;r \nabla \Pi_2;t) + (\Pi_1;s \nabla \Pi_2;t) && 4.7\ (e) \\
&= (r \otimes t) + (s \otimes t) && \text{def. } \otimes
\end{aligned}$$

Prueba de (h): Similar a (g).

Prueba de (i):

$$\begin{aligned}
(p;r) \nabla (q;s) &= p;r;\tilde{\Pi}_1 \bullet q;s;\tilde{\Pi}_2 && \text{Ax. (3)} \\
&= p;\widetilde{\Pi_1;\tilde{r}} \bullet q;\widetilde{\Pi_2;\tilde{s}} && 4.1\ (b) \text{ y CA9} \\
&= (p\nabla q);\ \widetilde{(\Pi_1;\tilde{r} \nabla \Pi_2;\tilde{s})} && \text{Ax. (2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p\nabla q);\ (r\otimes s) &= (p\nabla q);\ (\Pi_1;r;\tilde{\Pi}_1 \bullet \Pi_2;s;\tilde{\Pi}_2) && \text{Def. } \otimes \text{ y Ax. (3)} \\
&= (p\nabla q);\ (\Pi_1;\widetilde{\Pi_1;\tilde{r}} \bullet \Pi_2;\widetilde{\Pi_2;\tilde{s}}) && 4.1\ (b) \text{ y CA9} \\
&= (p\nabla q);(\Pi_1\nabla\Pi_2);\ \widetilde{(\Pi_1;\tilde{r} \nabla \Pi_2;\tilde{s})} && \text{Ax. (2)}
\end{aligned}$$

Basta probar: $(p\nabla q);\ (\Pi_1\nabla\Pi_2) = (p\nabla q)$

$$\begin{aligned}
(p\nabla q) &= p;\tilde{\Pi}_1 \bullet q;\tilde{\Pi}_2 = (p\nabla q);\ \widetilde{(\Pi_1\nabla\Pi_2)} && \text{Ax. (3) y (2)} \\
&= (p\nabla q);\ (\Pi_1\nabla\Pi_2) && 4.2\ (k) \text{ y Ax. (1)}
\end{aligned}$$

Prueba de (j):

$$\begin{aligned}
(t;\ p) \nabla (t;\ q) &= (t;p;\tilde{\Pi}_1 \bullet t;q;\tilde{\Pi}_2) && \text{Ax. (3)} \\
&= t;\ (p;\tilde{\Pi}_1 \bullet q;\tilde{\Pi}_2) && \mathit{det}(t) \text{ y } 4.2\ (n) \\
&= t;\ (p \nabla q) && \text{Ax. (3)}
\end{aligned}$$

Prueba de (k):

$$\begin{aligned}
(r\bullet t) \nabla (s\bullet q) &= ((r\bullet t);\ \tilde{\Pi}_1) \bullet ((s\bullet q);\ \tilde{\Pi}_2) && \text{Ax. (3)} \\
&= (r;\tilde{\Pi}_1)\bullet(t;\tilde{\Pi}_1) \bullet (s;\tilde{\Pi}_2)\bullet(q;\tilde{\Pi}_2) && 4.3\ (f,g) \\
&= (r;\tilde{\Pi}_1 \bullet s;\tilde{\Pi}_2) \bullet (t;\tilde{\Pi}_1 \bullet q;\tilde{\Pi}_2) && \text{B.A.P.} \\
&= (r\nabla s) \bullet (t\nabla q) && \text{Ax. (3)}
\end{aligned}$$

Prueba de (l):

$$(r \nabla s) \cdot (r \nabla t) = ((r;\breve{\Pi}_1)\cdot(s;\breve{\Pi}_2)) \cdot ((r;\breve{\Pi}_1)\cdot(t;\breve{\Pi}_2)) \quad \text{Ax. (3)}$$
$$= (r;\breve{\Pi}_1) \cdot ((s;\breve{\Pi}_2) \cdot (t;\breve{\Pi}_2)) \quad \text{B.A.P.}$$
$$= (r;\breve{\Pi}_1) \cdot ((s\cdot t);\breve{\Pi}_2) \quad 4.3\ (g)$$
$$= r \nabla (s \cdot t) \quad \text{Ax. (3)}$$

Prueba de (m):

$$(r \otimes s);(t \otimes q) = (\Pi_1;r \nabla \Pi_2;s);(t \otimes q) \quad \text{def. } \otimes$$
$$= (\Pi_1;r;t \nabla \Pi_2;s;q) \quad 4.7\ (i)$$
$$= (r;t \otimes s;q) \quad \text{def. } \otimes$$

Prueba de (n):

$$r \otimes (s \cdot t) = (\Pi_1;r) \nabla (\Pi_2;(s\cdot t)) \quad \text{def. } \otimes$$
$$= (\Pi_1;r;\breve{\Pi}_1) \cdot (\Pi_2;(s\cdot t);\breve{\Pi}_2) \quad \text{Ax. (3)}$$
$$= (\Pi_1;r;\breve{\Pi}_1) \cdot (\Pi_2;((s;\breve{\Pi}_2)\cdot(t;\breve{\Pi}_2))) \quad 4.3\ (g)$$
$$= (\Pi_1;r;\breve{\Pi}_1) \cdot (\Pi_2;s;\breve{\Pi}_2) \cdot (\Pi_2;t;\breve{\Pi}_2) \quad 4.3\ (i)$$
$$= (\Pi_1;r;\breve{\Pi}_1)\cdot(\Pi_2;s;\breve{\Pi}_2)\cdot(\Pi_1;r;\breve{\Pi}_1)\cdot(\Pi_2;t;\breve{\Pi}_2) \quad \text{B.A.P.}$$
$$= (\Pi_1;r \nabla \Pi_2;s) \cdot (\Pi_1;r \nabla \Pi_2;t) \quad \text{Ax. (3)}$$
$$= (r\otimes s) \cdot (r\otimes t) \quad \text{def. } \otimes$$

Prueba de (o): Similar a (n).

Prueba de (p)

$$\overline{(\infty\nabla\infty)} + (r\nabla s) + (\overline{r}\nabla s) + (r\nabla\overline{s}) + (\overline{r}\nabla\overline{s})$$
$$\overline{(\infty\nabla\infty)} + ((r+\overline{r})\nabla s) + ((r+\overline{r})\nabla\overline{s}) \quad 4.7\ (e)\ y\ (f)$$
$$\overline{(\infty\nabla\infty)} + (\infty\nabla s) + (\infty\nabla\overline{s}) \quad \text{CA7}$$
$$\overline{(\infty\nabla\infty)} + (\infty\nabla(s+\overline{s})) \quad 4.7\ (f)$$
$$\overline{(\infty\nabla\infty)} + (\infty\nabla\infty) \quad \text{CA7}$$
$$\infty \quad \text{CA7}$$

$$(\overline{(\infty\nabla\infty)} + (\overline{r}\nabla s) + (r\nabla\overline{s}) + (\overline{r}\nabla\overline{s})) \cdot (r\nabla s)$$
$$\overline{(\infty\nabla\infty)}\cdot(r\nabla s) + (\overline{r}\nabla s)\cdot(r\nabla s) + (r\nabla\overline{s})\cdot(r\nabla s) + (\overline{r}\nabla\overline{s})\cdot(r\nabla s))$$
CA3

$$\overline{(\infty\nabla\infty)}\cdot(r\nabla s) + ((\overline{r}\cdot r)\nabla s) + (r\nabla(\overline{s}\cdot s)) + ((\overline{r}\cdot r)\nabla(\overline{s}\cdot s))$$
4.7 (k) y (l)

$\overline{(\infty\nabla\infty)} \circ (r\nabla s) + (0\nabla s) + (r\nabla 0) + (0\nabla 0)$ B.A.P.

$\overline{(\infty\nabla\infty)} \circ (r\nabla s) + 0$ 4.3 (d)

0 B.A.P. y CA5

Prueba de (q)

$\overline{(\infty\otimes\infty)} + (r\otimes s) + (\overline{r}\otimes s) + (r\otimes\overline{s}) + (\overline{r}\otimes\overline{s})$

$\overline{(\infty\otimes\infty)} + ((r+\overline{r})\otimes s) + ((r+\overline{r})\otimes\overline{s})$ 4.7 (g) y (h)

$\overline{(\infty\otimes\infty)} + (\infty\otimes s) + (\infty\otimes\overline{s})$ CA7

$\overline{(\infty\otimes\infty)} + (\infty\otimes(s+\overline{s}))$ 4.7 (h)

$\overline{(\infty\otimes\infty)} + (\infty\otimes\infty)$ CA7

∞ CA7

$(\overline{(\infty\otimes\infty)} + (\overline{r}\otimes s) + (r\otimes\overline{s}) + (\overline{r}\otimes\overline{s})) \circ (r\otimes s)$

$\overline{(\infty\otimes\infty)} \circ (r\otimes s) + (\overline{r}\otimes s)\circ(r\otimes s) + (r\otimes\overline{s})\circ(r\otimes s) + (\overline{r}\otimes\overline{s})\circ(r\otimes s))$ CA3

$\overline{(\infty\otimes\infty)} \circ (r\otimes s) + ((\overline{r}\circ r)\otimes s) + (r\otimes(\overline{s}\circ s)) + ((\overline{r}\circ r)\otimes(\overline{s}\circ s))$ 4.7 (n,o)

$\overline{(\infty\otimes\infty)} \circ (r\otimes s) + (0\otimes s) + (r\otimes 0) + (0\otimes 0)$ B.A.P.

$\overline{(\infty\otimes\infty)} \circ (r\otimes s) + 0$ 4.3 (d)

0 B.A.P. y CA5

Q.E.D.

4.8 Propiedades para el cálculo de dominios y codominios

Son fórmulas útiles para calcular dominios y codominios de términos. Además muchas propiedades importantes para derivación de programas son válidas bajo condiciones que consisten en comparar dominios y codominios de distintos términos.

Proposición 4.8:

(a) $dom(r+s) = dom(r) + dom(s)$
(b) $dom(r\bullet s) \subset dom(r) \bullet dom(s)$
(c) $(r;s = 0) \Leftrightarrow (cod(r) \bullet dom(s) = 0)$
(d) $(r;s = 0) \Rightarrow cod(r) \subset dom(\overline{s})$
(e) $cod(r) \subset dom(s) \Rightarrow dom(r;s) = dom(r)$
(f) $dom(\breve{\Pi}_1) = dom(\breve{\Pi}_2) = 1$
(g) $dom(r\nabla s) = dom(r) \bullet dom(s)$
(h) $dom(\Pi_1) = dom(\Pi_2) = (1\otimes 1)$
(i) $dom(r\otimes s) = dom(r) \otimes dom(s)$
(j) $dom(\infty\otimes\infty) = (1\otimes 1)$
(k) $(r \subset \infty\otimes\infty) \Rightarrow (dom(\breve{\Pi}_1 ; r ; \Pi_1) = \breve{\Pi}_1 ; dom(r) ; \Pi_1)$

Prueba:

Prueba de (a):

$dom(r+s) = (r+s);\infty \cdot 1$	Def. *dom*
$= (r;\infty + s;\infty) \cdot 1$	4.7 (c)
$= (r;\infty \cdot 1 + s;\infty \cdot 1)$	4.7 (a)
$= dom(r) + dom(s)$	Def. *dom*

Prueba de (b):

$(r \cdot s) \subset r$	B.A.P.
$(r \cdot s);\infty \subset r;\infty$	4.2 (a)
$(r \cdot s);\infty \cdot 1 \subset r;\infty \cdot 1$	B.A.P.

Análogamente:

$(r \cdot s);\infty \cdot 1 \subset s;\infty \cdot 1$

Luego:

$(r \cdot s);\infty \cdot 1 \subset (r;\infty \cdot 1) \cdot (s;\infty \cdot 1)$	B.A.P.

Prueba de (c):

$cod(r) \cdot dom(s) = cod(r);\ dom(s)$	4.2 (h)
$= (\infty;r \cdot 1);\ (s;\infty \cdot 1)$	Def. *dom*, *cod*
$= ((\infty;r \cdot 1);\ s;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1)$	4.2 (n)
$\subset (\infty;r;s;\infty \cdot s;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1)$	4.2 (d)

$(\infty;r;s;\infty \cdot s;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1) = (\infty;0;\infty \cdot s;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1)$	si $r;s = 0$
$= (0 \cdot s;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1)$	C9 y C13
$= 0$	B.A.P.

$r;\ s = (r;\ cod(r));\ (dom(s);\ s)$	4.2 (e) y (f)
$= r;\ ((cod(r);\ dom(s));\ s)$	CA11
$= r;\ ((cod(r) \cdot dom(s));\ s)$	hip. y 4.2 (h)
$= r;\ (0;\ s) = 0$	C9 y C13

Prueba de (d):

$cod(r);\ dom(s) = (\infty;r \cdot 1);\ (s;\infty \cdot 1)$	Def. *dom*, *cod*
$= ((\infty;r \cdot 1);s;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1)$	4.2 (n)
$\subset (\infty;r;s;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1)$	4.2 (a) y B.A.P.

$(\infty;r;s;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1) = (\infty;0;\infty) \cdot (\infty;r \cdot 1)$	$r;s = 0$
$= 0 \cdot (\infty;r \cdot 1) = 0$	C9 y C13

$cod(r) = cod(r);\ 1 = cod(r);\ dom(\infty)$	CA12
$= cod(r);\ dom(s+\overline{s})$	CA7
$= cod(r);\ (dom(s) + dom(\overline{s}))$	4.8 (a)
$= cod(r);\ dom(s) + cod(r);\ dom(\overline{s})$	4.7 (c)
$= cod(r);\ dom(s) + cod(r) \cdot dom(\overline{s})$	4.2 (h)

$= 0 + cod(r) \cdot dom(\overline{s})$	
$= cod(r) \cdot dom(\overline{s})$	CA5

Prueba de (e):

$dom(r;s) = ((r;s);\infty) \cdot 1$	Def. *dom*
$\quad = (r;(s;\infty)) \cdot 1$	CA11
$\quad \subset dom(r)$	

En efecto:

$s;\infty \subset \infty$	CA6
$r;(s;\infty) \subset r;\infty$	4.2 (a)
$(r;(s;\infty)) \cdot 1 \subset (r;\infty) \cdot 1$	B.A.P.
$dom(r) = (r;\infty) \cdot 1$	Def. *dom*
$\quad = ((r;cod(r));\infty) \cdot 1$	4.2 (f)
$\quad \subset ((r;dom(s));\infty) \cdot 1$	hip. y 4.2 (a)
$((r;dom(s));\infty) \cdot 1 = dom(r;dom(s))$	Def. *dom*
$\quad = dom(r;s)$	4.2 (m)

Prueba de (f):

$(1\nabla\infty);\Pi_1 = 1$	4.4 (a)
$(1\nabla\infty);\Pi_1 \subset (1\nabla\infty);\infty$	4.2 (a)
Pero las fórmulas anteriores implican:	
$dom(\widetilde{\Pi_1}) = 1$	B.A.P.
Análogamente se prueba $dom(\widetilde{\Pi_2}) = 1$	

Prueba de (g):

$dom(r\nabla s) = (r\nabla s);\infty \cdot 1$	Def. *dom*
$\quad = (r;\widetilde{\Pi_1} \cdot s;\widetilde{\Pi_2});\infty \cdot 1$	Ax. (3)
$\quad \subset (r;\widetilde{\Pi_1};\infty) \cdot 1 \cdot (s;\widetilde{\Pi_2};\infty) \cdot 1$	4.2 (d)
$(r;\widetilde{\Pi_1};\infty) \cdot 1 \cdot (s;\widetilde{\Pi_2};\infty) \cdot 1 = (r;\infty) \cdot 1 \cdot (s;\infty) \cdot 1$	4.8 (e)
$\quad = dom(r) \cdot dom(s)$	Def. *dom*
$dom(r) \cdot dom(s) = (r;\infty) \cdot 1 \cdot (s;\infty) \cdot 1$	Def. *dom*
$\quad = ((r;\infty) \cdot (s;\infty)) \cdot 1$	B.A.P.
$\quad = ((r;\widetilde{\infty}) \cdot (s;\widetilde{\infty})) \cdot 1$	4.1 (h)
$\quad = ((r\nabla s);\widetilde{(\infty\nabla\infty)}) \cdot 1$	Ax. (2)
$((r\nabla s);\widetilde{(\infty\nabla\infty)}) \subset (r\nabla s);\infty$	4.2 (a)
$((r\nabla s);\widetilde{(\infty\nabla\infty)}) \cdot 1 \subset ((r\nabla s);\infty) \cdot 1$	B.A.P.

Prueba de (h):

$\Pi_1 = \widetilde{1 \nabla \infty} = \widetilde{1 ; \widetilde{\Pi_1} \cdot \infty ; \widetilde{\Pi_2}}$	Def. Π_1 y Ax. (3)
$= \widetilde{1 ; \widetilde{\Pi_1}} \cdot \widetilde{\infty ; \widetilde{\Pi_2}} = \widetilde{\widetilde{\Pi_1}} ; \widetilde{1} \cdot \widetilde{\widetilde{\Pi_2}} ; \widetilde{\infty}$	4.1 (b) y (c)
$= \Pi_1 ; \widetilde{1} \cdot \Pi_2 ; \widetilde{\infty}$	CA9
$= \Pi_1 \nabla \Pi_2 ; \widetilde{1 \nabla \infty} = \Pi_1 \nabla \Pi_2 ; \Pi_1$	Ax. (2) y Def. Π_1
$(\Pi_1 \nabla \Pi_2) ; \Pi_1 ; \infty \subset (\Pi_1 \nabla \Pi_2) ; \infty$	4.2 (a)
$(\Pi_1 ; \infty) \cdot 1 = ((\Pi_1 \nabla \Pi_2) ; \Pi_1 ; \infty) \cdot 1$	
$((\Pi_1 \nabla \Pi_2) ; \Pi_1 ; \infty) \cdot 1 \subset ((\Pi_1 \nabla \Pi_2) ; \infty) \cdot 1$	B.A.P.
$((\Pi_1 \nabla \Pi_2) ; \infty) \cdot 1 = \Pi_1 \nabla \Pi_2 = 1 \otimes 1$	Ax (1) y Def. $\otimes$
$1 \otimes 1 = \Pi_1 ; \widetilde{\Pi_1} \cdot \Pi_2 ; \widetilde{\Pi_2} \subset \Pi_1 ; \widetilde{\Pi_1} \subset \Pi_1 ; \infty$	B.A.P y 4.2 (a)
$1 \otimes 1 = ((1 \otimes 1) ; \infty) \cdot 1 \subset (\Pi_1 ; \infty) \cdot 1 = dom(\Pi_1)$	Ax. (1) y B.A.P.

Prueba de (i):

$dom(r \otimes s) = dom(\Pi_1 ; r \nabla \Pi_2 ; s)$	Def. $\otimes$
$= dom(\Pi_1 ; r) \cdot dom(\Pi_2 ; s)$	4.8 (g)
$= dom(\Pi_1 ; dom(r)) \cdot dom(\Pi_2 ; dom(s))$	4.2 (m)
$= dom(\Pi_1 ; dom(r) \nabla \Pi_2 ; dom(s))$	4.8 (g)
$= dom(dom(r) \otimes dom(s))$	Def. $\otimes$
$dom(r) \otimes dom(s) \subset 1 \otimes 1 \subset 1$	4.3 (c) y Ax. (1)
$dom(dom(r) \otimes dom(s)) = dom(r) \otimes dom(s)$	4.2 (i)

Prueba de (j):

$dom(\infty \otimes \infty) = dom((\Pi_1 ; \infty) \nabla (\Pi_2 ; \infty))$	Def. $\otimes$
$= dom(\Pi_1 ; \infty) \cdot dom(\Pi_2 ; \infty)$	4.8 (g)
$= dom(\Pi_1 ; dom(\infty)) \cdot dom(\Pi_2 ; dom(\infty))$	4.2 (m)
$= dom(\Pi_1 ; 1) \cdot dom(\Pi_2 ; 1) = dom(\Pi_1) \cdot dom(\Pi_2)$	4.8 (g)
$= (1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes 1) = (1 \otimes 1)$	4.9 (h)

Prueba de (k):

$dom(\widetilde{\Pi_1} ; r ; \Pi_1) = dom(\widetilde{\Pi_1} ; r ; dom(\Pi_1))$	4.2 (m)
$= dom(\widetilde{\Pi_1} ; r ; (1 \otimes 1)) = dom(\widetilde{\Pi_1} ; r)$	4.8 (e) y 4.2 (m)
$cod(r) \subset cod(\infty \otimes \infty) = (1 \otimes 1)$	4.8 (j)
$dom(r) \subset dom(\infty \otimes \infty) = (1 \otimes 1)$	B.A.P. y 4.1 (h)
$cod(dom(r)) \subset cod(1 \otimes 1) = (1 \otimes 1)$	B.A.P. y 4.8 (j)

$$\tilde{\Pi}_1 ;\ \mathit{dom}(r);\ \Pi_1 = \mathit{dom}(\tilde{\Pi}_1 ;\ \mathit{dom}(r);\ \Pi_1) \qquad 4.2\ (l)$$

$$= \mathit{dom}(\tilde{\Pi}_1 ;\ \mathit{dom}(r);\ (1 \otimes 1)) \qquad 4.2\ (m) \text{ y } 4.8\ (h)$$

$$= \mathit{dom}(\tilde{\Pi}_1 ;\ \mathit{dom}(r)) \qquad 4.8\ (e)$$

$$= \mathit{dom}(\tilde{\Pi}_1 ;\ r) \qquad 4.2\ (m)$$

Q.E.D.

Proposición 4.9: Se tienen las siguientes propiedades para el cálculo de codominios:

(a) $\mathit{cod}(\tilde{r}) = \mathit{dom}(r)$

(b) $\mathit{cod}(r+s) = \mathit{cod}(r) + \mathit{cod}(s)$

(c) $\mathit{cod}(r \cdot s) \subset \mathit{cod}(r) \cdot \mathit{cod}(s)$

(d) $\mathit{cod}(r;s) = \mathit{cod}(\mathit{cod}(r);s)$

(e) $\mathit{dom}(s) \subset \mathit{cod}(r) \Rightarrow \mathit{cod}(r;s) = \mathit{cod}(s)$

(f) $\mathit{cod}(r \otimes s) = \mathit{cod}(r) \otimes \mathit{cod}(s)$

(g) $\mathit{cod}(r \nabla s) \subset \mathit{cod}(r) \otimes \mathit{cod}(s)$

(h) $(C \subset 1) \Rightarrow (\mathit{dom}(\Pi_1 ; C) = (C \otimes 1))$

$\quad (C \subset 1) \Rightarrow (\mathit{dom}(\Pi_2 ; C) = (1 \otimes C))$

Prueba:

Prueba de (a):

$$\mathit{cod}(\tilde{r}) = \widetilde{\widetilde{\mathit{cod}(\tilde{r})}} \qquad 4.2\ (k)$$

$$= \widetilde{\widetilde{(\infty;\tilde{r}) \cdot 1}} = \widetilde{\widetilde{(\infty;\tilde{r})}} \cdot \tilde{1} \qquad \text{Def. } \mathit{cod} \text{ y } 4.1\ (c)$$

$$= (\tilde{\tilde{r}};\tilde{\infty}) \cdot \tilde{1} = (r;\infty) \cdot 1 = \mathit{dom}(r) \qquad 4.1\ (b) \text{ y } (h) \text{ y CA9}$$

Prueba de (b):

$$\mathit{cod}(r+s) = (\infty;(r+s)) \cdot 1 \qquad \text{Def. } \mathit{cod}$$

$$= ((\infty;r)+(\infty;s)) \cdot 1 \qquad \text{C8}$$

$$= (((\infty;r) \cdot 1) + ((\infty;s) \cdot 1)) \qquad \text{CA3}$$

$$= \mathit{cod}(r) + \mathit{cod}(s) \qquad \text{Def. } \mathit{cod}$$

Prueba de (c):

$(r \cdot s) \subset r$ B.A.P.

$\infty;\ (r \cdot s) \subset \infty;\ r$ 4.2 (a)

$(\infty;(r \cdot s)) \cdot 1 \subset (\infty;r) \cdot 1$ B.A.P.

Análogamente:

$(\infty;(r \cdot s)) \cdot 1 \subset s;\infty \cdot 1$

Luego:

$(\infty;(r \cdot s)) \cdot 1 \subset ((\infty;r) \cdot 1) \cdot ((s;\infty) \cdot 1)$ B.A.P.

Prueba de (d):

$cod(cod(r);s)$	$= dom(\widetilde{cod(r);s})$	4.2 (l)
	$= dom(\tilde{s};\ \widetilde{cod(r)})$	4.1 (c)
	$= dom(\tilde{s};\ cod(r))$	4.2 (k)
	$= dom(\tilde{s};\ dom(\tilde{r}))$	4.2 (l)
	$= dom(\tilde{s};\ \tilde{r}) = dom(\widetilde{r;\ s})$	4.2 (m) y 4.1 (c)
	$= cod(r;\ s)$	4.2 (l)

Prueba de (e):

$cod(s)$	$= cod(dom(s);s)$	4.2 (e)
	$\subset cod(cod(r);s) = cod(r;s)$	hip. y 4.9 (d)

$cod(r;s) = (\infty;r;s)\bullet 1 \subset (\infty;s)\bullet 1 = cod(s)$ Def. *cod* y 4.2 (a)

Prueba de (f):

$cod(r\otimes s)$	$= dom(\widetilde{r\otimes s})$	4.2 (l)
	$= dom(\tilde{r}\otimes\tilde{s})$	4.1 (f)
	$= dom(\tilde{r}) \otimes dom(\tilde{s})$	4.8 (i)
	$= cod(r) \otimes cod(s)$	4.2 (l)

Prueba de (g):

$cod(r\nabla s)$	$= dom(\widetilde{r\nabla s})$	4.2 (l)
	$= dom(\tilde{r}\otimes\tilde{s};\ \tilde{2})$	4.1 (g)
	$= dom(\tilde{r}\otimes\tilde{s};\ dom(\tilde{2}))$	4.2 (m)
	$\subset dom(\tilde{r}\otimes\tilde{s};\ (1\otimes 1))$	a probar
$dom(\tilde{r}\otimes\tilde{s};\ (1\otimes 1))$	$= dom(\tilde{r};1 \otimes \tilde{s};1)$	4.7 (m)
	$= dom(\tilde{r} \otimes \tilde{s})$	CA12
	$= dom(\tilde{r}) \otimes dom(\tilde{s})$	4.8 (i)
	$= cod(r) \otimes cod(s)$	4.2 (l)

$dom(\tilde{2}) \subset (1\otimes 1)$

$dom(\tilde{2})$	$= (\tilde{2};\infty) \bullet 1 = ((\widetilde{1\nabla 1});\infty) \bullet 1$	Defs. 2 y *dom*
	$= ((\widetilde{\tilde{\Pi}_1\bullet\tilde{\Pi}_2});\infty)\bullet 1 = ((\Pi_1\bullet\Pi_2);\infty)\bullet 1$	Ax. (3), 4.1 (c) y CA9
	$\subset (\Pi_2;\infty)\bullet 1 = (1\otimes 1)$	4.2 (a) y 4.8 (h)

Prueba de (h):

$$
\begin{aligned}
dom(\Pi_1 ; C) &= cod(\widetilde{\Pi_1 ; C}) = cod(\tilde{C} ; \tilde{\Pi}_1) && 4.9\ (a),\ 4.1\ (b)\\
&= cod(C ; \tilde{\Pi}_1) = cod(\tilde{\Pi}_1 ; (C\otimes 1)) && 4.2\ (k),\ 4.5\ (e)\\
&= cod(cod(\tilde{\Pi}_1) ; (C\otimes 1)) && 4.9\ (d)\\
&= cod(dom(\Pi_1) ; (C\otimes 1)) && 4.9\ (a)\\
&= cod((1\otimes 1) ; (C\otimes 1)) = cod(C\otimes 1) && 4.8\ (h),\ 4.7\ (m)\\
&= (C\otimes 1) && 4.2\ (i)
\end{aligned}
$$

La otra fórmula se prueba de manera similar.

Q.E.D.

4.9 Propiedades de las operaciones y construcciones del lenguaje

Propiedades de (1⊗1)

$(1\otimes 1)$ se comporta como el neutro a derecha por ; de un fork de dos términos. Además $(1\otimes 1)$ es el neutro a izquierda por : de un producto directo de dos términos:

Proposición 4.10:

(a) $(r \subset \infty\nabla\infty) \Rightarrow (r ;\ (\Pi_1\nabla\Pi_2) = r)$
(b) $(r \subset \infty\otimes\infty) \Rightarrow ((\Pi_1\nabla\Pi_2) ;\ r = r)$

Prueba:

Prueba de (a):

$$cod(r) \subset cod(\infty\nabla\infty) \subset cod(\infty)\otimes cod(\infty) = (1\otimes 1) \qquad 4.9\ (g)\ \text{y B.A.P.}$$

$$
\begin{aligned}
r ;\ (1\otimes 1) &= r ;\ cod(r) ;\ (1\otimes 1) && 4.2\ (f)\\
&= r ;\ (cod(r) \cdot (1\otimes 1)) && \text{Ax. (1) y } 4.2\ (h)\\
&= r ;\ cod(r) = r && 4.2\ (f)
\end{aligned}
$$

Prueba de (b):

$$
\begin{aligned}
r &= \tilde{\tilde{r}} = \widetilde{\tilde{r} ; (1\otimes 1)} = \widetilde{\tilde{r} ; (\widetilde{1\otimes 1})} && \text{CA9, } 4.10\ (a) \text{ y C5}\\
&= \widetilde{\tilde{r} ; (\widetilde{1\otimes 1})} = \widetilde{\widetilde{(1\otimes 1)} ; \tilde{r}} && 4.1\ (f,b)\\
&= (1\otimes 1) ;\ r && \text{CA9}
\end{aligned}
$$

$$\tilde{r} \subset \widetilde{(\infty\otimes\infty)} = (\tilde{\infty}\otimes\tilde{\infty}) = (\infty\otimes\infty) \qquad \text{hip., } 4.1\ (f,h)$$

Q.E.D.

Proposición 4.11:

(a) $cte(p) \Rightarrow (r;p = dom(r);p)$

(b) $cte(p) \wedge (cod(r) \subset dom(s)) \Rightarrow ((r;s);p = r;p)$

(c) $cte(p) \Rightarrow p;\overline{\tilde{p}} = 0$

Prueba:

Prueba de (a):

$$
\begin{aligned}
dom(r);\ p &= (r;\infty\circ 1);\ p = (r;\infty\circ 1);\ \infty;\ p && \text{Def. } dom \text{ y } cte \\
&= (r;\infty\circ\infty);\ p = (r;\infty);\ p && 4.2\ (b) \text{ y CA6} \\
&= r;\ (\infty;p) = r;\ p && \text{CA11 y Def. } cte
\end{aligned}
$$

Prueba de (b):

$$
\begin{aligned}
(r;s);p &= r;(dom(s);p) && \text{CA11 y } 4.11\ (a) \\
&= (r;\ cod(r));\ (dom(s);\ p) && 4.2\ (f) \\
&= r;\ ((cod(r);\ dom(s));\ p) && \text{CA11} \\
&= r;\ (cod(r)\circ dom(s));\ p && 4.2\ (h) \\
&= r;\ (cod(r);\ p) = r;\ p && \text{hip. y } 4.2\ (f)
\end{aligned}
$$

Prueba de (c):

$$p;\tilde{p} = 0 \Rightarrow p;\tilde{p} \bullet 1 = 0 \qquad \text{B.A.P.}$$

$$0 = dom(p) = p;\infty \bullet 1 = \infty \bullet 1 = 1 \qquad \text{Def. } cte \text{ y } dom$$

$$
\begin{aligned}
p;\tilde{p} &= (\infty;p);\ \widetilde{(\infty;p)} = (\infty;p);\ (\tilde{p};\tilde{\infty}) && \text{Def. } cte \text{ y } 4.1\ (c) \\
&= \infty;\ (p;\tilde{p});\ \infty = \infty && \text{CA16 y } \neg((p;\tilde{p}) = 0)
\end{aligned}
$$

$$0 = p;\ 0 = p;\ (\tilde{p}\circ\overline{\tilde{p}}) \qquad \text{B.A.P. y C9}$$

$$= (p;\tilde{p}) \circ (p;\overline{\tilde{p}}) = \infty \bullet (p;\overline{\tilde{p}}) = (p;\overline{\tilde{p}}) \qquad det(p) \text{ y } 4.2\ (n)$$

Q.E.D.

Propiedades para la totalización de una relación

Proposición 4.12: Se tienen las siguientes propiedades:

(a) $(cod(r);\ bot = 0) \Rightarrow (r^{\circ};^{\downarrow} = r;\ true + (\overline{dom(r)} \cdot 1);\ false)$

(b) Eliminación de totalización del primer operando de una composición:

$(bot;\ dom(s) = 0) \Rightarrow r^{\circ};\ s = r;\ s$

(c) Eliminación de relación de un fork dentro de una totalización afectada por $\downarrow$

$$(dom(s) \subset dom(r)) \wedge (cod(r\nabla s);\tilde{\tilde{\tilde{bot}}} = 0) \wedge (cod(s);\tilde{\tilde{\tilde{bot}}} = 0) \Rightarrow ((\tilde{\Pi}_1;\ (r\nabla s))^{\circ};^{\downarrow} = (\tilde{\Pi}_1;\ s)^{\circ};^{\downarrow})$$

(d) Eliminación de la totalización de una suma afectada por $\downarrow$

$(cod(r+s);\ bot = 0) \Rightarrow (r + s)^{\circ};^{\downarrow} = (r^{\circ};^{\downarrow} \nabla s^{\circ};^{\downarrow});\ or$

(e) Eliminación de la totalización de una composición afectada por $\downarrow$

$(cod(r+s);bot = 0) \wedge (r,s \subset 1) \Rightarrow (r \cdot s)^{\circ};^{\downarrow} = (r^{\circ};^{\downarrow} \nabla s^{\circ};^{\downarrow});\ and$

(f) Introducción del condicional

$$(cod(r) = C_1 + C_2) \wedge (C_1 \cdot C_2 = 0) \Rightarrow r;\ (C_1;s_1 + C_2;s_2) = r;\ (C_1^{\circ};^{\downarrow},s_1,\ s_2)$$

Hasta ahora esta formula ha sido usada con motivo de hacer mas legibles los terminos y para trabajar solo con una de las condiciones.

Prueba:

Prueba de (a):

$$
\begin{aligned}
r^{\circ};\downarrow &= (r + (\overline{dom(r)}^{\circ}1);bot);\ (\widetilde{bot};false + \overline{\widetilde{bot}};true) && \text{Defs.}\\
&= r;\ \widetilde{bot};false + r;\ \overline{\widetilde{bot}};true +\\
&\quad (\overline{dom(r)}^{\circ}1);bot;\ \widetilde{bot};false +\\
&\quad (\overline{dom(r)}^{\circ}1);bot;\ \overline{\widetilde{bot}};\ true && 4.7\ (c)\\
&= r;\ cod(r);\ \widetilde{bot};\ false + r;\ \overline{\widetilde{bot}};\ true +\\
&\quad (\overline{dom(r)}^{\circ}1);bot;\ \widetilde{bot};false +\\
&\quad (\overline{dom(r)}^{\circ}1);\ 0;\ true && 4.2\ (f)\ y\ 4.11\ (c)\\
&= r;\ 0;\ false + r;\ \overline{\widetilde{bot}};\ true +\\
&\quad (\overline{dom(r)}^{\circ}1);bot;\ \widetilde{bot};false + 0 && C9,\ C13\ y\ hip.\\
&= 0 + r;\ \overline{\widetilde{bot}};\ true + (\overline{dom(r)}^{\circ}1);\ false && C9,\ C13\ y\ 4.11\ (b)\\
&= r;\ true + (\overline{dom(r)}^{\circ}1);\ false && 4.8\ (c)\ y\ CA5
\end{aligned}
$$

Prueba de (b):

$$
\begin{aligned}
r^{\circ};\ s &= (r + (\overline{dom(r)}^{\circ}1);\ bot);\ s && Def.\ {}^{\circ}\\
&= r;s + (\overline{dom(r)}^{\circ}1);\ bot;\ s && 4.7\ (c)\\
&= r;s + (\overline{dom(r)}^{\circ}1);\ bot;\ dom(s);\ s && 4.2\ (e)\\
&= r;s + (\overline{dom(r)}^{\circ}1);\ 0;\ s && hip.\\
&= r;s + 0 = r;s && C9,\ C13\ y\ CA5
\end{aligned}
$$

Prueba de (c):

$$(\tilde{\Pi}_1;(r\nabla s))^{\circ};\downarrow = \tilde{\Pi}_1;(r\nabla s);true + (\overline{dom(\tilde{\Pi}_1;(r\nabla s))}\cdot 1);\ false$$

4.12 (a)

$$= \tilde{\Pi}_1;s;true + (\overline{dom(\tilde{\Pi}_1;s)}\cdot 1);false \qquad \text{a probar}$$

$$= (\tilde{\Pi}_1;s)^{\circ};\downarrow \qquad 4.12\ (a)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_1;(r\nabla s);true &= \tilde{\Pi}_1;dom(r\nabla s);true && 4.11\ (a)\\
&= \tilde{\Pi}_1;\ (dom(r)\cdot dom(s));\ true && 4.8\ (g)\\
&= \tilde{\Pi}_1;\ dom(s);\ true && hip.\\
&= \tilde{\Pi}_1;\ s;\ true && 4.11\ (a)\\
dom(\tilde{\Pi}_1;(r\nabla s)) &= dom(\tilde{\Pi}_1;dom(r\nabla s)) && 4.2\ (m)\\
&= dom(\tilde{\Pi}_1;dom(s)) && 4.8\ (g)\ e\ hip.\\
&= dom(\tilde{\Pi}_1;s) && 4.2\ (m)
\end{aligned}$$

Prueba de (d):

$$\begin{aligned}
(r^{\circ};\downarrow \nabla s^{\circ};\downarrow);or &= [(r;true + (\overline{dom(r)}\cdot 1);false)\ \nabla\\
&\quad (s;true + (\overline{dom(s)}\cdot 1);false)];or \qquad 4.12\ (a)\\
&= [(r;true\ \nabla\ s;true) +\\
&\quad (r;true\ \nabla\ (\overline{dom(s)}\cdot 1);false) +\\
&\quad ((\overline{dom(r)}\cdot 1);false\ \nabla\ s;true) +\\
&\quad ((\overline{dom(r)}\cdot 1);false\ \nabla\ (\overline{dom(s)}\cdot 1);false)];\ or\\
&\quad 4.7\ (e,f)\\
&= (r\nabla s);\ (true \otimes true);\ or +\\
&\quad (r\nabla(\overline{dom(s)}\cdot 1));\ (true \otimes false);\ or +\\
&\quad (\overline{dom(r)}\cdot 1)\ \nabla\ s);\ (false \otimes true);or +\\
&\quad ((\overline{dom(r)}\cdot 1)\ \nabla\ (\overline{dom(s)}\cdot 1));(false\otimes false);\ or\\
&\quad 4.7\ (i,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r^{\circ};\downarrow \nabla s^{\circ};\downarrow);or &= [(r\nabla s) + (r\nabla(\overline{dom(s)}\cdot 1)) + ((\overline{dom(r)}\cdot 1)\ \nabla\ s)];\\
&\quad (1\otimes 1);\ true + ((\overline{dom(r)}\cdot 1)\ \nabla\ (\overline{dom(s)}\cdot 1));\\
&\quad (1\otimes 1);\ false\\
&\quad \text{Props. or y } 4.7\ (c)
\end{aligned}$$

$= dom((r\nabla s) + (r\nabla(\overline{dom(s)}\cdot 1)) + ((\overline{dom(r)}\cdot 1)\nabla s));$
$true + dom((\overline{dom(r)}\cdot 1)\ \nabla\ (\overline{dom(s)}\cdot 1));\ false$
4.11 (a)

$= [dom(r)\cdot dom(s) + dom(r)\cdot\overline{dom(s)} +$
$dom(s)\cdot\overline{dom(r)}];\ true +$
$(\overline{dom(r)}\cdot\overline{dom(s)});\ false$
4.8 (a) y (g)

$= dom(r+s);\ true + (\overline{dom(r)}\cdot\overline{dom(s)}\cdot 1);\ false$
4.8 (a) y 4.2 (p)

$= dom(r+s);\ true + (\overline{dom(r+s)}\cdot 1);false$ B.A.P.
$= (r+s)^{\circ};\downarrow$ 4.12 (a)

Prueba de (e):
Se repiten los primeros pasos de (d).

$(r^{\circ};\downarrow\nabla\ s^{\circ};\downarrow);and = (r\nabla s);\ (true \otimes true);\ and +$
$(r\nabla(\overline{s}\cdot 1));\ (true \otimes false);\ and +$
$((\overline{r}\cdot 1)\ \nabla\ s);\ (false \otimes true);\ and +$
$((\overline{r}\cdot 1)\ \nabla\ (\overline{s}\cdot 1));(false \otimes false);\ and$
4.7 (c), 4.2 (i)

$= (r\nabla s);\ (1\otimes 1);\ true + [\ (r\ \nabla\ (\overline{s}\cdot 1)) +$
$((\overline{r}\cdot 1)\ \nabla\ s) + ((\overline{r}\cdot 1)\ \nabla\ (\overline{s}\cdot 1))\ ]$
$(1\otimes 1);\ false$
Props. and y 4.7 (c)

$= dom(r\nabla s);\ true + dom((r\ \nabla\ (\overline{s}\cdot 1)) +$
$((\overline{r}\cdot 1)\ \nabla\ s) + ((\overline{r}\cdot 1)\ \nabla\ (\overline{s}\cdot 1)));$
$false$ 4.11 (a)
$= (r\cdot s);\ true + [\ r\cdot\overline{s} + \overline{r}\cdot s + \overline{r}\cdot\overline{s}\cdot 1\ ];\ false$
4.8 (a) y (g), 4.2 (l)

$= (r\cdot s);true + \overline{r\cdot s}\cdot 1;\ false$ 4.2 (o)
$= (r\cdot s)^{\circ};\downarrow$ hip. y 4.12 (a)

Prueba de (f):

$r;\ (C_1{}^{\circ};\downarrow?\ , s_1,\ s_2)$

$r;\ ((C_1;\ true + (\overline{C_1} \bullet 1);\ false)?, s_1, s_2)$ $\qquad$ 4.12 (a)

$r;\ (1\nabla(C_1;\ true + (\overline{C_1} \bullet 1);\ false));\ [((1\otimes\widetilde{true};true);\Pi_1;s_1) + ((1\otimes\widetilde{false};false);\Pi_1;s_2)]$

$r;\ [(1\nabla(C_1;\ true + (\overline{C_1} \bullet 1);\ false));\ ((1\otimes\widetilde{true};true);\Pi_1;s_1) +$
$(1\nabla(C_1;\ true + (\overline{C_1} \bullet 1);\ false));\ ((1\otimes\widetilde{false};false);\Pi_1;s_2)]$

Def. (?,,) y C8

$r;\ [(1\nabla((C_1;\ true + (\overline{C_1} \bullet 1);\ false);\ \widetilde{true};true);\ \Pi_1;s_1\ +$
$(1\nabla((C_1;\ true + (\overline{C_1} \bullet 1);\ false);\ \widetilde{false};false);\ \Pi_1;s_2]$

4.7 (i)

$r;\ ((1\nabla C_1);\ \Pi_1;s_1\ +\ (1\nabla(\overline{C_1} \bullet 1));\ \Pi_1;s_2)$

$r;\ (C_1;\ s_1\ +\ (\overline{C_1} \circ 1);\ s_2)$ $\qquad$ Ax. (2)

$r;\ cod(r);\ (C_1;\ s_1\ +\ (\overline{C_1} \bullet 1);\ s_2)$ $\qquad$ 4.2 (f)

$r;\ (C_1 + C_2);\ (C_1;\ s_1\ +\ (\overline{C_1} \circ 1);\ s_2)$ $\qquad$ hip.

$r;\ (C_1;\ s_1\ +\ C_2;\ s_2)$ $\qquad$ hip., C8 y C12

Q.E.D.

Propiedades de la suma secuencial

Solo se presentan algunas fórmulas utilizadas en los ejemplos de derivación.

Se pretende que la suma secuencial permita refinar términos e introducir control. Además la suma secuencial permite definir la disyunción secuencial.

Proposición 4.13:

(a) Eliminación de suma

$(dom(r \mathbin{+\!\!\!\!\!\;|\!|}\ s) = dom(r + s)) \wedge (r \mathbin{+\!\!\!\!\!\;|\!|}\ s \subset r + s)$

(b) Introducción de disyunción secuencial

$[\ (cod(r) = Bool) \wedge (cod(s) = Bool) \wedge$
$(dom(r) = dom(s)) \wedge det(r) \wedge det(s)\ ] \Rightarrow$
$[\ dom(r;\ 1_{\langle T\rangle} \mathbin{+\!\!\!\!\!\;|\!|}\ s) = dom((r \nabla s);\ or) \wedge$
$(r;\ 1_{\langle T\rangle} \mathbin{+\!\!\!\!\!\;|\!|}\ s \subset (r \nabla s);\ or)\ ]$

Prueba:

Prueba de (a):

$$\begin{aligned}
dom(r \nparallel s) &= dom(r + (dom(s)\cdot\overline{dom(r)}\cdot 1);\ s) && \text{Def. } \nparallel \\
&= dom(r) + dom((dom(s)\cdot\overline{dom(r)}\cdot 1);\ s) && 4.8\ (a) \\
&= dom(r) + dom((dom(s)\cdot\overline{dom(r)}\cdot 1);\ dom(s)) && 4.2\ (m) \\
&= dom(r) + dom(s)\cdot\ \overline{dom(r)}\cdot\ 1 && 4.2\ (j,h) \\
&= dom(r) + dom(s)\cdot dom(r) + \\
&\quad dom(s)\ \cdot\ \overline{dom(r)}\ \cdot\ 1 && B.A.P. \\
&= dom(r) + dom(s);(\overline{dom(r)}\cdot 1 + dom(r)) && CA4 \\
&= dom(r) + dom(s) && CA12
\end{aligned}$$

$$r \nparallel s \subset r + s \qquad B.A.P.$$

Prueba de (b):

$$(cod(r) = Bool) \wedge (cod(s) = Bool) \wedge (dom(r) = dom(s)) \Rightarrow$$
$$dom(r;\ 1\langle T\rangle \nparallel s) = dom((r \nabla s);\ or) \wedge$$
$$(r;\ 1\langle T\rangle \nparallel s \subset (r \nabla s);\ or)$$

$$dom(r;\ 1\langle T\rangle \nparallel s) = dom(r) + dom(s) = dom(r)$$

$$\begin{aligned}
dom((r \nabla s);\ or) &= dom((r \nabla s);\ dom(or)) \\
&= dom(r \nabla s) \\
&= dom(r)\ \cdot\ dom(s) \\
&= dom(r)
\end{aligned}$$

(a) $x\ \ r;\ 1\langle T\rangle \nparallel s\ \ F$
$x\ \ (r;\ 1\langle T\rangle + (dom(s)\cdot\overline{dom(r;\ 1\langle T\rangle)}\cdot 1);\ s)\ \ F$

$x\ \ ((dom(s)\cdot\overline{dom(r;\ 1\langle T\rangle)}\cdot 1);\ s)\ \ F$

como $det(s)$: $x\ \ s\ \ F$
como $dom(r) = dom(s)$ y $x\ \ \overline{dom(r;\ 1\langle T\rangle)}\cdot 1)\ \ x$

se tiene $x\ \ r\ \ F$ luego:

$x\ \ (r\nabla s);\ or\ \ F$

(b) $x\ \ r;\ 1\langle T\rangle \nparallel s\ \ T$
$x\ \ (r;\ 1\langle T\rangle + (dom(s)\cdot\overline{dom(r;\ 1\langle T\rangle)}\cdot 1);\ s)\ \ T$

(1) $x\ \ r\ \ T$: luego
$x\ \ (r\nabla s);\ or\ \ T$

(2) $x\ \ r\ \ F$ como $det(r)$ no $x\ \ r\ \ T$

entonces $x\ \ \overline{dom(r;\ 1\langle T\rangle)}\cdot 1\ \ x$ Además por (b):

$x\ (dom(s) \cdot \overline{dom(r;\ 1\langle T\rangle)} \cdot 1);\ s)\ T$
$x\ s\ T$ luego
$x\ (r \nabla s);\ or\ T$

Q.E.D.

Propiedades para las proyecciones

Hay una infinidad de propiedades válidas en las álgebras estructuradas que involucran proyecciones y sus conversas. Aquí se presentarán algunas de simplificación como ejemplos. La verificación de su validez en las álgebras estructuradas es sencilla y por eso se omite. Queda pendiente ver si son derivables a partir de los axiomas.

$$((\Pi_{11} \nabla \Pi_{21}) \nabla (\Pi_{12} \nabla \Pi_{22}));\ \Pi_2 = \Pi_2 \otimes \Pi_2$$

Eliminación de relación de un fork que antecede a la conversa de una proyección.

$$dom(r) \subseteq dom(s) \Rightarrow (r \nabla s);\ (\tilde{\Pi}_1;\ (\Pi_{11} \nabla \Pi_2);\ t)^{\circ} = r;\ (\tilde{\Pi}_1;\ t)^{\circ}$$

Variando las proyecciones o cambiando de conversa se pueden armar otros ejemplos.

Un problema generalmente complicado es el de "desarmar" la conversa de una proyección compuesta con un fork. Es deseable obtener un producto donde sus componentes son conversas de una proyección compuesta con una de las componentes del fork. La dificultad se debe a que ambas componentes del fork pueden estar vinculadas mediante una aserción. Se tiene la regla:

$$\tilde{\Pi}_1;\ ((\Pi_{11} \nabla \Pi_{21});\ p \nabla (\Pi_{12} \nabla \Pi_{22});\ q) = \tilde{\Pi}_1;\ p \otimes \tilde{\Pi}_1;\ q$$

En las secciones 5 y 6 se estudian algunas propiedades interesantes para las condiciones universales.

5. PRUEBA DE PROPIEDADES PARA TERMINOS

En [HV 91] un término C se identifica con una fórmula de primer orden φ si en las álgebras relacionales estructuradas se interpreta como la relación: $\{\langle x,x\rangle : x\in U \wedge \varphi(x)\}$

Sea r término y $(C \subset 1)$, C término asociado a una fórmula φ. Se considera el problema de probar:

$$r;C = r \tag{1}$$

Se estudiarán los siguientes casos para C:

(a) $\forall(C_1 | C_2)$

(b) $\tilde{\Pi}_1;\ C;\ \Pi_1$

El objetivo será encontrar condiciones suficientes para (1) independientes de las construcciones existenciales y universales. Primero se estudia el caso (a), pero antes se prueban unos resultados preliminares:

Lema 5.1:

(a) $(\overline{C_1}\cdot 1 + C_2 = 1) \Leftrightarrow (C_1 \subset C_2)$

(b) $(C \subset (\infty\otimes\infty)) \Rightarrow ((\tilde{\Pi}_1;\ C;\ \Pi_1 = 0) \Leftrightarrow (C = 0))$

(c) $(C_1 \subset (1\otimes 1)) \Rightarrow (\overline{(\overline{C_1}\cdot 1 + C_2)}\cdot 1 \subset (1\otimes 1))$

(d) $C \subset (1\otimes 1) \Rightarrow \tilde{\Pi}_1;\ C;\ \Pi_1 \subset 1$

(e) $(C \subset 1) \wedge (\mathcal{P} + C = \mathcal{P}) \Rightarrow (C = 0)$

Prueba:

Prueba de (a):

$C_1 = C_1\cdot 1 = C_1\cdot(\overline{C_1}\cdot 1 + C_2) = C_1\cdot\overline{C_1}\cdot 1 + C_1\cdot C_2$	hip. y CA3
$= 0\cdot 1 + C_1\cdot C_2 = C_1\cdot C_2$	CA5 y B.A.P.

Recíproca:

$\overline{C_2} \subset \overline{C_1}$	$C_1 \subset C_2$
$\overline{C_2}\cdot 1 \subset \overline{C_1}\cdot 1$	B.A.P.
$(\overline{C_2}\cdot 1) + C_2 \subset (\overline{C_1}\cdot 1) + C_2$	B.A.P.
$(\overline{C_2}\cdot 1) + C_2 = (\overline{C_2}\cdot 1) + (C_2\cdot 1)$	$C_2 \subset 1$
$= (\overline{C_2} + C_2)\cdot 1 = \infty\cdot 1 = 1$	CA3, CA7 y CA6
$1 \subset (\overline{C_1}\cdot 1) + C_2 \subset 1$	$C_2 \subset 1$
$1 = (\overline{C_1}\cdot 1) + C_2$	B.A.P.

Prueba de (b):

$\tilde{\Pi}_1 ; C ; \Pi_1 = 0$	hip.
$0 = dom(0) = dom(\tilde{\Pi}_1 ; C ; \Pi_1)$	
$= dom(\tilde{\Pi}_1 ; C ; dom(\Pi_1))$	4.2 (m)
$= dom(\tilde{\Pi}_1 ; C ; (1 \otimes 1))$	4.8 (h)
$= dom(\tilde{\Pi}_1 ; C)$	4.10 (a)
$0 = 0 ; (\tilde{\Pi}_1 ; C) = dom(\tilde{\Pi}_1 ; C) ; (\tilde{\Pi}_1 ; C) = (\tilde{\Pi}_1 ; C)$	C13 y 4.2 (e)
$0 = cod(\tilde{\Pi}_1 ; C) = cod(cod(\tilde{\Pi}_1) ; C)$	4.9 (d)
$= cod((1 \otimes 1) ; C) = cod(C) = C$	4.10 (b) y 4.8 (h)

Prueba de (c):

$\overline{((\overline{C_1} \cdot 1 + C_2)} \cdot 1 \subset \overline{\overline{C_1} \cdot 1} \cdot 1$	B.A.P.
$\overline{\overline{C_1} \cdot 1} \cdot 1 = (\overline{\overline{C_1}} + \mathcal{P}) \cdot 1 = (C_1 + \mathcal{P}) \cdot 1$	B.A.P. y CA14
$= (C_1 + (\mathcal{P} \cdot 1)) = C_1 \subset (1 \otimes 1)$	CA3, CA14 e hip.

Prueba de (d):

$\tilde{\Pi}_1 ; C ; \Pi_1 \subset \tilde{\Pi}_1 ; (1 \otimes 1) ; \Pi_1$	hip. y 4.2 (a)
$\tilde{\Pi}_1 ; (1 \otimes 1) ; \Pi_1 = \tilde{\Pi}_1 ; \Pi_1 = 1$	4.7 (i) y Ax. (2)

Prueba de (e):

$C = C \cdot 1 = C \cdot 1 + 0 = C \cdot 1 + \mathcal{P} \cdot 1$	hip., CA5 y CA14
$= (C + \mathcal{P}) \cdot 1 = \mathcal{P} \cdot 1 = 0$	hip., CA3 y CA14

Q.E.D.

El siguiente resultado es una forma práctica de encarar la prueba de una identidad del tipo: $r ; \forall(C_1 | C_2) = r$

Teorema 5.2:

$$[\ (C_1 , C_2 \subset (1 \otimes 1)) \wedge ((r \otimes 1) ; C_1 \subset (r \otimes 1) ; C_2)\ ] \Rightarrow (r ; \forall(C_1 | C_2) = r)$$

Prueba:

$cod((r \otimes 1) ; C_1) \subset cod((r \otimes 1) ; C_2)$	hip.
$cod(cod(r \otimes 1) ; C_1) \subset cod(cod(r \otimes 1) ; C_2)$	4.9 (d)
$cod((cod(r) \otimes 1) ; C_1) \subset cod((cod(r) \otimes 1) ; C_2)$	4.9 (f)
$cod((cod(r) \otimes 1) \cdot C_1) \subset cod((cod(r) \otimes 1) \cdot C_2)$	4.2 (h)
$(cod(r) \otimes 1) \cdot C_1 \subset (cod(r) \otimes 1) \cdot C_2$	4.2 (i)

$$1 = \overline{(cod(r)\otimes 1)\cdot C_1} \cdot 1 + (cod(r)\otimes 1)\cdot C_2 \qquad \text{5.1 (a)}$$

$$= (\overline{(cod(r)\otimes 1)} + \overline{C_1}) \cdot 1 + (cod(r)\otimes 1)\cdot C_2 \qquad \text{B.A.P.}$$

$$(cod(r)\otimes 1) = (cod(r)\otimes 1)\cdot \overline{C_1} + (cod(r)\otimes 1)\cdot C_2 \qquad \text{CA3 y B.A.P.}$$

$$= (cod(r)\otimes 1) \cdot (\overline{C_1}\cdot 1 + C_2) \qquad \text{CA3}$$

$$\overline{(\overline{cod(r)}\otimes 1)}\cdot 1 = [\,\overline{(\infty\otimes\infty)} + (cod(r)\otimes 1) + (cod(r)\otimes\mathcal{P}) + (\overline{cod(r)}\otimes\mathcal{P})\,]\cdot 1 \qquad \text{4.7 (q)}$$

$$= (cod(r)\otimes 1) \qquad \text{CA3 y B.A.P.}$$

$$\subset (\overline{C_1}\cdot 1 + C_2)$$

$$\overline{(\overline{cod(r)}\otimes 1)} \cdot (\overline{C_1}\cdot 1 + C_2) = \overline{(\overline{cod(r)}\otimes 1)} \cdot 1$$

$$\overline{(\overline{cod(r)}\otimes 1)} \cdot (\overline{C_1}\cdot 1 + C_2 + \mathcal{P}) = \overline{(\overline{cod(r)}\otimes 1)} \qquad \text{CA14 y CA3}$$

$$\overline{\overline{(\overline{cod(r)}\otimes 1)} \cdot (\overline{C_1}\cdot 1 + C_2 + \mathcal{P})} = (\overline{cod(r)}\otimes 1) \qquad \text{B.A.P.}$$

$$(\overline{cod(r)}\otimes 1) + \overline{(\overline{C_1}\cdot 1 + C_2 + \mathcal{P})} = (\overline{cod(r)}\otimes 1) \qquad \text{B.A.P.}$$

$$\tilde{\Pi}_1;\ (\overline{cod(r)}\otimes 1) + \overline{(\overline{C_1}\cdot 1 + C_2 + \mathcal{P})};\ \Pi_1 = \tilde{\Pi}_1;\ (\overline{cod(r)}\otimes 1);\Pi_1$$

$$\overline{cod(r)} + \tilde{\Pi}_1;\ \overline{(\overline{C_1}\cdot 1 + C_2 + \mathcal{P})};\ \Pi_1 = \overline{cod(r)} \qquad \text{4.5 (e) y Ax. (2)}$$

$$\overline{\overline{cod(r)} + \tilde{\Pi}_1;\ \overline{(\overline{C_1}\cdot 1 + C_2 + \mathcal{P})};\ \Pi_1} = cod(r) \qquad \text{B.A.P.}$$

$$cod(r) \cdot \overline{\tilde{\Pi}_1;\ \overline{(\overline{C_1}\cdot 1 + C_2 + \mathcal{P})};\ \Pi_1\cdot 1} = cod(r) \qquad \text{B.A.P.}$$

$$cod(r);\ \forall(C_1|C_2) = cod(r) \qquad \text{Def. } \forall \text{ y 4.2 (h)}$$

$$r;\ \forall(C_1|C_2) = r \qquad \text{4.2 (f)}$$

Q.E.D.

Se verá que la condición $((r\otimes 1);C_1 \subset (r\otimes 1);C_2)$ es necesaria. Pero antes se prueba la siguiente propiedad:

Proposicion 5.3:

$(C_1, C_2 \subset (1 \otimes 1)) \Rightarrow [(C_1 \subset C_2) \Leftrightarrow (\forall(C_1 | C_2) = 1)]$

Prueba:

$1 = (\overline{C_1} \cdot 1) + C_2$ hip. y 5.1 (a)

$\forall(C_1 | C_2) = \overline{\tilde{\Pi}_1 ;\ \overline{(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2)} \cdot 1 ;\Pi_1} \cdot 1$ Def. $\forall(|)$

$= \overline{\tilde{\Pi}_1 ;\ (\overline{1} \cdot 1) ;\ \Pi_1} \cdot 1$ Reemplazo

$= \overline{\tilde{\Pi}_1 ;\ 0 ;\ \Pi_1} \circ 1 = \overline{0} \cdot 1$ C9, C13 y B.A.P.

$= \infty \cdot 1 = 1$ B.A.P. y CA6

Reciproca:

$1 = \overline{\tilde{\Pi}_1 ;\ \overline{(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2)} \cdot 1 ;\Pi_1} \cdot 1$ hip.

$= \overline{\tilde{\Pi}_1 ;\ \overline{(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2)} \cdot 1 ;\Pi_1} + \mathcal{P}$ B.A.P. y CA14

$\mathcal{P} = \tilde{\Pi}_1 ;\ \overline{(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2)} \cdot 1 ;\Pi_1 + \mathcal{P}$ B.A.P. (*)

Sustituyendo en 5.1 (d) a C por $(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2) \cdot 1$:

$\tilde{\Pi}_1 ;\ \overline{(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2)} \cdot 1 ;\ \Pi_1 \subset 1$

$\tilde{\Pi}_1 ;\ \overline{(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2)} \cdot 1 ;\ \Pi_1 = 0$ 5.1 (e) y (*)

$\overline{(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2)} \cdot 1 = 0$ 5.1 (b) y (c)

$(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2) + \mathcal{P} = \infty$ B.A.P. y CA14

$(\overline{C_1} \cdot 1 + C_2) = 1$ B.A.P.

$C_1 \subset C_2$ 5.1 (a)

Q.E.D.

Teorema 5.4:

Teorema 5.4:

$[(C_1, C_2 \subset (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})) \wedge (r;\forall(C_1|C_2) = r)] \Rightarrow ((r\otimes\mathbb{1});C_1 \subset (r\otimes\mathbb{1});C_2)$

Prueba:

$r;\forall(C_1\|C_2) = r$	hip.
$cod(r;\forall(C_1\|C_2)) = cod(r)$	
$cod(cod(r);\forall(C_1\|C_2)) = cod(r)$	4.9 (d)
$cod(r) \cdot \forall(C_1\|C_2) = cod(r)$	4.2 (i) y (j)
$cod(r) + \forall(C_1\|C_2) = \forall(C_1\|C_2)$	
$\mathbb{1} = \overline{cod(r)}\cdot\mathbb{1} + cod(r) + \forall(C_1\|C_2)$	B.A.P.
$\mathbb{1} = \overline{cod(r)}\cdot\mathbb{1} + \forall(C_1\|C_2)$	
$\mathbb{1} = \overline{cod(r)}\cdot\mathbb{1} + \overline{\breve{\Pi}_1;\ \overline{(\overline{C_1}\cdot\mathbb{1} + C_2)\cdot\mathbb{1}}\ ;\Pi_1} \cdot \mathbb{1}$	Def. $\forall$
$\mathbb{1} = (\overline{cod(r)} + \overline{\breve{\Pi}_1;\ \overline{(\overline{C_1}\cdot\mathbb{1} + C_2)\cdot\mathbb{1}}\ ;\Pi_1)} \cdot \mathbb{1}$	CA3
$\mathbb{1} = \overline{(cod(r) \cdot \breve{\Pi}_1;\ \overline{(\overline{C_1}\cdot\mathbb{1} + C_2)\cdot\mathbb{1}}\ ;\Pi_1)} \cdot \mathbb{1}$	B.A.P.
$\mathbb{1} = \overline{(cod(r)\ ;\ \breve{\Pi}_1;\ \overline{(\overline{C_1}\cdot\mathbb{1} + C_2)\cdot\mathbb{1}}\ ;\Pi_1)} \cdot \mathbb{1}$	4.2 (h)
$\mathbb{1} = \overline{\breve{\Pi}_1;\ (cod(r)\otimes\mathbb{1});\ \overline{(\overline{C_1}\cdot\mathbb{1} + C_2)\cdot\mathbb{1}}\ ;\Pi_1)} \cdot \mathbb{1}$	4.5 (e)
$\mathbb{1} = \overline{\breve{\Pi}_1;\ (cod(r)\otimes\mathbb{1}) \cdot \overline{(\overline{C_1}\cdot\mathbb{1} + C_2)\cdot\mathbb{1}}\ ;\Pi_1)} \cdot \mathbb{1}$	4.2 (h)
$\mathbb{1} = \overline{\breve{\Pi}_1;\ \overline{\overline{(cod(r)\otimes\mathbb{1})} + \overline{C_1}\cdot\mathbb{1} + C_2} \cdot \mathbb{1}\ ;\Pi_1)} \cdot \mathbb{1}$	B.A.P.
$\mathbb{1} = \overline{\breve{\Pi}_1;\ \overline{\overline{(cod(r)\otimes\mathbb{1})\cdot C_1} \cdot \mathbb{1} + C_2} \cdot \mathbb{1}\ ;\Pi_1)} \cdot \mathbb{1}$	B.A.P.
$\mathbb{1} = \forall((cod(r)\otimes\mathbb{1});C_1\|C_2)$	Def. $\forall$ y 4.2 (h)
$(cod(r)\otimes\mathbb{1});C_1 \subset C_2$	5.3
$(cod(r)\otimes\mathbb{1});C_1 \subset (cod(r)\otimes\mathbb{1});C_2$	4.2 (h)
Q.E.D.	

Se observa que para los términos asociados a cuantificadores universales se tiene la propiedad:

$[(C \subset (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})) \wedge (r;\forall((\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})|C) = r)] \Leftrightarrow ((r\otimes\mathbb{1});\ C = (r\otimes\mathbb{1}))$

Prueba de propiedades para términos determinísticos

Se considera el caso en que r es funcional. Esto se traduce a probar condiciones entre dominios. Para esto se necesitan las siguientes propiedades:

Proposición 5.5:

(a) $(C_1, C_2 \subset 1 \wedge det(r)) \Rightarrow [\, (((r\otimes 1);C_1) \subset ((r\otimes 1);C_2)) \Leftrightarrow dom((r\otimes 1);C_1) \subset dom((r\otimes 1);C_2) \,]$

(b) $(det(r) \wedge (C\subset 1)) \Rightarrow ((dom(r;C) = dom(r)) \Leftrightarrow (r;C = r))$

Prueba:

Prueba de (a):

$\widetilde{(r\otimes 1)};(r\otimes 1);C_1 = dom(\widetilde{(r\otimes 1)};(r\otimes 1);C_1)$ det(r) y 4.2 (i)

$= dom(\widetilde{(r\otimes 1)};dom((r\otimes 1);C_1))$ 4.2 (m)

$\subset dom(\widetilde{(r\otimes 1)};dom((r\otimes 1);C_2))$ hip. y B.A.P.

$dom(\widetilde{(r\otimes 1)};dom((r\otimes 1);C_2)) = dom(\widetilde{(r\otimes 1)};(r\otimes 1);C_2)$ 4.2 (m)

$\subset dom(C_2) = C_2$ det(r) y 4.2 (i)

$\widetilde{(r\otimes 1)};(r\otimes 1);C_1 \subset C_2$

$(r\otimes 1);\widetilde{(r\otimes 1)};(r\otimes 1);C_1 \subset (r\otimes 1);\ C_2$ 4.2 (a)

$cod(r\otimes 1) = \widetilde{(r\otimes 1)};(r\otimes 1)$ det(r) y B.A.P.

$(r\otimes 1);C_1 \subset (r\otimes 1);\ C_2$ reemplazo

Prueba de (b):

$dom(\tilde{r};r;C) = dom(\tilde{r};dom(r;C)) = dom(\tilde{r};dom(r))$ hip. y 4.2 (m)

$= dom(\tilde{r};cod(\tilde{r})) = dom(\tilde{r}) = cod(r)$ 4.2 (1,f)

$r = r;\ cod(r) = r;\ dom(\tilde{r};r;C)$ 4.2 (f)

$\subset r;\ dom(C) = r;\ C$ det(r) y 4.2 (i)

Q.E.D.

Proposición 6.6:

(a) $(C_1, C_2 \subset (1\otimes 1) \wedge det(r)) \Rightarrow [\ (r;\ \forall(C_1|C_2) = r) \Leftrightarrow$
$dom((r\otimes 1);C_1) \subset dom((r\otimes 1);C_2)\ ]$

(b) $(C \subset (1\otimes 1)) \wedge det(r)) \Rightarrow [\ ((r;\ \tilde{\Pi}_1;\ C;\ \Pi_1) = r) \Leftrightarrow$
$dom(r) = \tilde{\Pi}_1;\ dom((r\otimes 1);C);\ \Pi_1\ ]$

Prueba:

Prueba de (a):

$(r;\forall(C_1|C_2) = r) \Leftrightarrow ((r\otimes 1);C_1) \subset ((r\otimes 1);C_2)$ 5.2 y 5.4

$(r;\forall(C_1|C_2) = r) \Leftrightarrow dom((r\otimes 1);C_1) \subset dom((r\otimes 1);C_2)$ det(r) y 5.5

Prueba de (b):

$det(r) \wedge (C\subset 1) \Rightarrow ((dom(r;C) = dom(r)) \Leftrightarrow (r;C = r))$

Sustituyendo en 5.5 (b) C por $\tilde{\Pi}_1;\ C;\ \Pi_1$ y por Ax. (4):

$(C \subset (1\otimes 1) \wedge det(r)) \Rightarrow [\ ((r;\ \tilde{\Pi}_1;\ C;\ \Pi_1) = r) \Leftrightarrow$
$(dom(\tilde{\Pi}_1;\ (r\otimes 1);\ C;\ \Pi_1) = dom(r))]$ (*)

$(r\otimes 1);\ C \subset (r\otimes 1);\ (1\otimes 1) = (r\otimes 1) \subset (\infty\nabla\infty)$ 4.2 (a), 4.7 (m)

$dom(\tilde{\Pi}_1;\ (r\otimes 1);\ C;\ \Pi_1) = \tilde{\Pi}_1;\ dom((r\otimes 1);\ C);\ \Pi_1$ 4.8 (k) (**)

Sustituyendo (**) en (*):

$(C \subset (1\otimes 1) \wedge det(r)) \Rightarrow [\ ((r;\ \tilde{\Pi}_1;\ C;\ \Pi_1) = r) \Leftrightarrow$
$(\tilde{\Pi}_1;\ dom((r\otimes 1);\ C);\ \Pi_1 = dom(r))]$

Q.E.D.

Transformación de propiedades en condiciones universales

Usualmente se tiene que la propiedad a probar no tiene la forma de una condición universal, pero sin embargo lo es.

Proposición 5.7: La siguiente propiedad permite introducir una condición en una condición universal:

$(C_1 \subset 1) \wedge (C_2, C_3 \subset (1\otimes 1)) \Rightarrow$
$[\ C_1;\ \forall(C_2|C_3) = \forall(((\overline{(C_1\otimes 1)}\cdot 1) + C_2)|((C_1\otimes 1);\ C_3))\ ]$

Prueba:

Se obtienen términos equivalentes a:

$\overline{(\overline{(\overline{C_1\otimes 1})\cdot 1) + C_2)}} \cdot 1 + ((C_1\otimes 1); C_3))$

$((\overline{(\overline{C_1\otimes 1})\cdot 1)} \cdot \overline{C_2} \cdot 1) + ((C_1\otimes 1); C_3))$ B.A.P.

$((C_1\otimes 1) \cdot (\overline{C_2}\cdot 1)) + ((C_1\otimes 1); C_3))$ B.A.P. y CA14

$(C_1\otimes 1) \cdot ((\overline{C_2}\cdot 1) + C_3)$ CA2 y CA3

$\overline{\tilde{\Pi}_1; \overline{(\overline{(\overline{C_1\otimes 1})\cdot 1) + C_2)} \cdot 1 + ((C_1\otimes 1); C_3))} \cdot 1 ;\Pi_1} \cdot 1$

$\overline{\tilde{\Pi}_1; \overline{(C_1\otimes 1) \cdot ((\overline{C_2}\cdot 1)+ C_3)} \cdot 1 ;\Pi_1} \cdot 1$

$\overline{\tilde{\Pi}_1; ((\overline{C_1\otimes 1}) + \overline{((\overline{C_2}\cdot 1)+ C_3))} \cdot 1 ;\Pi_1} \cdot 1$ B.A.P

$\overline{\tilde{\Pi}_1; ((\overline{C_1\otimes 1})\cdot 1) + (((\overline{\overline{C_2}\cdot 1)+C_3)}\cdot 1) ;\Pi_1} \cdot 1$ CA3

$\overline{\tilde{\Pi}_1; ((\overline{C_1}\cdot 1)\otimes 1) + (((\overline{\overline{C_2}\cdot 1)+C_3)}\cdot 1) ;\Pi_1} \cdot 1$ 4.7 (o) y (q)

$\overline{(\overline{C_1}\cdot 1) + \tilde{\Pi}_1; \overline{((\overline{C_2}\cdot 1)+C_3)}\cdot 1 ;\Pi_1} \cdot 1$ 4.5 (e)

$C_1 \cdot (\overline{\tilde{\Pi}_1; \overline{((\overline{C_2}\cdot 1)+C_3)}\cdot 1 ;\Pi_1} \cdot 1)$ B.A.P. y CA14

$C_1; \forall(C_2|C_3)$ 4.2 (h)

Q.E.D.

Se estudiará cómo convertir una fórmula del tipo $\forall(C_1|\forall(C_2|C_3))$ a una sola condición universal que involucre a C_i, $i \in 1..3$. Para esto es necesario trabajar con términos funcionales inyectivos que cambian la estructura del dominio.

Proposición 5.8: Sea $\rho = (\Pi_{11} \nabla (\Pi_{12} \nabla \Pi_2))$ entonces:

(a) $\rho;\tilde{\rho} = (1\otimes(1\otimes 1))$

$\tilde{\rho};\rho = ((1\otimes 1)\otimes 1)$

(b) $(C \subset ((1\otimes 1)\otimes 1)) \subset ((\overline{\tilde{\rho};C};\rho)\cdot(1\otimes(1\otimes 1)) = \tilde{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho)$

(c) $\tilde{\Pi}_1 ; \tilde{\rho} = \tilde{\Pi}_1 ; \tilde{\Pi}_1$

$\rho ; \Pi_1 = \Pi_1 ; \Pi_1$

(d) $\det(r) \Rightarrow ((r \otimes (1 \otimes 1)) ; \tilde{\rho} = \tilde{\rho} ; ((r \otimes 1) \otimes 1))$

(e) $(r, s \subset ((\infty \otimes \infty) \otimes \infty)) \Rightarrow [((\tilde{\rho} ; r ; \rho) \subset (\tilde{\rho} ; s ; \rho)) \Leftrightarrow (r \subset s)]$

Prueba:

Prueba de (a):

$$\tilde{\rho};\rho = (\Pi_{11}\nabla(\Pi_{12}\nabla\Pi_2));\ \widetilde{(\Pi_{11}\nabla(\Pi_{12}\nabla\Pi_2))}$$

$$= (\Pi_{11}\nabla(\Pi_{12}\nabla\Pi_2));\ (\widetilde{\Pi_{11}}\otimes\widetilde{(\Pi_{12}\nabla\Pi_2)});\ \tilde{2} \qquad 4.1\ (e)$$

$$= (\Pi_{11}\nabla(\Pi_{12}\nabla\Pi_2));\ (\widetilde{\Pi_{11}}\otimes(\widetilde{\Pi_{12}}\otimes\tilde{\Pi}_2);\tilde{2});\ \tilde{2} \qquad 4.1\ (e)$$

$$= (\Pi_{11}\nabla(\Pi_{12}\nabla\Pi_2));\ (\widetilde{\Pi_{11}}\otimes(\widetilde{\Pi_{12}}\otimes\tilde{\Pi}_2));\ (1\otimes\tilde{2});\ \tilde{2} \qquad 4.7\ (i)$$

$$= ((\Pi_{11};\widetilde{\Pi_{11}})\nabla((\Pi_{12};\widetilde{\Pi_{12}})\nabla(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2)));\ (1\otimes\tilde{2});\ \tilde{2} \qquad 4.7\ (i)$$

$$= ((\Pi_{11};\widetilde{\Pi_{11}})\nabla((\Pi_{12};\widetilde{\Pi_{12}})\nabla(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2));\tilde{2});\ \tilde{2} \qquad 4.7\ (i)$$

$$= (\Pi_{11};\widetilde{\Pi_{11}})\bullet(\Pi_{12};\widetilde{\Pi_{12}})\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad \text{Ax. } (2)$$

$$= \Pi_1;((\Pi_1;\widetilde{\Pi_{11}})\bullet(\Pi_2;\widetilde{\Pi_{12}}))\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad 4.2\ (n)$$

$$= \Pi_1;((\Pi_1;\tilde{\Pi}_1;\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2;\tilde{\Pi}_1))\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad 4.1\ (b)$$

$$= \Pi_1;(\widetilde{(\Pi_1;\Pi_1;\tilde{\Pi}_1)}\bullet\widetilde{(\Pi_1;\Pi_2;\tilde{\Pi}_2)})\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad 4.1\ (b)$$

$$= \Pi_1;\widetilde{((\Pi_1;\Pi_1;\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_1;\Pi_2;\tilde{\Pi}_2))}\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad 4.1\ (c)$$

$$= \Pi_1;\widetilde{(\Pi_1;((\Pi_1;\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2)))}\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad 4.2\ (n)$$

$$= \Pi_1;(\widetilde{((\Pi_1;\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2))};\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad 4.1\ (b)$$

$$= \Pi_1;(((\Pi_1;\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2));\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad 4.1\ (b,c)$$

$$= (\Pi_1;(1\otimes 1);\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) \qquad \text{Ax. } (3)$$

$$\subset (\Pi_1;\tilde{\Pi}_1)\bullet(\Pi_2;\tilde{\Pi}_2) = (1\otimes 1) \subset 1 \qquad \text{Axs. } (3,4)$$

$$\tilde{\rho};\rho = \mathrm{dom}(\rho) = \mathrm{dom}(\Pi_{11}\nabla(\Pi_{12}\nabla\Pi_2))$$

$$= \mathrm{dom}(\Pi_{11}) \bullet \mathrm{dom}(\Pi_{12} \nabla \Pi_2) = ((1\otimes 1)\otimes 1) \qquad 4.8\ (g)$$

$$\mathrm{dom}(\Pi_{11}) = \mathrm{dom}(\Pi_1;\mathrm{dom}(\Pi_1)) \qquad 4.2\ (m)$$

$$= \mathrm{dom}(\Pi_1;(1\otimes 1)) = ((1\otimes 1)\otimes 1) \qquad 4.8\ h)\ 4.9\ h)$$

$dom(\Pi_{12} \nabla \Pi_2) = dom(\Pi_{12}) \cdot dom(\Pi_2)$	4.8 (g)
$\quad = dom(\Pi_1;dom(\Pi_2)) \cdot dom(\Pi_2)$	4.2 (m)
$\quad = dom(\Pi_1;(1\otimes1)) \cdot (1\otimes1)$	4.8 (h)
$\quad = ((1\otimes1)\otimes1) \cdot (1\otimes1) = ((1\otimes1)\otimes1)$	4.9 (h)

Se prueba la validez en las álgebras relacionales estructuradas de:

$\breve{\rho};\rho = ((1\otimes1)\otimes1)$	
$\breve{\rho};\rho \subset 1$	det(ρ)
$cod(\rho) = \breve{\rho};\rho$	Def. cod

Pero:

$cod(\rho) = ((1\otimes1)\otimes1)$

$x*(y*z)\ cod(\rho)\ x*(y*z)$ si y solo si $(x*y)*z\ \rho\ x*(y*z)$

Prueba de (b):

Se simplifica:

$(\overline{\breve{\rho};C;\rho})\cdot(1\otimes(1\otimes1)) \cdot \overline{\breve{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes1)\otimes1));\rho}$	
$\overline{(\breve{\rho};C;\rho)+(\overline{1\otimes(1\otimes1)})} \cdot \overline{\breve{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes1)\otimes1));\rho}$	B.A.P.
$\overline{(\breve{\rho};C;\rho)+(\overline{1\otimes(1\otimes1)}) + \breve{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes1)\otimes1));\rho}$	B.A.P.
$\overline{(\breve{\rho};(C + (\overline{C}\cdot((1\otimes1)\otimes1)));\rho) + (\overline{1\otimes(1\otimes1)})}$	C8 y C12
$\overline{(\breve{\rho};((1\otimes1)\otimes1);\rho) + (\overline{1\otimes(1\otimes1)})}$	hip., CA3 y B.A.P.
$\overline{(1\otimes(1\otimes1)) + (\overline{1\otimes(1\otimes1)})}$	5.8 (a)
$\overline{\infty}$	CA7
0	CA8

Se simplifica:

$(\overline{\breve{\rho};C;\rho})\cdot(1\otimes(1\otimes1)) + \overline{\breve{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes1)\otimes1));\rho}$	
$\overline{(\breve{\rho};C;\rho)+(\overline{1\otimes(1\otimes1)})} + \overline{\breve{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes1)\otimes1));\rho}$	B.A.P.

$\overline{((\tilde{\rho};C;\rho) + (\overline{1\otimes(1\otimes 1)})) \cdot \tilde{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho}$ B.A.P.

$\overline{(\tilde{\rho};C;\rho) \cdot \tilde{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho + (\overline{1\otimes(1\otimes 1)}) \cdot \tilde{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho}$
CA3

$(\overline{1\otimes(1\otimes 1)}) \cdot \tilde{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho = 0$ 5.8 (a) y B.A.P.

$\overline{(\tilde{\rho};C;\rho) \cdot \tilde{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho}$

$\overline{(\tilde{\rho};C;\rho) \; ; \; \tilde{\rho};(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho}$ 4.2 (h)

$\overline{(\tilde{\rho};C;((1\otimes 1)\otimes 1);(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho}$ 5.8 (a)

$\overline{(\tilde{\rho};(C;((1\otimes 1)\otimes 1))\cdot(\overline{C}\cdot((1\otimes 1)\otimes 1));\rho} = \overline{0} = \infty$ B.A.P. y 4.2 (h)

Prueba de (c):

$dom(\Pi_{11}) = ((1\otimes 1)\otimes 1)$ Ver (a)
$dom(\Pi_{12} \nabla \Pi_2) = ((1\otimes 1)\otimes 1)$ Ver (a)

$\rho;\ \Pi_1 = (\Pi_{11} \nabla (\Pi_{12} \nabla \Pi_2));\ \Pi_1 = \Pi_{11}$ 4.4 (a)

$\tilde{\Pi}_1;\ \tilde{\rho} = \widetilde{\rho;\ \Pi_1} = \widetilde{\Pi_1;\ \Pi_1} = \tilde{\Pi}_1;\ \tilde{\Pi}_1$ 4.1 (b)

Prueba de (d):

$\rho;\ ((r\otimes(1\otimes 1)) = (\Pi_{11} \nabla (\Pi_{12} \nabla \Pi_2));\ ((r\otimes(1\otimes 1))$
$= (\Pi_{11};\ r.\nabla\ (\Pi_{12} \nabla \Pi_2))$ 4.7 (i)
$= (((r\otimes 1)\otimes 1));\ \Pi_{11} \nabla (\Pi_{12} \nabla \Pi_2))$ 4.5 (c)

$((r\otimes 1)\otimes 1));\ \rho = ((r\otimes 1)\otimes 1));\ (\Pi_{11} \nabla (\Pi_{12} \nabla \Pi_2))$
$= (((r\otimes 1)\otimes 1);\ \Pi_{11} \nabla ((r\otimes 1)\otimes 1));\ (\Pi_{12} \nabla \Pi_2))$

det(r) y 4.7 (j)

$= (((r\otimes 1)\otimes 1);\ \Pi_{11} \nabla ((dom(r)\otimes 1)\otimes 1);\ \Pi_{12} \nabla$
$((dom(r)\otimes 1)\otimes 1);\ \Pi_2))$

det(r), 4.7 (j) y 4.5 (c,d)

$= ((dom(r)\otimes 1)\otimes 1);\ (((r\otimes 1)\otimes 1);\ \Pi_{11} \nabla$
$(\Pi_{12} \nabla \Pi_2))$ 4.7 (j)
$= (((r\otimes 1)\otimes 1);\ \Pi_{11} \nabla (\Pi_{12} \nabla \Pi_2))$

Entonces:

$\rho;\ ((r\otimes(1\otimes1)) = ((r\otimes1)\otimes1));\ \rho$

$\rho;\ ((r\otimes(1\otimes1));\ \tilde{\rho} = ((r\otimes1)\otimes1));\ \rho;\ \tilde{\rho}$	Reemplazo
$= ((r\otimes1)\otimes1));\ ((1\otimes1)\otimes1))$	5.8 (a)
$= ((r\otimes1)\otimes1))$	4.7 (m)
$\rho;\ ((r\otimes(1\otimes1));\ \tilde{\rho};\ \rho = ((r\otimes1)\otimes1));\ \rho$	Reemplazo
$\rho;\ ((r\otimes(1\otimes1));\ ((1\otimes(1\otimes1)) = ((r\otimes1)\otimes1));\ \rho$	5.8 (a)
$\rho;\ ((r\otimes(1\otimes1)) = ((r\otimes1)\otimes1));\ \rho$	4.7 (m)

Prueba de (e):

$(\tilde{\rho};r;\rho) \subset (\tilde{\rho};s;\rho)$	hip.
$\rho;(\tilde{\rho};r;\rho);\tilde{\rho} \subset \rho;(\tilde{\rho};s;\rho);\tilde{\rho}$	4.2 (a)
$(\rho;\tilde{\rho});r;(\rho;\tilde{\rho}) \subset (\rho;\tilde{\rho});s;(\rho;\tilde{\rho})$	CA11
$(1\otimes(1\otimes1));r;(1\otimes(1\otimes1)) \subset (1\otimes(1\otimes1));s;(1\otimes(1\otimes1))$	5.8 (a)
$cod(r) \subset cod(\infty\otimes(\infty\otimes\infty)) = (1\otimes(1\otimes1))$	hip.,4.9 (f)
$r = r;\ cod(r) = r;\ (cod(r)\cdot(1\otimes(1\otimes1)))$	4.2 (f)
$= r;\ (cod(r);(1\otimes(1\otimes1))) = r;(1\otimes(1\otimes1))$	4.2 (h)
$s = s;(1\otimes(1\otimes1))$	analog.
$(1\otimes(1\otimes1));r \subset (1\otimes(1\otimes1));s$	reemplazos
$dom(r) \subset dom(\infty\otimes(\infty\otimes\infty)) = (1\otimes(1\otimes1))$	hip.,4.8 (i)
$r = dom(r);r = ((1\otimes(1\otimes1))\cdot dom(r));r$	4.2 (e)
$= ((1\otimes(1\otimes1));dom(r));r = (1\otimes(1\otimes1));r$	4.2 (h)
$s = (1\otimes(1\otimes1));r$	analog.
$r \subset s$	reemplazos

Q.E.D.

Proposición 5.9:

$(C_1, C_2, C_3 \subset 1) \Rightarrow \forall(C_1|\forall(C_2|C_3)) = \forall((\tilde{\rho};(C_1\otimes1);C_2;\rho)|(\tilde{\rho};C_3;\rho))$

$\rho = (\Pi_{11}\ \nabla\ (\Pi_{12}\ \nabla\ \Pi_2))$

Prueba:

Se hallarán términos equivalentes a:

$\overline{C_1}\cdot1 + \forall(C_2|C_3)$

$\overline{C_1}\cdot 1 + \tilde{\Pi}_1 ; \overline{((\overline{C_2\cdot 1})+C_3)\cdot 1} ;\Pi_1\cdot 1$ Def. $\forall$

$(\overline{C_1} + \tilde{\Pi}_1 ; \overline{((\overline{C_2\cdot 1})+C_3)\cdot 1} ;\Pi_1)\cdot 1$ CA3

$\overline{C_1 ; \tilde{\Pi}_1 ; ((\overline{C_2\cdot 1})+C_3)\cdot 1 ;\Pi_1}\cdot 1$ B.A.P. y 4.2 (h)

$\overline{\tilde{\Pi}_1 ; (C_1\otimes 1) ; ((\overline{C_2\cdot 1})+C_3)\cdot 1 ;\Pi_1}\cdot 1$ 4.5 (e)

$\overline{\tilde{\Pi}_1 ; \overline{\overline{(C_1\otimes 1)} + (\overline{C_2\cdot 1}) + C_3}\cdot 1 ;\Pi_1}\cdot 1$ B.A.P. y 4.2 (h)

$\overline{\tilde{\Pi}_1 ; (\overline{\overline{(C_1\otimes 1)\cdot C_2}\cdot 1}) + C_3 \cdot 1 ;\Pi_1}\cdot 1$ B.A.P.

Entonces $\forall(C_1|\forall(C_2|C_3))$ es el término:

$\overline{\tilde{\Pi}_1 ; \overline{(\tilde{\Pi}_1 ; \overline{\overline{(C_1\otimes 1)\cdot C_2}\cdot 1}) + C_3 \cdot 1 ;\Pi_1 \cdot 1)}\cdot 1 ;\Pi_1}\cdot 1$

$\overline{\tilde{\Pi}_1 ; \tilde{\Pi}_1 ; (\overline{\overline{(C_1\otimes 1)\cdot C_2}\cdot 1}) + C_3 \cdot 1 ; \Pi_1 ; \Pi_1}\cdot 1$ B.A.P. y CA14

Se calcula una expresión para:

$\overline{\overline{(\tilde{\rho};(C_1\otimes 1);C_2;\rho)}\cdot 1 + (\tilde{\rho};C_3;\rho)}\cdot 1$

$\overline{(\tilde{\rho};(\overline{(C_1\otimes 1);C_2}\cdot 1);\rho) + (\tilde{\rho};C_3;\rho)}\cdot 1$ 5.8 (b)

$\overline{(\tilde{\rho};\ ((\overline{(C_1\otimes 1);C_2}\cdot 1) + C_3);\ \rho)}\cdot 1$ C8 y C12

$\tilde{\rho};\ (\overline{((\overline{(C_1\otimes 1);C_2}\cdot 1) + C_3)\cdot 1});\ \rho$ 5.8 (b)

Entonces: $\forall((\tilde{\rho};(C_1\otimes 1);C_2;\rho)|(\tilde{\rho};C_3;\rho))$ es:

$\overline{\tilde{\Pi}_1 ;\ \tilde{\rho};\ (\overline{(\overline{(C_1\otimes 1);C_2}\cdot 1 + C_3}\cdot 1);\ \rho;\ \Pi_1}\cdot 1$

$\overline{\tilde{\Pi}_1 ;\ \tilde{\Pi}_1 ;\ (\overline{\overline{(C_1\otimes 1);C_2}\cdot 1 + C_3}\cdot 1);\ \Pi_1 ;\Pi_1}\cdot 1$ 5.8 (c)

Q.E.D.

El siguiente resultado muestra que no hay que preocuparse del ρ para probar fórmulas del tipo: $r;\ \forall((\rho;(C_1\otimes 1);C_2;\rho)|(\rho;C_3;\rho)) = r$

Proposicion 5.10: Se tienen la siguientes propiedades:

(a) $((C_1 \subset (1\otimes 1)) \wedge (C_2, C_3 \subset ((1\otimes 1)\otimes 1)) \wedge \mathrm{det}(r)) \Rightarrow$
$[r;\ (\forall(C_1|\forall(C_2|C_3)) = r) \Leftrightarrow$
$(((r\otimes 1)\otimes 1);(C_1\otimes 1);C_2) \subset (((r\otimes 1)\otimes 1);C_3)$

(b) $((C_1 \subset (1\otimes 1)) \wedge (C_2, C_3 \subset ((1\otimes 1)\otimes 1)) \wedge \mathrm{det}(r)) \Rightarrow$
$[r;\ (\forall(C_1|\forall(C_2|C_3)) = r) \Leftrightarrow$
$\mathrm{dom}(((r\otimes 1)\otimes 1);(C_1\otimes 1);C_2) \subset \mathrm{dom}(((r\otimes 1)\otimes 1);C_3)$

Prueba:

Prueba de (a):

$\forall(C_1|\forall(C_2|C_3)) = \forall((\tilde{\rho};(C_1\otimes 1);C_2;\rho)|(\tilde{\rho};C_3;\rho))$ 5.9

$(r;\ \forall((\tilde{\rho};(C_1\otimes 1);C_2;\rho)|(\tilde{\rho};C_3;\rho)) = r) \Leftrightarrow$

$(r\otimes(1\otimes 1));(\tilde{\rho};(C_1\otimes 1);C_2;\rho) \subset (r\otimes(1\otimes 1));(\tilde{\rho};C_3;\rho) \Leftrightarrow$ 5.2 y 5.4

$(\tilde{\rho};((r\otimes 1)\otimes 1);(C_1\otimes 1);C_2;\rho) \subset (\tilde{\rho};((r\otimes 1)\otimes 1);C_3;\rho) \Leftrightarrow$ 5.8 (d)

$((r\otimes 1)\otimes 1);(C_1\otimes 1);C_2 \subset ((r\otimes 1)\otimes 1);C_3$ 5.8 (e)

Prueba de (b): 5.5 (a)

Q.E.D.

6. PRUEBA DE CONDICIONES QUE INVOLUCRAN INVARIANTES

Definición: Sean i y r términos, i asociado a una fórmula (i.e. $i = \tau(\varphi)$, φ fórmula de primer orden) i se dice un **invariante para** r si y solo si $i;\ r = i;\ r;\ i$

Se observa que probar que un término es invariante para otro es equivalente a probar la propiedad i para el término $i;\ r$. (ver sección 5).

El tipo de identidades cuya prueba se estudia en esta sección fue motivada por numerosos ejemplos de derivación de programas realizados antes de escribir este trabajo (ellos no se incluyen por razones de espacio).

Se estudian condiciones razonables para la validez de identidades del tipo:

inv; C; t = **inv**; C; s; **inv**; r

Donde **inv**, $C \subset 1$ términos asociados a fórmulas de primer orden; s término que representa una transformación del dominio de C que preserva **inv** y t un término apropiado para obtener la igualdad.

En la mayoría de los ejemplos de derivación realizados se encontró que t y r son el mismo término y s es funcional. Además **inv** es una aserción introducida luego de una generalización de dominio y **C** una condición que aparece luego de una partición en casos.

Teorema 6.1:

$$[(C \subset 1) \wedge (inv \subset 1) \wedge (C;t = C;s;r) \wedge det(s) \wedge (inv;C = dom((inv;C);(s;inv)))] \Rightarrow (inv;C;t = inv;C;s;inv;r)$$

Prueba:

$$\begin{aligned} inv;C &= dom((inv;C);(s;inv)) && \text{hip.} \\ &= dom((inv;C);dom(s;inv)) && 4.2\ (m) \\ &= dom((inv;C)\cdot dom(s;inv)) && 4.2\ (h) \\ &= (inv;C);\ dom(s;inv)) && 4.2\ (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} inv;C;t &= inv;C;s;r && \text{hip.} \\ &= (inv;C);\ dom(s;inv);s;r && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s;inv &= dom(s;inv);(s;inv) \ \subset dom(s;inv);s && 4.2\ (a) \\ s;inv &= s;inv + s;inv && \text{B.A.P.} \\ &= s;(inv;\infty \cdot 1) + s;inv && 4.2\ (i) \\ &= ((s;inv;\infty)\cdot s) + s;inv && det(s) \text{ y } 4.2\ (n) \\ &= ((s;inv;\infty)\cdot 1);s + s;inv && 4.2\ (b) \text{ y CA2} \\ &= dom(s;inv);s + s;inv && \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposición 6.2:

$$(C \subset 1) \Rightarrow ((C \subset dom(s)) \Leftrightarrow (C = dom(C;s)))$$

Prueba:

$$\begin{aligned} C &= dom(C;s) = dom(C;dom(s)) && \text{hip. y } 4.2\ (m) \\ &= dom(C\cdot dom(s)) = C\cdot dom(s) && 4.2\ (h) \text{ e } (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= C\cdot dom(s) = dom(C\cdot dom(s)) && \text{hip. } 4.2\ (i) \\ &= dom(C;dom(s)) = dom(C;s) && 4.2\ (m) \text{ y } (h) \end{aligned}$$

Q.E.D.

La última condición indica que **inv** se preserva luego de una transformación del dominio de C.

Proposición 6.3:

$$(dom(C;s) = C) \wedge (inv;C;s = inv;C;s;inv) \Rightarrow (inv;C = dom(inv;C;s;inv))$$

Prueba:

$inv;C$	$= inv;dom(C;s)$	hip.(1)
	$= dom(inv;dom(C;s))$	4.2 (l)
	$= dom(inv;C;s)$	4.2 (m)
	$= dom(inv;C;s;inv)$	hip.(2)

Q.E.D.

Entonces el problema de probar $inv;\ C;\ t = inv;\ C;\ s;\ inv;\ r$ se reduce a verificar que inv es un invariante para la relación $inv;C;s$. Este es un caso especial del problema de la sección 5. Pero todavía no se consideró qué pasa cuando la relación a preservar tiene la forma $inv;C;s$:

Proposicion 6.4

$$[\ (C_1, C_2 \subset 1) \wedge det(r) \wedge (inv = \forall(C_1 | C_2))\ ] \Rightarrow [\ (inv;s = inv;s;inv) \Leftrightarrow (((inv \otimes 1);\ dom((s \otimes 1);C_1)) \subset dom((s \otimes 1);C_2))\ ]$$

Prueba:

$(inv;s = inv;s;inv) \Leftrightarrow$	5.2 y 5.4
$((inv;s) \otimes 1);C_1) \subset ((inv;s) \otimes 1);C_2) \Leftrightarrow$	4.7 (m)
$((inv \otimes 1);(s \otimes 1);C_1) \subset ((inv \otimes 1);(s \otimes 1);C_2) \Leftrightarrow$	5.6 (a)
$dom((inv \otimes 1);(s \otimes 1);C_1) \subset dom((inv \otimes 1);(s \otimes 1);C_2) \Leftrightarrow$	4.2 (m,l,h)
$(((inv \otimes 1);dom((s \otimes 1);C_1)) \subset dom((s \otimes 1);C_2))$	

Q.E.D.

Se estudia el caso en que se puede descomponer $dom((s \otimes 1);C_i)$, $\in \{1,2\}$ mediante:

(a) $dom((s \otimes 1);C_1) = D_1;\ \ldots;\ D_n$ donde $D_i \subset 1,\ i \in 1..n$

(b) $dom((s \otimes 1);C_2) = E_1;\ \ldots;\ E_m$ donde $E_j \subset 1,\ j \in 1..m$

Entonces $inv;s = inv;s;inv$ es equivalente a :

$(inv \otimes 1);\ D_1;\ \ldots;\ D_n \subset E_1;\ \ldots;\ E_m$

Esto último es equivalente a:

$(inv \otimes 1);\ D_1;\ \ldots;\ D_n \subset E_j$ para todo $j \in 1..m$

Proposición 6.5:

$$[\ (dom((s\otimes 1);C_1) = D_1;\ \ldots;\ D_n) \wedge (D_1,\ldots,D_n \subset 1) \wedge$$
$$(dom((s\otimes 1);C_2) = E_1;\ \ldots;\ E_m) \wedge (E_1,\ldots,E_m \subset 1) \wedge$$
$$(C_1, C_2 \subset 1) \wedge det(r) \wedge (inv = \forall(C_1|C_2))\ ] \Rightarrow$$
$$[\ (inv;s = inv;s;inv) \Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{m} (inv\otimes 1);\ D_1;\ \ldots;\ D_n \subset E_j)\ ]$$

Prueba: Trivial.

Q.E.D.

Entonces probar $inv;s = inv;s;inv$ donde $inv = \forall(C_1|C_2)$ es equivalente a demostrar:

$$(\forall(C_1|C_2)\otimes 1);\ D \subset E_j \quad j \in 1..m$$

donde $D = dom((s\otimes 1);C_1) = D_1;\ \ldots;\ D_n$
y $dom((s\otimes 1);C_2) = E_1;\ \ldots;\ E_m$

Se considera el caso (que ocurre frecuentemente) en que D se puede descomponer mediante:

$D = A + B$ donde $A \subset C_1$

Como E_j se "parece" a C_2 a menudo es útil considerar que pasa cuando $A \subset C_1$ y $C_2 \subset E_j$:

Proposición 6.6: En las álgebras relacionales estructuradas se es válida la fórmula:

$$((A \subset C_1) \wedge (C_2 \subset E)) \Rightarrow ((\forall(C_1|C_2)\otimes 1);\ A \subset E)$$

Prueba:

Sea $x*y\ ((\forall(C_1|C_2)\otimes 1);\ A\ x*y$ entonces:
$x\ \forall(C_1|C_2)\ x$ e $x*y\ A\ x*y$
pero por primera hipótesis: $x*y\ C_1\ x*y$ entonces:
$x*y\ C_2\ x*y$ por segunda hipótesis:
$x*y\ E\ x*y$

Q.E.D.

De la última propiedad existen muchas variantes que surgen al considerar el caso en que:

$A \subset \breve{\delta};\ C_1;\ \delta$

donde δ es un termino funcional ingectivo.

7 UN EJEMPLO DE DERIVACION: HAMMING'S PROBLEM

A continuación se presenta un ejemplo de derivación donde se utilizan las fórmulas de las secciones 5 y 6.

7.1 *Tipos Básicos*

Números naturales:

Se tienen *constantes* que se interpretan en las álgebras relacionales estructuradas como las relaciones:

$$
\begin{aligned}
cero &= \{\langle u,0\rangle : u \in \mathfrak{U}\}\\
suc &= \{\langle n,n+1\rangle : n \in Nat\}\\
pred &= \{\langle n,n-1\rangle : n \in Nat-\{0\}\}\\
sum &= \{\langle n_1 * n_2, n\rangle : n, n_1, n_2 \in Nat \wedge n = n_1 + n_2\}\\
mul &= \{\langle n_1 * n_2, n\rangle : n, n_1, n_2 \in Nat \wedge n = n_1 \times n_2\}\\
pot &= \{\langle n*p, m\rangle : n, p, m \in Nat \wedge m = n^p\}\\
> &= \{\langle n_1 * n_2, n_1 * n_2\rangle : n_1, n_2 \in Nat \wedge n_1 > n_2\}\\
< &= \{\langle n_1 * n_2, n_1 * n_2\rangle : n_1, n_2 \in Nat \wedge n_1 < n_2\}
\end{aligned}
$$

Listas de naturales:

Se tienen *constantes* que se interpretan en las álgebras relacionales estructuradas como las relaciones:

$$
\begin{aligned}
nil &= \{\langle u,\Lambda\rangle : u \in \mathfrak{U} \text{ y } Lo = \{\Lambda\}\}\\
hd &= \{\langle l,c\rangle : l \in L-Lo \wedge c \in Nat \wedge c = head(l)\}\\
tl &= \{\langle l,l'\rangle : l \in L-Lo \wedge l' = tail(l)\}\\
last &= \{\langle l,c\rangle : l \in L-Lo \wedge c \in Nat \wedge c = last(l)\}\\
app &= \{\langle l*c,l'\rangle : l \in L \wedge c \in Nat \wedge l' = append(l,c)\}\\
cons &= \{\langle c*l,l'\rangle : l \in L \wedge c \in Nat \wedge l' = cons(c,l)\}\\
lon &= \{\langle l,c\rangle : l \in L \wedge c \in Nat \wedge c = lenght(l)\}\\
in &= \{\langle c*l,c*l\rangle : c \in Nat \wedge l \in L-Lo \wedge\\
&\qquad \exists l',l'' \in L \quad l = concat(append(l',c),l'')\}\\
elem &= \{\ \langle l*i,c\rangle : i \in Nat \wedge l \in L \wedge [\ (c \in nat \wedge\\
&\qquad \exists\ l',l'' \in L \quad len(l') = i-1 \wedge len(l'') = len(l)-i-1\\
&\qquad \wedge\ l = concat(app(l',c),l'')) \vee (i > lon(l) \wedge c=\perp)\ ]\ \}
\end{aligned}
$$

7.2 *Especificación*

Enunciado: Generar en orden creciente los primeros n números naturales divisibles sólo por los primos 2, 3 y 5.

Se buscan términos cuya interpretación en los modelos propios sean las relaciones:

$$
\begin{aligned}
Ham = \{\ &\langle n,l\rangle : n \in Nat \wedge l \in L-Lo \wedge l \text{ 1ord } l \wedge n = lon(l) \wedge\\
&\forall x\ [(x \in Nat) \wedge (x*l \text{ in } x*l)] \Rightarrow [\ (x\ H\ x) \wedge\\
&\forall y\ ((y \in Nat) \wedge (y < x) \wedge (y\ H\ y)) \Rightarrow (y*s \text{ in } y*s)\ ]\ \}
\end{aligned}
$$

$1ord = \{ \langle l,l\rangle : l \in L \wedge \forall i,j \in Nat \wedge (1 \leq i \leq j \leq lon(l)) \Rightarrow (el(i,l) \leq el(j,l)) \}$

$H = \{ \langle n,n\rangle : n \in Nat \wedge \exists\ i,j,k \in Nat \wedge n = 2^i * 3^j * 5^k \}$

Los términos buscados son:

$$Ham = 1_{\langle 0\rangle};\ nil + 1_{Nat-\langle 0\rangle};\ \breve{\Pi}_1;\ (1_{Nat} \otimes 1ord);\ \mathcal{C};\ \forall(C_2 \mid (C_3;\forall(C_4 \mid C_5)));\ \Pi_2$$

$$C_1 = ((1_{Nat} \otimes 1_L) \nabla (\Pi_1 \nabla \Pi_2;lon);\ \breve{2});\ \Pi_1$$

$$C_2 = ((1_{Nat} \otimes 1_L) \otimes 1_{Nat}) \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{12});\ in);\ \Pi_1$$

$$C_3 = ((1_{Nat} \otimes 1_L) \otimes (1_{Nat};\ H))$$

$$C_4 = (((1_{Nat} \otimes 1_L) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla ((\Pi_2 \nabla \Pi_{12}));\ \langle \nabla\ (\Pi_2;H)));\ \Pi_1$$

$$C_5 = ((((1_{Nat} \otimes 1_L) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{112});\ in);\ \Pi_1$$

$$H = \breve{\Pi}_1;\ (1_{Nat} \otimes ((1_{Nat} \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}));\ C;\ \breve{2}$$

$$C = (1_{Nat} \otimes ((1_{Nat} \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}));\ (\Pi_1 \nabla (\Pi_2;\ (((1 \nabla V_{\langle 2\rangle});pot \otimes (1 \nabla V_{\langle 3\rangle});pot);\ mul \otimes (1 \nabla V_{\langle 5\rangle});pot);\ mul)$$

$V_{\langle 1\rangle} = \mathit{cod}(cero;suc)$
$V_{\langle 2\rangle} = \mathit{cod}(cero;suc;suc)$
$V_{\langle 3\rangle} = \mathit{cod}(cero;suc;suc;suc)$
$V_{\langle 5\rangle} = \mathit{cod}(cero;suc;suc;suc;suc;suc)$

$1_{Nat} = 1_{\langle 0\rangle} + 1_{Nat-\langle 0\rangle}$ donde:
$1_{\langle 0\rangle} = \mathit{dom}(cero)$
$1_{Nat-\langle 0\rangle} = \mathit{dom}(pred)$

$1_L = \mathit{dom}(lon)$
$1_{LO} = \mathit{dom}(nil)$
$1_{L-LO} = \mathit{cod}(cons)$

$$1ord = 1_{LO} + 1_{L-LO};\ \forall(D_1 \mid D_2)$$

$$D_1 = ((1_{L-LO} \otimes (1_{Nat} \otimes 1_{Nat})) \nabla (((V_{\langle 1\rangle} \nabla \Pi_{21});\ \leq\ \nabla\ (\Pi_{21} \nabla \Pi_{22});\ \leq) \nabla (\Pi_{22} \nabla \Pi_1;lon);\ \leq));\ \Pi_1$$

$$D_2 = ((1_{L-LO} \otimes (1_{Nat} \otimes 1_{Nat})) \nabla ((\Pi_{21} \nabla \Pi_1);\ elem \nabla (\Pi_{22} \nabla \Pi_1);\ elem);\ \leq);\ \Pi_1$$

7.3 Derivación de término operacional para Ham

Generalización de dominio con aserción

Se busca término que se interpreta en los modelos propios como:

$$\begin{array}{l} isham = \{ \langle u{*}l, u{*}l \rangle : u \in \mathcal{U} \wedge l \in L\text{-}Lo \wedge l \ 1ord \ l \wedge \\ \quad \forall x \ [(x \in Nat) \wedge (x{*}l \ in \ x{*}l)] \Rightarrow [(x \ H \ x) \wedge \\ \quad \forall y \ ((y \in Nat) \wedge (y < x) \wedge (y \ H \ y)) \Rightarrow (y{*}s \ in \ y{*}s)] \} \end{array}$$

Un candidato es:

$isham = (1 \otimes 1_{ord}); \forall(C_2 | (C_3 ; \forall(C_4 | C_5)))$

donde C_i definidos en sección 7.2 $i \in 2..5$.

Se tiene la incrustación:

(a) $Ham = 1_{\langle o \rangle}; nil + 1_{Nat-\langle o \rangle}; (pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons); Hm$

(b) $Hm = (1_{Nat} \otimes 1_{L-LO}); isham; (1_{Nat} \otimes lon); sum; ham$

Prueba:

Se presentan los pasos necesarios a probar:

Reemplazo en (a) según (b):

(1) $Ham = 1_{\langle o \rangle}; nil + (pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons); (1_{Nat} \otimes 1_{L-LO}); isham; (1_{Nat} \otimes lon); sum; Ham$

Se tiene propiedad:

(2) $(pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons); (1_{Nat} \otimes 1_{L-LO}) = (pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons)$

Reemplazo en (1) según (2):

(3) $Ham = 1_{\langle o \rangle}; nil + (pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons); isham; (1_{Nat} \otimes lon); sum; Ham$

Se tiene la propiedad:

(4) $(pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons); isham = (pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons)$

Reemplazo en (3) según (4):

(5) $Ham = 1_{\langle o \rangle}; nil + (pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons); (1_{Nat} \otimes lon); sum; Ham$

Distributividad de ∇ respecto de $\otimes$ en (5):

(6) $Ham = 1_{\langle o \rangle}; nil + (pred; 1_{Nat} \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons; lon); sum; Ham$

Se tiene la propiedad:

(7) $pred; 1_{Nat} = pred$

Reemplazando en (6) según (7):

(8) $Ham = 1_{\langle o \rangle}; nil + (pred \nabla (V_{\langle 1 \rangle} \nabla nil); cons; lon); sum; Ham$

Se tiene la propiedad:

(9) $(V_{\langle 1\rangle} \nabla nil);\ cons;\ lon) = V_{\langle 1\rangle}$

Reemplazo en (7) según (8):

(10) $Ham = 1_{\langle 0\rangle};\ nil + (pred \nabla V_{\langle 1\rangle});\ sum;\ Ham$

Se tiene la propiedad:

(11) $1_{Nat-\langle 0\rangle} = (pred \nabla V_{\langle 1\rangle});\ sum$

Reemplazo en (9) según (10):

(12) $Ham = 1_{\langle 0\rangle};\ nil + 1_{Nat-\langle 0\rangle};\ Ham$

Derivación de expresión recursiva para Hm

Se tiene hasta ahora:

(b) $Hm = (1_{Nat} \otimes 1_{L-LO});\ isham;\ (1_{Nat} \otimes lon);\ sum;\ ham$

Se tiene la propiedad:

(c) $1_{Nat} = 1_{\langle 0\rangle} + 1_{Nat-\langle 0\rangle}$

Reemplazo en (b) según (c):

(d) $Hm = ((1_{\langle 0\rangle} + 1_{Nat-\langle 0\rangle}) \otimes 1_{L-LO});\ isham;\ (1_{Nat} \otimes lon);\ sum;\ ham$

Por distributividad de + respecto de $\otimes$ en (d):

(e) $Hm = ((1_{\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO}) + (1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO}));$
$isham;\ (1_{Nat} \otimes lon);\ sum;\ ham$

Por distributividad de + respecto de ; en (e):

(f) $Hm = (1_{\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO});\ isham;\ (1_{Nat} \otimes lon);\ sum;\ ham +$
$(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO}));\ isham;\ (1_{Nat} \otimes lon);\ sum;\ ham$

Se tiene la propiedad:

(g) $(1_{\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO});\ isham;\ (1_{Nat} \otimes lon);\ sum;\ ham =$
$(1_{\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO});\ isham;\ \Pi_2$

Reemplazo en (f) según (g):

(h) $Hm = (1_{\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO});\ isham;\ \Pi_2 +$
$(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO}));\ isham;\ (1_{Nat} \otimes lon);\ sum;\ ham$

Se busca un término interpretado en los modelos propios como:

$nexth = \{ \langle n,m\rangle : n,m \in Nat \wedge m > n \wedge H(m) \wedge$
$\forall p\ (p \in Nat \wedge n < p < m) \Rightarrow \neg H(p) \}$

El término es:

$nexth = \tilde{\Pi}_1;\ E;\ \forall(E_1 | E_2);\ \Pi_2$

donde:

$E = ((1_{Nat} \otimes 1_{Nat}) \nabla (\langle \nabla \Pi_2;H));\ \Pi_1$

$E_1 = (((1_{Nat} \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla ((\Pi_{11} \nabla \Pi_2);\ \langle \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{12});\ \langle));\ \Pi_1$

$E_2 = ((1_{Nat} \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat};\ \overline{H}^{*}\ 1)$

Se tiene la propiedad:

(i) $(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; isham; $(1_{Nat} \otimes$ lon); sum =
$(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; isham; (pred $\otimes$ $(1_{L-LO} \nabla$ last;nexth); app);
isham; $(1_{Nat} \otimes$ lon); sum

Por reemplazo en (h) según (i):

(j) Hm = $(1_{\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; isham; Π_2 +
$(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; isham; (pred $\otimes$ $(1_{L-LO} \nabla$ last;nexth);
app); isham; $(1_{Nat} \otimes$ lon); sum; ham

Por reemplazo en (j) según (b):

(k) Hm = $(1_{\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; isham; Π_2 +
$(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; isham; (pred $\otimes$ $(1_{L-LO} \nabla$ last;nexth);
app); Hm

Finalmente por eliminación de isham:

Ham = $1_{\langle 0\rangle}$; nil + $1_{Nat-\langle 0\rangle}$; (pred ∇ $(V_{\langle 1\rangle} \nabla$ nil);cons); Hm

Hm = $(1_{\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; isham; Π_2 + $(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; isham;
(pred $\otimes$ $(1_{L-LO} \nabla$ last; nexth); app); Hm

7.4 *Un ejemplo de prueba de propiedades*

En esta sección se usan las propiedades de las secciones 5 y 6 para probar una de las propiedades para relaciones que aparecieron en el ejemplo anterior. Las demás quedan como ejercicio para el lector interesado. Se va a probar:

isham; $(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; $(1_{Nat} \otimes$ lon); sum =
isham; $(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; (pred $\otimes$ $(1_{L-LO} \nabla$ last;nexth); app);
isham; $(1_{Nat} \otimes$ lon); sum

No se va a presentar la prueba completamente detallada por razones de espacio. Se muestran los pasos más importantes.

Por teorema 6.1 basta probar:

(I) *det*((pred $\otimes$ $(1_{L-LO} \nabla$ last;nexth); app))

(II) $(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; $(1_{Nat} \otimes$ lon); sum =
$(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; (pred $\otimes$ $(1_{L-LO} \nabla$ last;nexth); app);
$(1_{Nat} \otimes$ lon); sum

(III) isham; $(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$ =
dom(isham; $(1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO})$; (pred $\otimes$
$(1_{L-LO} \nabla$ last; nexth); app); isham)

Prueba de II:

Sea el término:

$r = (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})); (pred \otimes (1_{L-LO} \nabla last;nexth); app);$
$(1_{Nat} \otimes lon); sum$

Por distributividad de $\otimes$ y ; en r:

(1) $r = (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})); (pred; 1_{Nat} \otimes$
$(1_{L-LO} \nabla last; nexth); app; lon); sum$

Se tiene la propiedad:

(2) $pred; 1_{Nat} = pred$

Por reemplazo en (1) según (2):

(3) $r = (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})); (pred \otimes$
$(1_{L-LO} \nabla last; nexth); app; lon); sum$

Se tiene la propiedad:

(4) $(1_{L-LO} \nabla last; nexth); app; lon = 1_{L-LO}; lon; suc$

Reemplazando en (3) según (4):

(5) $r = (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})); (pred \otimes 1_{L-LO}; lon; suc); sum$

Se tiene la propiedad:

(6) $(pred \otimes 1_{L-LO}; lon; suc);sum = (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO};lon); sum$

Reemplazando en (5) según (6):

(7) $r = (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})); (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO};lon); sum$

Por distributividad de $\otimes$ con ;:

(8) $r = (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO}; lon); sum$

Por distributividad de $\otimes$ con ;:

(9) $r = (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO}); (1_{Nat} \otimes lon); sum$

Prueba de III:

Por Proposición 6.2 basta probar:

(IV) $dom((1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})); (pred \otimes (1_{L-LO} \nabla last;nexth);app)) =$
$(1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO}))$

(V) $isham; (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})); (pred \otimes (1_{L-LO} \nabla last;nexth);app) =$
$isham; (1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})); (pred \otimes (1_{L-LO} \nabla last;nexth);app);$
$isham$

Prueba de IV:

Por proposición 6.3 basta probar:

$(1_{Nat-\langle O \rangle} \otimes 1_{L-LO})) \subset dom(pred \otimes (1_{L-LO} \nabla last; nexth); app)$

Sea $s = dom(\text{pred} \otimes (1_{L\text{-}LO} \nabla \text{last; nexth}); \text{app})$

Por distributividad de $\otimes$ y *dom*:

(1) $s = dom(\text{pred}) \otimes dom((1_{L\text{-}LO} \nabla \text{last; nexth}); \text{app})$

(2) $cod(1_{L\text{-}LO} \nabla \text{last; nexth}) \subset dom(\text{app})$

4.8 (e) y (2) implican que se puede eliminar app del segundo término de (1):

(3) $s = dom(\text{pred}) \otimes dom(1_{L\text{-}LO} \nabla \text{last; nexth})$

Se tiene propiedad:

(4) $(1_{L\text{-}LO} \nabla \text{last; nexth}) = (1 \nabla 1_{L\text{-}LO}; \text{last; nexth})$

Por reemplazo en (3) según (4):

(5) $s = dom(\text{pred}) \otimes dom(1 \nabla 1_{L\text{-}LO}; \text{last; nexth})$

Por descomposición del dominio de un ∇:

(6) $s = dom(\text{pred}) \otimes (dom(1); dom(1_{L\text{-}LO}; \text{last; nexth}))$

El dominio de una relación contenida en 1 es ella:

(7) $s = dom(\text{pred}) \otimes dom(1_{L\text{-}LO}; \text{last; nexth})$

Se tiene la propiedad:

(8) $cod(1_{L\text{-}LO}; \text{last}) \subset dom(\text{nexth})$

4.8 (e) y (6) implican que se puede eliminar *nexth* del segundo término de (5):

(9) $s = dom(\text{pred}) \otimes dom(1_{L\text{-}LO}; \text{last})$

Se tiene la propiedad:

(10) $1_{L\text{-}LO} = dom(\text{last})$

Se puede eliminar last del segundo término de (7):

(11) $s = dom(\text{pred}) \otimes dom(1_{L\text{-}LO})$

Pero en especificación:

(12) $dom(\text{pred}) = 1_{Nat\text{-}\langle 0\rangle}$

Finalmente:

(13) $s = 1_{Nat\text{-}\langle 0\rangle} \otimes 1_{L\text{-}LO}$

Prueba de V:

$\text{isham} = (1 \otimes 1_{ord}); \forall(C_2 \mid (C_3; \forall(C_4 \mid C_5)))$

Por prop. 5.7:

$\text{isham} = (1 \otimes 1_{ord}); \forall(C_2 \mid (\forall((\overline{C_3 \otimes 1} \cdot 1) + C_4 \mid (C_3 \otimes 1); C_5))$

por prop. 5.9:

$\text{isham} = (1 \otimes 1_{ord}); \forall(\tilde{\rho}; (C_2 \otimes 1); ((\overline{C_3 \otimes 1} \cdot 1) + C_4); \rho \mid \tilde{\rho}; (C_3 \otimes 1); C_5; \rho)$

Basta probar:

(VI) $isham;\ (1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-LO}));\ (pred\otimes\ (1_{L-LO}\nabla last;nexth);app) =$
$isham;\ (1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-LO}));\ (pred\otimes\ (1_{L-LO}\nabla last;nexth);app);$
$(1\ \otimes\ 1_{ord})$

(VII) $isham;(1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-LO}));\ (pred\otimes\ (1_{L-LO}\nabla last;nexth);app) =$

$isham;\ (1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-LO}));\ (pred\otimes\ (1_{L-LO}\nabla last;nexth);app);$
$\forall(\tilde{\rho};(C_2\otimes 1);((\overline{C_3\otimes 1}\ \bullet 1)+C_4);\rho|\tilde{\rho};(C_3\otimes 1);C_5;\rho)$

Solo se presenta la prueba de (VII).

Prueba de VII:

Sea $t = (1_{Nat-\langle 0\rangle}\ \otimes\ 1_{L-LO}));\ (pred\otimes\ (1_{L-LO}\ \nabla\ last;nexth);\ app)$

Por proposición 6.4 basta probar:

$((isham\otimes 1)\otimes 1);\ \mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1);\ ((\overline{C_3\otimes 1}\ \bullet 1)+C_4)\ ) \subset$
$\mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_3\otimes 1);\ C_5\ )$

Se calcula:

$((isham\otimes 1)\otimes 1);\ \mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1);\ ((\overline{C_3\otimes 1}\ \bullet 1)+C_4)\ )$

Por distributividad de + con ; y de *dom* con +:

$((isham\otimes 1)\otimes 1);\ \mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1);\ (\overline{C_3\otimes 1}\ \bullet 1)\ ) +$

$((isham\otimes 1)\otimes 1);\ \mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1);\ C_4)$

Se tiene la propiedad:

$((isham\otimes 1)\otimes 1);\ \mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1);\ (\overline{C_3\otimes 1}\ \bullet 1)\ ) = 0$

La prueba se escapa de los objetivos de este trabajo y no se incluye.

Finalmente hay que probar:

$((isham\otimes 1)\otimes 1);\ \mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1);\ C_4\ ) \subset$
$\mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_3\otimes 1);\ C_5\ )$

Obtención de descomposiciones

Se buscan descomposiciones para:

(a) $\mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1);\ C_4\ )$

y para:

(b) $\mathit{dom}(\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_3\otimes 1);\ C_5\ )$

donde:

$C_1 = ((1_{Nat} \otimes 1_L) \nabla (\Pi_1 \nabla \Pi_2 ; lon) ; \tilde{2}) ; \Pi_1$
$C_2 = ((1_{Nat} \otimes 1_L) \otimes 1_{Nat}) \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{12}) ; In) ; \Pi_1$
$C_3 = ((1_{Nat} \otimes 1_L) \otimes (1_{Nat} ; H))$
$C_4 = (((1_{Nat} \otimes 1_L) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla ((\Pi_2 \nabla \Pi_{12})) ; \langle \nabla (\Pi_2 ; H))) ; \Pi_1$
$C_5 = ((((1_{Nat} \otimes 1_L) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{112}) ; In) ; \Pi_1$

No se van a presentar todos los pasos pero sí que propiedades alcanzan.

Descomposición para (a)

Se calcula un término para:

$((t\otimes 1)\otimes 1) ; (C_2\otimes 1)$

Por distributividad de $\otimes$ con ; y def de C_2

$(((t\otimes 1) ; (((1_{Nat}\otimes 1_L)\otimes 1_{Nat}) \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{12}) ; In) ; \Pi_1)\otimes 1)$

$(t\otimes 1)$ es funcional, $\otimes$ distribuye con ; (Ver 4.7 (j,m)) y
cod$(t) \subset (1_{Nat}\otimes 1_L)$:

$(((t\otimes 1_{Nat}) \nabla (t\otimes 1_{Nat}) ; (\Pi_2 \nabla \Pi_{12}) ; In) ; \Pi_1)\otimes 1)$

Por sucesivas eliminaciones de $\otimes$ por proyecciones (4.5 (c,d)) y
por propiedad:
dom$(t\otimes 1_{Nat}) = ((1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-LO})\otimes 1_{Nat})$

$((((t\otimes 1_{Nat}) \nabla (((1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-LO}) \otimes 1_{Nat}) ;$
$(\Pi_2 \nabla \Pi_{12} ; (1_{L-LO} \nabla last;nexth) ; app) ; In)) ; \Pi_1)\otimes 1)$
Este es el término buscado.

Se calcula un término para:

$((t\otimes 1)\otimes 1) ; (C_2\otimes 1) ; C_4$

Por funcionalidad de $((t\otimes 1)\otimes 1) ; (C_2\otimes 1)$ y def. de C_4:

$(((((t\otimes 1)\otimes 1) ; (C_2\otimes 1)) ; (((1_{Nat}\otimes 1_L)\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat}))$
$\nabla ((((t\otimes 1)\otimes 1) ; (C_2\otimes 1)) ; ((\Pi_2 \nabla \Pi_{12})) ; \langle$
$\nabla (((t\otimes 1)\otimes 1) ; (C_2\otimes 1)) ; (\Pi_2 ; H))) ; \Pi_1$

Por sucesivas eliminaciones de $\otimes$ por proyecciones (4.5 (c,d)), por propiedad: $(r\nabla s) = (1\nabla 1) ; (r\otimes s)$ y usando el término calculado para $((t\otimes 1)\otimes 1) ; (C_2\otimes 1)$:

$(((((t\otimes 1)\otimes 1) ; (C_2\otimes 1)) ; (((1_{Nat}\otimes 1_L)\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat}))$
∇ *dom*$(\ (((1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-LO})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat}) ;$
$(\Pi_{12} \nabla \Pi_{112} ; (1_{L-LO} \nabla last;nexth) ; app) ; In) ;$
$((\Pi_2 \nabla \Pi_{12}) ; \langle \nabla (\Pi_2 ; H))) ; \Pi_1$

Este es el término buscado para $((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1);\ C_4$ y se le calcula el dominio.

Como el dominio de un ∇ distribuye con $\bullet$ se tiene:

$dom((((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_2\otimes 1));\ (((1_{Nat}\otimes 1_L)\otimes 1_{Nat})\otimes\ 1_{Nat}))\ \bullet$
$[\ dom(\ (((1_{Nat-<O>}\otimes 1_{L-LO})\otimes\ 1_{Nat})\ \otimes\ 1_{Nat});$
$(\Pi_{12}\ \nabla\ \Pi_{112};\ (1_{L-LO}\ \nabla\ last;nexth);\ app);\ in\ );$
$dom(\ (((1_{Nat-<O>}\otimes 1_{L-LO})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat});$
$((\Pi_2\ \nabla\ \Pi_{12});\ \langle\ \nabla\ (\Pi_2;H)))\ ]$

Simplificando:

$dom(\ (((1_{Nat-<O>}\otimes 1_{L-LO})\otimes\ 1_{Nat})\ \otimes\ 1_{Nat});$
$(\Pi_{12}\ \nabla\ \Pi_{112};\ (1_{L-LO}\ \nabla\ last;nexth);\ app);\ in\ );\ C_4$
Esta es la descomposición buscada.

Descomposición para (b)

Por distributividad de $\otimes$ y $;$:
$((t\otimes 1)\otimes 1);\ (C_3\otimes 1);\ C_5\ =\ (C_3\otimes 1);\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ C_5$

Se calcula un término para:
$((t\otimes 1)\otimes 1);\ C_5$

$((t\otimes 1)\otimes 1)$ es funcional y $\otimes$ distribuye con $;$ (Ver 4.7 (j,m)):

$(((t\otimes 1_{Nat})\otimes\ 1_{Nat})\ \nabla\ ((t\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat});\ (\Pi_2\ \nabla\ \Pi_{112});\ in);\ \Pi_1$

Por sucesivas eliminaciones de $\otimes$ por proyecciones (4.5 (c,d)) y por propiedad:
$dom((t\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat})\ =\ (((1_{Nat-<O>}\otimes 1_{L-LO})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat})$ (*)

$(((t\otimes 1_{Nat})\otimes\ 1_{Nat})\ \nabla\ ((((1_{Nat-<O>}\ \otimes\ 1_{L-LO})\ \otimes\ 1_{Nat})\otimes\ 1_{Nat});$
$(\Pi_2\ \nabla\ \Pi_{112};\ (1_{L-LO}\ \nabla\ last;nexth);\ app);\ in);\ \Pi_1$
es el término buscado. Ahora se calcula:

$dom((C_3\otimes 1);\ ((t\otimes 1)\otimes 1);\ C_5)$

Por propiedades simples de dominios (Ver 4.2 (h,i,m)):

$(C_3\otimes 1);\ dom(((t\otimes 1)\otimes 1);\ C_5))$

Por propiedad del dominio de un ∇ y (*):

$(C_3\otimes 1);\ dom(((1_{Nat-<O>}\ \otimes\ 1_{L-LO})\ \otimes\ 1_{Nat})\ \otimes\ 1_{Nat});$
$(\Pi_2\ \nabla\ \Pi_{112};\ (1_{L-LO}\ \nabla\ last;nexth);\ app);\ in)$

Es interesante observar que se eliminó el término t.

Prueba de propiedad resultante

(1) Considerando las descomposiciones anteriores hay que probar:

$((is\_ham \otimes 1) \otimes 1);\ [\ dom(\ (((1_{Nat-\langle O\rangle} \otimes 1_{L-LO}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat});$
$(\Pi_{12} \nabla \Pi_{112};\ (1_{L-LO} \nabla last;nexth);\ app);\ in\ );\ C_4\ ] \subset$

$[\ (C_3 \otimes 1);\ dom(((1_{Nat-\langle O\rangle} \otimes 1_{L-LO}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat});$
$(\Pi_2 \nabla \Pi_{112};\ (1_{L-LO} \nabla last;nexth);\ app);\ in)\ ]$

(2) Primer término de (1) se particiona en:

$(C_2 \otimes 1_{Nat}) + D$ donde:

$D = (((1_{Nat-\langle O\rangle} \otimes 1_{L-LO}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla$
$((\Pi_{12} \nabla \Pi_{112};\ (1_{L-LO} \nabla last;nexth););\ \tilde{2});\ \Pi_1$

Hay que probar:

(a) $((is\_ham \otimes 1) \otimes 1);\ (C_2 \otimes 1_{Nat});\ C_4 \subset$
$[\ (C_3 \otimes 1);\ dom(((1_{Nat-\langle O\rangle} \otimes 1_{L-LO}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat});$
$(\Pi_2 \nabla \Pi_{112};\ (1_{L-LO} \nabla last;nexth);\ app);\ in)\ ]$

y:

(b) $((is\_ham \otimes 1) \otimes 1);\ D;\ C_4 \subset$
$[\ (C_3 \otimes 1);\ dom(((1_{Nat-\langle O\rangle} \otimes 1_{L-LO}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat});$
$(\Pi_2 \nabla \Pi_{112};\ (1_{L-LO} \nabla last;nexth);\ app);\ in)\ ]$

(3) Por proposición 6.6 se tiene:

$(C_2 \otimes 1_{Nat});\ C_4 \subset (C_2 \otimes 1);((\overline{C_3 \otimes 1} \cdot 1)+C_4)$ y entonces:

$((is\_ham \otimes 1) \otimes 1);\ (C_2 \otimes 1_{Nat});\ C_4 \subset (C_3 \otimes 1);\ C_5$

Pero:

$(C_3 \otimes 1);\ C_5 \subset$

$[\ (C_3 \otimes 1);\ dom(((1_{Nat-\langle O\rangle} \otimes 1_{L-LO}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat});$
$(\Pi_2 \nabla \Pi_{112};\ (1_{L-LO} \nabla last;nexth);\ app);\ in)\ ]$

(4) Se descompone (b) en la prueba de dos fórmulas:

(c) $D \subset (C_3 \otimes 1)$
(d) $((is\_ham \otimes 1) \otimes 1);\ D;\ C_4 \subset C_5$

Observar que:

$C_5 \subset dom(\ ((1_{Nat-\langle O\rangle} \otimes 1_{L-LO}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat});$
$(\Pi_2 \nabla \Pi_{112};\ (1_{L-LO} \nabla last;nexth);\ app);\ in\ )$

Prueba de (c):

En las álgebras estructuradas se cumple la propiedad:

$((r\nabla(s;\ \tilde{\Pi}_1;C;\Pi_2));\ \tilde{2} = (s\nabla r);\ C;\ \Pi_2 \qquad (*)$

prueba:

$x\ ((r\nabla(s;\ \tilde{\Pi}_1;C;\Pi_2));\ \tilde{2}\ z$

$x\ ((r\nabla(s;\ \tilde{\Pi}_1;C;\Pi_2))\ z{*}z \quad z{*}z\ \tilde{2}\ z$

$x\ r\ z \quad x\ s;\ \tilde{\Pi}_1;C;\Pi_2\ z$

$\exists y\ \ x\ r\ z \quad x\ s\ y \quad y\ \tilde{\Pi}_1;C;\Pi_2\ z$

$\exists y\ \ x\ r\ z \quad x\ s\ y \quad y{*}z\ C\ y{*}z$

$\exists y\ \ x\ (s\nabla r)\ y{*}z \quad y{*}z\ C\ y{*}z$

$x\ (s\nabla r);C;\Pi_2\ z$

Por ser ; monótona (4.2 (a)):

$nexth \subset \tilde{\Pi}_1;\ (1_{Nat}\otimes 1_{Nat};H);\ \Pi_2$

Por ser ; monótona:

$D \subset ((((1_{Nat-<0>}\otimes 1_{L-L0})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat})\ \nabla$
$\quad (\Pi_{12}\ \nabla\ (\Pi_{112};\ last;\ \tilde{\Pi}_1;(1_{Nat}\otimes 1_{Nat};H);\Pi_2));\ \tilde{2}));\ \Pi_1$

Por propiedad (*) en el segundo término:

$D \subset ((((1_{Nat-<0>}\otimes 1_{L-L0})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat})\ \nabla$
$\quad (\Pi_{112};\ last\ \nabla\ \Pi_{12});\ (1_{Nat}\otimes 1_{Nat};H);\ \Pi_2);\ \Pi_1$

Por distributividad de $\otimes$ y ∇:

$D \subset ((((1_{Nat-<0>}\otimes 1_{L-L0})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat})\ \nabla$
$\quad (\Pi_{112};\ last\ \nabla\ \Pi_{12};H);\ \Pi_2);\ \Pi_1$

Por un simple cálculo de dominios (4.8 (g) y 4.2 (h,i,m)):

$D \subset ((((1_{Nat-<0>}\otimes 1_{L-L0})\otimes 1_{Nat};H)\otimes 1_{Nat}) = (C_3\otimes 1_{Nat}) \subset (C_3\otimes 1)$

Prueba de (d):

Se prueban algunos resultados previos:

En las álgebras estructuradas se cumple la propiedad:

$det(s) \Rightarrow dom(s;\forall(C_1|C_2)) = \forall((\overline{dom(s\otimes 1)})^{\bullet}1 + dom((s\otimes 1);C_1))|$
$\qquad dom((s\otimes 1);C_2)) \qquad (**)$

Prueba:

($\subset$) $x\ dom(s;\forall(C_1|C_2))\ x$
$\exists y\ x\ s\ y \quad y\ \forall(C_1|C_2)\ y$
Sea z:

(a) $y*z\ C_1\ y*z$ entonces $y*z\ C_2\ y*z$
$x*z\ (s\otimes 1);C_1\ y*z \quad x*z\ (s\otimes 1);C_2\ y*z$
$x*z\ dom((s\otimes 1);C_1)\ x*z \quad x*z\ dom((s\otimes 1);C_2)\ x*z$
esto último dice:
$x\ \forall((\overline{dom(s\otimes 1)})\cdot 1 + dom((s\otimes 1);C_1))|dom((s\otimes 1);C_2))\ x$

(b) Si no $y*z\ C_1\ y*z$ entonces
no $x*z\ ((s\otimes 1);C_1)\ y*z$ como $det(s)$:
no $x*z\ dom((s\otimes 1);C_1)\ x*z$
pero $x\ dom(s\otimes 1)\ x$ esto dice:
$x\ \forall((\overline{dom(s\otimes 1)})\cdot 1 + dom((s\otimes 1);C_1))|dom((s\otimes 1);C_2))\ x$

($\supset$) $x\ \forall((\overline{dom(s\otimes 1)})\cdot 1 + dom((s\otimes 1);C_1))|dom((s\otimes 1);C_2))\ x$

(a) si no $x\ dom(s)\ x$ entonces
no $x*y\ dom(s\otimes 1)\ x*y$ para todo y
$x*y\ \overline{dom(s\otimes 1)}\cdot 1\ x*y$ para todo y esto dice:
$x*y\ dom((s\otimes 1);C_2))\ x*y$ para todo y absurdo.

(b) sea $x\ s\ y$ hay que probar: $y\ \forall(C_1|C_2)\ y$
sea z:
(1) $y*z\ C_1\ y*z$
$x*z\ (s\otimes 1);\ C_1\ y*z$
$x*z\ dom((s\otimes 1);\ C_1)\ x*z$ luego:
$x*z\ dom((s\otimes 1);\ C_2)\ x*z$
$x*z\ (s\otimes 1);\ C_2\ y*z$
$y*z\ C_2\ y*z$
(2) no $y*z\ C_1\ y*z$
no $x*z\ (s\otimes 1);\ C_1\ y*z$
no $x*z\ dom((s\otimes 1);\ C_1)\ x*z$
no $y*z\ C_1\ y*z$

En las álgebras estructuradas se cumple la propiedad:

$$(\forall(C_1|C_2)\otimes 1) = \forall(\tilde{\delta};(C_1\otimes 1);\delta|\tilde{\delta};(C_2\otimes 1);\delta) \quad (***)$$

donde $\delta = ((\Pi_{11}\nabla\Pi_2)\nabla\Pi_{12})$

Prueba:

$x*y\ (\forall(C_1|C_2)\otimes 1)\ x*y$
$x\ \forall(C_1|C_2)\ x$
Si $x*z\ C_1\ x*z$ entonces $x*z\ C_1\ x*z$. Luego:
Si $(x*y)*z\ \tilde{\delta}\ (x*z)*y\ (C_1\otimes 1)\ ((x*z)*y)\ \delta\ (x*y)*z$ entonces:
$(x*y)*z\ \tilde{\delta}\ (x*z)*y\ (C_2\otimes 1)\ ((x*z)*y)\ \delta\ (x*y)*z$ Esto dice:
$x*y\ \forall(\tilde{\delta};(C_1\otimes 1);\delta|\tilde{\delta};(C_2\otimes 1);\delta)\ x*y$

Hay que probar:

$((\text{is\_ham} \otimes 1) \otimes 1);\ D;\ C_4 \subset C_5$

Partición en casos:

$(((1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-L0}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat})$ es la suma de:

$F_1 = ((((1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-L0}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{112};\ \text{last});\ \tilde{=}));\Pi_1$

$F_2 = ((((1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-L0}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{112};\ \text{last});\ >));\Pi_1$

$F_3 = ((((1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-L0}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat}) \nabla (\Pi_2 \nabla \Pi_{112};\ \text{last});\ <));\Pi_1$

El problema se reduce a probar:

$(d_i)\ ((\text{is\_ham} \otimes 1) \otimes 1);\ D;\ F_i;\ C_4 \subset C_5 \qquad i \in 1..3$

Prueba de (d_1):

Es fácil verificar:

$F_1 \subset C_5$

Por 4.2 (h):

$((\text{is\_ham} \otimes 1) \otimes 1);\ D;\ F_i;\ C_4 \subset F_1 \subset C_5$

Prueba de (d_2):

Esta prueba es muy extensa por eso se da un esquema de los pasos a seguir:

Se probará que:

$D;\ F_2;\ C_4 = 0$

Sea $C = (((1_{Nat-\langle 0\rangle} \otimes 1_{L-L0}) \otimes 1_{Nat}) \otimes 1_{Nat})$

por (*) a D:

$D = (C \nabla (\Pi_{112};\text{last} \nabla \Pi_{12});\ E;\forall(E_1 | E_2));\Pi_1$

Por 5.7 a D:

$D = (C \nabla (\Pi_{112};\text{last}\nabla\Pi_{12});\ \forall(((\overline{E\otimes 1})^{\bullet} 1) + E_1) | ((E\otimes 1);E_2));\Pi_1$

Por propiedades simples de dominios:

$D = \mathit{dom}(C;(\Pi_{112};\text{last}\nabla\Pi_{12});\ \forall(((\overline{E\otimes 1})^{\bullet} 1) + E_1) | ((E\otimes 1);E_2))$

por (**) a D:

$$
\begin{aligned}
D = \forall(\; & \overline{\mathit{dom}((C;(\Pi_{112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{12}))\otimes 1})^{\bullet}\, 1 + \\
& \mathit{dom}((C;(\Pi_{112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{12}))\otimes 1); \;\; (((\overline{E\otimes 1})^{\bullet}\, 1) + E_1)) \mid \\
& \mathit{dom}((C;(\Pi_{112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{12}))\otimes 1); \;\; (((E\otimes 1)^{\bullet}\, 1); \; E_2)))
\end{aligned}
$$

Se busca simplificar esta expresión:

(1) Es fácil ver:

$$\mathit{dom}((C;(\Pi_{112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{12}))\otimes 1) = C\otimes 1$$

(2) Se puede probar que:

$$((C;(\Pi_{112}; \; \mathrm{last} \; \nabla \; \Pi_{12}))\otimes 1); \; E_1$$

es igual al término:

$$
\begin{aligned}
& ((C;(\Pi_{112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{12}))\otimes 1_{Nat}) \; \nabla \\
& ((C\otimes 1_{Nat});(\Pi_{1112};\mathrm{last}\nabla\Pi_2);\langle \; \nabla \; (C\otimes 1_{Nat});(\Pi_2\nabla\Pi_{112});\langle\rangle)); \; \Pi_1
\end{aligned}
$$

y su dominio es:

$$\mathit{dom}((C\otimes 1_{Nat});((\Pi_{1112};\mathrm{last}\nabla\Pi_2);\langle \; \nabla \; (\Pi_2\nabla\Pi_{112});\langle\rangle)))$$

(3) Se tiene que:

$$(C;(\Pi_{112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{12}))\otimes 1); \;\; (((E\otimes 1)^{\bullet}\, 1); \; E_2))$$

Es igual al término:

$$
\begin{aligned}
& ((((C\otimes 1_{Nat});(\Pi_{1112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{112}) \; \nabla \\
& \;\; (((C\otimes 1_{Nat});(((\Pi_{1112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{112});\langle \; \nabla \\
& \;\;\;\; (C\otimes 1_{Nat});\Pi_{112};H) \; \nabla \; \Pi_2; \; \overline{H}^{\bullet}\, 1); \; \Pi_1
\end{aligned}
$$

el dominio del último término es:

$$
\begin{aligned}
\mathit{dom}(\; & (C\otimes 1_{Nat});(((\Pi_{1112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{112});\langle \; \nabla \; \Pi_{112};H) \; \nabla \\
& \Pi_2; \; \overline{H}^{\bullet}\, 1) \;)
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
D = \forall(\; & (\overline{C}^{\bullet}\, 1\otimes 1) + \mathit{dom}(((C\otimes 1);(\Pi_{1112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{112})); \;\; ((\overline{E\otimes 1})^{\bullet}\, 1)) + \\
& \mathit{dom}((C\otimes 1_{Nat});((\Pi_{1112};\mathrm{last}\nabla\Pi_2);\langle \; \nabla \; (\Pi_2\nabla\Pi_{112});\langle\rangle))) \mid \\
& \mathit{dom}((C\otimes 1_{Nat});(((\Pi_{1112};\mathrm{last}\nabla\Pi_{112});\langle \; \nabla \; \Pi_{112};H) \; \nabla \; \Pi_2;\overline{H}^{\bullet}\, 1) \;)
\end{aligned}
$$

Se puede probar que:

$$D = \forall(\tilde{\delta};(\,[\,(\overline{C}^{\bullet}\,1\otimes 1) + dom(C;(\Pi_{112};last\nabla\Pi_{12}));\ ((\overline{E\otimes 1})^{\bullet}\,1)) + dom(C;((\Pi_{112};last\nabla\Pi_{2});\langle\ \nabla\ (\Pi_{2}\nabla\Pi_{12});\langle\,\rangle\,]\otimes 1);\ \delta \mid \tilde{\delta};\ (dom(C;((\Pi_{112};last\nabla\Pi_{12});\langle\ \nabla\ \Pi_{12};H)\ \nabla\ \Pi_{2};\overline{H}^{\bullet}\,1)\otimes 1);\ \delta\ )$$

Se tiene por (***) que:

$$F_2;C_4 \subset dom(C;((\Pi_{112};last\nabla\Pi_{2});\langle\ \nabla\ (\Pi_{2}\nabla\Pi_{12});\langle\,\rangle$$

Por 6.6:

$$D;\ F_2;\ C_4 \subset ((((1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-L0})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat};\ \overline{H}^{\bullet}\,1)$$

Como $C_4 \subset ((((1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-L0})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat};\ H)$

Se tiene: $D;\ F_2;\ C_4 = 0$.

Idea de la prueba de (d_3):

Por monotonía del ;:

$$((is\_ham\otimes 1)\otimes 1);\ D_2;\ C_4;\ F_3 \subset ((is\_ham\otimes 1)\otimes 1);\ F_3;\ F$$

donde $F = ((((1_{Nat-\langle 0\rangle}\otimes 1_{L-L0})\otimes 1_{Nat})\otimes 1_{Nat};\ H)$

y $C_4 \subset F$

Queda como ejercicio para el lector interesado encontrar la variante de 6.6 que permite probar:

$$((is\_ham\otimes 1)\otimes 1);\ F_3;\ F \subset C_5$$

CONCLUSIONES

En [BHV 92] se presenta una axiomatización para ∇ de modo que toda álgebra que la respete sea isomorfa a una álgebra relacional propia (teorema de representación). Pero todavía no se ha probado que dicha axiomatización alcance para caracterizar a las clases de isomorfismo de las *álgebras relacionales estructuradas*. Además no se ha encontrado una axiomatización para el cálculo extendido que sea completa con respecto al procedimiento de prueba de A. Tarski.

En la sección 5 se introdujo el problema de probar propiedades para relaciones. Todavía queda por analizar que sucede cuando se combinan condiciones universales con cuantificadores existenciales.

Otro problema abierto es el de la eficiencia para esto es necesario:

(a) Precisar la sintaxis de los *programas ejecutables*.
(b) Estudiar cómo se *"ejecutan"* las operaciones y construcciones del cálculo extendido. Para esto hay que buscar una semántica apropiada equivalente a la semántica algebraica.
(c) Buscar un conjunto de propiedades que permitan pasar de unos términos a otros más eficientes.

BIBLIOGRAFIA

[BR 73] De Bakker J. W., De Roever W. P. A calculus for recursive program schemes. In: Nivat M. (ed.): Proc. ICALP 73. North Holland: Amsterdan, 167-190 (1973).

[BBBD 85] Bauer F. L., Berghammer R., Broy M., Dosch W., Geiselbrechtinger F., Gnatz R., Hangel E., Hesse W., Krieg Brückner B., Laut A., Matzner T., Möller B., Nickl F., Partsch H., Pepper P., Samelson K., Wirsing M., Wössner H., The Munich Proyect CIP. Volume I: The Wide Spectrum Language CIP-L. Lecture Notes of Computer Science 183, Berlin: Springer 1985.

[BDPPW 79] Broy M., Dosch W., Partsch H., Pepper P., Wirsing M.: Existencial Quantifiers in Abstract Data Types. In: H. A. Maurer (ed.): 6th. Internat. Coll. Automata, Languages and Programming. LNCS, 71. Springer, Berlín, 1979, 73-87.

[BEMP 87] Bauer F. L., Ehler H., Horsch A., Möller B., Partsch H., Paukner O., Pepper P.: The Munich Proyect CIP. Volume II: The Transformation System CIP-S. Lecture Notes in Computer Science 292, Berlin: Springer 1987.

[BG 80] Burstall R.M. and Goguen J.A., The Semantics of CLEAR, a Specification Language. Proc. of Advanced Course on Abstract Software Specifications. Copenhaguen, LNCS 86, Berlín, pp. 292-332.

[BHV 92] Baum G., Haeberer A., Veloso P.A.S., On the Representability of the ∇-Abstract Relational Algebra. Imperial College. September 1992.

[BS 91] Berghammer Rudolf, Scmidth Gunter, Relational Specifications, Universität der Bundeswhr München, 1991.

[Ber 91] Berghammer Rudolf, Relational Specification of Datatypes and Programs. Universität der Bundeswhr München, 1991.

[BW 82] Bauer, Wösner, Algorithmic Language and Program Development. Berlín: Springer 1982

[BZ 86] Berghammer R., Zierer H.: Relational algebraic Semantics of Deterministic and non deterministic programs. Theoret. Comput. Sci. 43, 123-147 (1986).

[BGH 88] Broy Manfred, Alfons Geser, Hussmann Heinrich, Towards Advanced Programming Environments based on Algebraic concepts. Universität Passau, MIP 8826, dezember, 1988.

[Codd 70] Codd E. F., A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Comm. ACM 13(6) (1970) 377-387.

[Codd 79] Extending the Data Base Relational Model to Capture More Meaning. ACM Transactions on Database Systems 4(4) (1979).

[CT 51] Chin L., Tarski A., Distributive and Modular Laws in the Arithmetic of Relation Algebras. University of California Publications in Mathematics, New Series 1.9 (1951), pp. 341-184.

[DM 90] Desharnais J., Madhavji N. H.: Abstract Relational Specifications. In: Broy M. Jones J. B. (eds.): Proc. TC2 Working Conference on Programming Concepts and Methods. North Holland, 267-284. (1990).

[Des 89] Desharnais J.: Abstract relational semantics. PHD. thesis, Mc Gill Univ. Montreal, Faculty of Graduate Studies and Research (1989).

[Ehr 81] Ehrich H. On Realization and Implementation. Proc. 10th. Symp. on Math. Founds. Of Comp. Sci. Strbske Czechoslovakia. Springer LNCS 118.

[EKMP 82] Ehrigh H., Kreowski H., Mahr B., Padawitz P. Algebraic Implementation of Abstract Data Types. Theor. Comp. Sci. 20 pp. 209-263.

[EM 89] Ehrig H., Mahr B., Fundamentals of Algebraic Specifications 2: Module Specifications and constrains. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer Verlag, 1989.

[EM 85] Ehrig H., Mahr B., Fundamentals of Algebraic Specifications 1. Equations and initial semantics. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science 6, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[ETLZ 82] Ehrig H., Thatcher J.W., Lucas P. and Zilles S.N. Denotational and initial Algebra Semantics of the Algebraic Specification Language LOOK. Draft report, IBM research.

[Flo 67] Floyd R. W., Assigning Meanings to Programs. in: Schwartz J.T. (ed.). Proc. Symp. in Applied Mathematics. 19 (1967) 19-32.

[Gan 83] Ganzinger H., Parameterized Specifications: Parameter Passing and Implementation with respect to Observability. TOPLAS 5.3 pp. 318-354.

[GB 80] Goguen J.A. and Burstall R.M., CAT, a System for the Structured Elaboration of Correct Programs from Structured Specifications. Technical report CSL-118, SRI Internat.

[GM 82] Goguen J. A. and Messeguer, J. Universal Realization, Persistent Interconection and Implementation of Abstract Modules. Proc. 9th Colloq. on Automata, Languages and Programming. Aarhus. Springer LNCS 140 pp. 265-281.

[GGM 76] Giarratana V., Gimona F., Montanari U., Observability Concepts in Abstract Data Type Specifications. In: Proc. 5th Internat. Symp. on Mathematical Foundations of Computer Science. LNCS 45, Springer Berlin, 76, 567-578.

[GTWW 75] Goguen J. A., Thatcher J. W., Wagner E. G. and Wright J.: Abstract Data Types as Initial Algebras and the Correctness of Data Representations. Proc. Conf. on Computer Graphics, Pattern Recognition and Data Structures, 1975, 89-93.

[GTW 76] Goguen J. A., Thatcher J. W., Wagner E. G., An Initial Algebra Approach to the Specification, Correctness and Implementation of Abstract Data Types. IBM Research Report. RC6487.

[GTWW 77] Goguen J. A., Thatcher J. W., Wagner E. G. and Wright J.: Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras. J. ACM 24, 1977, 68-95.

[Gut 75] Guttag J. V., The Specification and Application to Programming of Abstract Data Types. Ph. D.Thesis. Univ. of Toronto, 1975.

[HB 92] Hutton G., Boermans E., A Calculational Theory of Pers as Types. University of Glasgow. 1992/RI. January 1992.

[HH 86] Hoare C. A. R., Hifeng He, The Weakest Prespecification. Fundamenta Informaticae 9. (986) pp 51-84, 217-252.

[Hoa 69] Hoare C. A. R., An Axiomatic Basis for Computer Programming. Comm. ACM 12(10) (1969). 576-583.

[HVB 89] Haeberer A. M., Veloso P. A. S, Baum G., Formalización del Proceso de Desarrollo de Software. Kapeluz, Buenos Aires, 1989.

[HVE 90] Haeberer A. M., Veloso P. A. S., Elustondo P., Towards a relational calculus for software construction, document 640-BUR-5, 41st. Meeting of the IFIP Working Group 2.1, Programming Language and Calculi, Chester, U.K., 1990.

[HV 91] Haeberer A. M., Veloso P. A. S, Partial Relations for Program Derivation. Univ. Catolica do Rio de Janeiro, 1991.

[JT 52] Jónnson B., Tarski A., Boolean Algebras with Operators. Amer. Journal of Math. 74 (1952), pp. 127-162.

[Lip 83] Lipeck. U., Ein Algebraischer Kalküt für Informatik der TU München TUM-I8409, 1984. Also: Science of Computer Programming 9, 221-262 (1987).

[LZ 74] Liskov B., Zilles S., Programming with Abstract Data Types. SIGPLAN. Notices 9, 1974, 50-59.

[McK 40] McKinsey J. C. C.,Postulates for the Calculus of Binary Relations. The Journal of Symbolic Logic. Vol. 5 number 3, p. 84-97, September 1940.

[Möl 91] Möller B.: Relations as a program development languaje. IFIP TC2/WG 2.1. Working Conference on Constructing Programs from Specifications, Pacific Grove, CA, USA, 13-16 May 1991. pp. 373-397.Amsterdam: North Holland 1991.

[Möl 92] Möller B., Derivation of Graph and Pointer Algorithms. Institut für Matematik, Universität Augsburgh. 1992

[Naur 66] Naur P., Proof of Algorithms by General Smapshots, BIT 6 (1966), 310-316.

[Par 90] Parstch H. A., Specification and Transformation of Programs. A Formal Approach to Software Developement. Springer Verlag 1990, chapter 3.

[Roe 74] De Roever W.P.: Recursion and Parameter Mechanisms: An Axiomatic Approach. In: Loeck J. (ed.): Proc. ICALP 74, LNCS 14, Springer, 34-65. (1974).

[ST 86] Sanella Donald, Tarlecki Andrzej, Toward Formal Developement of Programs from Algebraic Specifications: Implementation Revisited University of Edinburgh, 1986

[Sch 82] Schoot O., A Theory of Program Modules, their Specification and Implementation. Report CSR 155-83. Dept. Comp. Sci. Univ. Edinburgh.

[Sch 84] Schmidt M.: Behandlung Abstrakter typen anf relationen algebraischer Grundlage Diplomarbeit, Techn. Univ. München Institut für Informatik (1984).

[SS 85] Schmidt G., Ströhlein T., Relation Algebras: Concept of Points and Representability. Discrete Mathematics 54 (1985) North Holland.

[SW 82] Sanella D.T. and Wirsing M., Implementation of Parameterized Specifications. Report CSR 103-82, Dept. of Comp. Sci. Univ. of Eddinburgh. Extended abstract in Proc. 9th Intl, Colloq. on Automata, Languages and Programming. Aarhus. Springer LNCS 140, pp. 473-488.

[Tar 41] Tarski A., On The Calculus of Relations. The Journal of Symbolic Logic. Vol. 6 number 3, September 1941.

[VHB 92] Veloso P. A. S., Haeberer A. M., Baum G., Formal Program Construction within an Extended Calculus of Binary Relations. Draft version. 1992.

[Wand 81] Wand M., Final Algebra Semantics and Data Type Extensions. J. Comput. System Sci. 19, 1981, 27-44.

[Wir 82] Wirsing M.: Structured Algebraic Specification. In: Robinet B. (ed.): AFCET 1982 93-108.

[Wir 86] Wirsing M.: Structured Algebraic Specifications: A Kernel Languaje. Theor. Comp. Sci. 43, 1986, 123-250.

[Wir 90] Wirsing Martin, Algebraic Specification: Semantics, Parameterization and Refinement. Universität Passau, MIP 9083, 1990.

[Zier 83] Zierer H.: Relationale Semantik. Diplomarbeit, Techn. Univ. München, Institut für Informatik (1983).